Олимпиада «Курчатов», 2018 г., финальный тур
Решения задач

6 класс

1. Незнайка, Кнопочка, Винтик и Знайка участвовали в математическом конкурсе. Каждую задачу конкурса решили ровно трое из них. Знайка решил строго больше каждого из остальных — 10 задач, а Незнайка решил строго меньше каждого остальных — 7 задач. Сколько всего задач было в математическом конкурсе?

Ответ: 11.

Заметим, что Винтик и Кнопочка решили либо 8, либо 9 задач; таким образом, общее количество решенных задач может быть от $7+8+8+10=33$ до $7+9+9+10=35$. Но это число равно утроенному количеству задач, предложенных на конкурсе. Среди чисел $33, 34, 35$ только число 33 кратно трем. Значит, общее количество решенных задач равно 33, а задач всего было 11. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

∓ Верный ответ без обоснования — 2 балла.

2. Разрежьте по линиям сетки клетчатый квадрат 7×7 на 5 частей таким образом, чтобы из них можно было сложить три квадрата разной площади.

Одно из возможных решений изображено на рис. 1. □

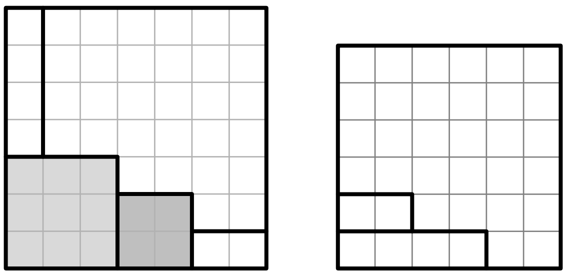


Рис. 1: к решению задачи 2.

Критерии

+ Любое верное разрезание — 7 баллов.

3. Сколькими способами можно вставить несколько знаков «+» между цифрами в числе 111 111 111 111 (12 единиц) так, чтобы результат делился на 30?

Ответ: 55.

Делимость числа на 30 равносильна одновременной делимости числа на 3 и на 10. Заметим, что в силу признака делимости на 3 каждое слагаемое будет давать такой же остаток при делении на 3, какой дает количество единиц в записи этого слагаемого. Общее число единиц равно 12, а значит, результат будет кратен 3 вне зависимости от того, как именно расставлены знаки «+». Осталось разобраться, при каких условиях на расстановку плюсов результат кратен 10.

Каждое слагаемое оканчивается на 1, слагаемых в сумме не более 12. Получается, что результат делится на 10 тогда и только тогда, когда слагаемых ровно 10, а плюсов между ними — 9. Получить любую расстановку девяти знаков «+» можно следующим образом: сначала поставить 11 плюсов, получив сумму $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$, а затем стереть два произвольных знака «+». Выбрать два произвольных плюса из 11 можно ровно $\frac{11\cdot 10}{2} = 55$ способами, что и является ответом к задаче. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

+ В логически верном решении при вычислении количества способов расстановки 9 плюсов произошла арифметическая ошибка — 5 баллов.

± Доказано, что результат будет кратен 30, если и только если плюсов 9, но количество способов это сделать не вычислено — 4 балла.

∓ Верный ответ без пояснений (или с неверными пояснениями) — 2 балла.

Баллы за следующие два продвижения ставятся при отсутствии баллов за приведенные выше ситуации и суммируются между собой.

−. Доказано, что результат всегда кратен 3 вне зависимости от числа плюсов — 1 балл.

−. Указано, что делимость на 30 равносильна одновременной делимости на 10 и на 3 (или даже на 2, на 5 и на 3) — 1 балл.

4. Вася помнит, что его друг Петя живет на Курчатовской улице в доме номер 8, а номер квартиры забыл. На просьбу уточнить адрес Петя ответил: «Номер моей квартиры — трехзначное число. Если переставить в нем цифры, то получится пять других трехзначных чисел. Так вот, сумма этих пяти чисел будет в точности 2017». Помогите Васе вспомнить номер квартиры Пети.

Ответ: 425.

Обозначим первую, вторую и третью цифры номера квартиры Пети через a, b, c соответственно. Условие задачи алгебраически записывается следующим образом:

$$\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=2017\,.$$

Прибавим к обеим частям $\overline{abc}$ и в левой части распишем все трехзначные числа с помощью формулы $\overline{abc}=100a+10b+c$, после приведения подобных получим

$$222\cdot(a+b+c)=\overline{abc}+2017\,.$$

Следовательно,

$$3016=2017+999\geqslant 222(a+b+c)\geqslant 2017+100=2117\,,$$

из чего заключаем, что $a+b+c$ может принимать лишь значения 10, 11, 12 или 13. Разберем все 4 случая:

(1) $a+b+c=10$, тогда

$$\overline{abc}=2220-2017=203$$

не подходит, так как сумма цифр числа 203 равна 5, а не 10;

(2) $a+b+c=11$, тогда

$$\overline{abc}=2442-2017=425$$

— подходит;

(3) $a+b+c=12$, тогда

$$\overline{abc}=2664-2017=647$$

не подходит, так как сумма цифр числа 647 равна 17, а не 12;

(4) $a+b+c=13$, тогда

$$\overline{abc}=2886-2017=869$$

не подходит, так как сумма цифр числа 869 равна 23, а не 13. □

Критерии

- $+$ Полное верное решение — 7 баллов.
- $\pm$ Задача сведена к короткому перебору, но из-за арифметических ошибок решение потерялось — 5 баллов.
- $\mp$ Условие переписано в виде $222 \cdot (a+b+c) = \overline{abc} + 2017$ или эквивалентном, дальнейших продвижений нет — 3 балла.
- $\mp$ Только верный ответ без объяснения — 2 балла.

5. В каждом поле таблицы 15×15 записано число -1, 0 или $+1$ так, что сумма чисел в любой строке неположительна, а сумма чисел в любом столбце неотрицательна. Какое наименьшее количество нулей может быть записано в клетках таблицы?

Ответ: 15.

Оценка. Раз сумма чисел во всех строках неположительна, то и сумма всех чисел в таблице неположительна. С другой стороны, если сумма чисел в любом столбце неотрицательна, то и сумма всех чисел в таблице неотрицательна. Следовательно, на самом деле сумма всех чисел в таблице нулевая, и суммы чисел в каждом столбце и в каждой строке также нулевые.

В каждой строке должен стоять хотя бы один нуль, так как в противном случае сумма всех пятнадцати $+1$ и -1 окажется нечетной, а должна быть нулевой.

Таким образом, нулей в таблице стоит не менее 15.

+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	
−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−		+
+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−		+	−
−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−		+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−	+	−		+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+	−		+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−		+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−		+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−		+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−		+	−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−		+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−		+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+
+	−		+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
−		+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+
	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−

Рис. 2: к решению задачи 5.

Пример. Один из возможных примеров с 15 нулями приведен на рис. 2. Символы «+» и «−» соответствуют расположению чисел $+1$ и -1, закрашенные клетки — расположению нулей. □

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $-.$ Дан верный ответ без пояснений (или с неверными пояснениями) — 1 балл.

  Решение естественным образом разбивается на две части: пример расстановки чисел с 15 нулями и доказательство того, что нулей хотя бы 15. Баллы за эти части суммируются.

- $\mp$ Приведен верный пример с 15 нулями — 3 балла.
- $\pm$ Обосновано, что нулей не может быть меньше 15 (или что в каждой строке/столбце есть хотя бы по нулю) — 4 баллов.
- $-.$ Замечено, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце должна быть нулевой, но вывода о наличии нуля в произвольной строке/столбце не последовало — 1 балл из 4 возможных за оценку.

7 класс

1. Незнайка, доктор Пилюлькин, Кнопочка, Винтик и Знайка участвовали в математическом конкурсе. Каждую задачу конкурса решили ровно четверо из них. Знайка решил строго больше каждого из остальных — 10 задач, а Незнайка решил строго меньше каждого остальных — 6 задач. Сколько всего задач было в математическом конкурсе?

Ответ: 10.

Каждый из доктора Пилюлькина, Кнопочки и Винтика по условию решил от 7 до 9 задач. Поэтому суммарное количество решенных задач находится от $10+6+3\cdot 7 = 37$ до $10+6+3\cdot 9 = 43$. Заметим, что это количество должно быть равно учетверенному числу задач. Среди чисел от 37 до 43 только одно делится на 4 — это число 40. Следовательно, суммарное количество решенных задач равно 40, а задач всего было 10. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

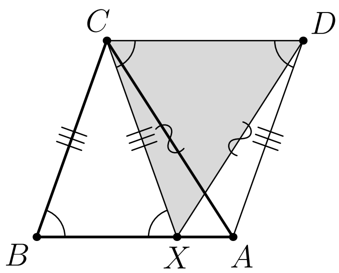
∓ Верный ответ без пояснений (или с неверными пояснениями) — 2 балла.

2. Сколькими способами можно вставить несколько знаков «+» между цифрами в числе 111 111 111 111 (12 единиц) так, чтобы результат делился на 30?

См. решение и критерии задачи 6.3. □

3. На сторонах AB, BC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно так, что $AY = AB$ и $CX = CB$. Прямая, проходящая через вершину A параллельно стороне BC, пересекает прямую, проходящую через вершину C параллельно стороне AB, в точке D. Докажите, что $DX = DY$.

Заметим, что $\angle BAC = \angle ACD$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC; аналогично $\angle BCA = \angle CAD$. Получаем, что треугольники ABC и CDA равны по второму признаку.



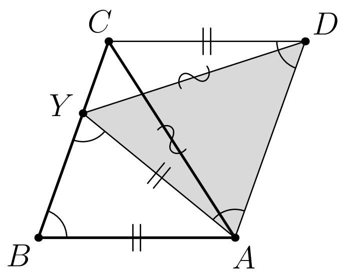


Рис. 3: к решению задачи 3.

Далее, последовательно используя равенство треугольников CDA и ABC, равнобедренность треугольника XCB и параллельность прямых AB и CD, пишем $\angle CDA = \angle ABC = \angle BXC = \angle XCD$. Треугольники ADC и XCD оказываются равны по первому признаку, откуда $DX = AC$ (рис. 3). Аналогично доказывается, что $DY = AC$. Значит, $DX = DY$. □

Критерии

+ Полное верное решение — 7 баллов.

4. Все натуральные числа раскрашены в три цвета. Докажите, что найдутся два числа одного цвета, разность между которыми является квадратом натурального числа.

Предположим противное: пусть любые два числа, разность между которыми является точным квадратом, покрашены в разный цвет. Для некоторого натурального числа x рассмотрим числа x, $x+9$, $x+16$, $x+25$. У чисел x, $x+9$ и $x+25$ все три попарные разности являются точными квадратами, следовательно они покрашены в три различных цвета. Аналогично получаем, что в тройке x, $x+16$ и $x+25$ также представлены все три цвета. Следовательно, числа $x+9$ и $x+16$ обязательно имеют одинаковый цвет. Но поскольку в качестве x можно рассматривать любое натуральное число, заключаем, что любые два числа, большие 10 и отличающиеся на 7, покрашены в один цвет. Но тогда покрашены в один цвет и любые два достаточно больших числа с разностью 49, что противоречит исходному предположению.

Замечание. Вместо чисел 9, 16 и 25 можно было выбрать любые три квадрата a^2, b^2 и c^2 такие, что $a^2 + b^2 = c^2$. Например, годятся 25, 144 и 169 или 36, 64 и 100. $\square$

Критерии

$+$ Верное решение — 7 баллов.

$\mp$ Доказано, что любые достаточно большие числа числа на фиксированном расстоянии (к примеру, 7) раскрашены в один и тот же цвет, а дальнейших продвижений нет — 3 балла.

$-.$ Идея использования пифагоровой тройки ($a^2 + b^2 = c^2$), не доведенная до конца — 1 балл.

5. На столе лежат 2018 игральных карт (2018 стопок по одной карте в каждой). Петька хочет сложить их в одну колоду из 2018 карт за 2017 операций. Каждая операция состоит в том, что две стопки соединяются в одну. При этом, когда Петька соединяет стопки из a и b карт, Василий Иванович платит Петьке $a \cdot b$ рублей. Какую максимальную сумму может заработать Петька, совершив все 2017 операций?

Ответ: $\dfrac{2017 \cdot 2018}{2} = 2035153$.

Будем мысленно связывать карточки в одной стопке невидимыми нитями каждую с каждой. Тогда операция соединения двух стопок с a и b картами добавляет как раз $a \cdot b$ нитей. В итоге каждая карта будет связана нитью с каждой и количество нитей не будет зависеть от способа проведения операций и окажется равным $\dfrac{2017 \cdot 2018}{2}$. Именно столько рублей и заработает Петька.

Другое решение. Заметим, что при объединении стопок из a и b карт мы зарабатываем в точности $\frac{1}{2}\big((a+b)^2 - a^2 - b^2\big)$ рублей; следовательно, конечная сумма, которую мы заработаем, равна в точности

$$\frac{1}{2}(2018^2 \underbrace{-1^2 - 1^2 - \ldots - 1^2}_{2018 \text{ раз}}) = \frac{1}{2}(2018^2 - 2018)\,. \quad \square$$

Критерии

$+$ Верное решение — 7 баллов.

$+.$ В логически верном решении ответ представлен в виде суммы с многоточием — снимается не менее 1 балла. Например, ответ в виде $1 + 2 + \ldots + 2017$ — 6 баллов.

$\pm$ Доказано, что ответ не зависит от способа проведения операций — не менее 5 баллов.

$-.$ Верный ответ без обоснования или с неверным образованием — 1 балл.

Пример неверного обоснования: в работе вычислена сумма для конкретного способа действий, но не доказано, что именно при этом способе действий достигается максимум суммы (и не доказано, что сумма на самом деле не зависит от порядка операций).

8 класс

1. На плоскости нарисованы перекрывающиеся квадрат и круг. Вместе они занимают площадь $2018\,\text{см}^2$. Площадь пересечения составляет $137\,\text{см}^2$. Площадь круга равна $1371\,\text{см}^2$. Чему равен периметр квадрата?

Ответ: 112 см.

Площадь части круга вне квадрата составляет $1371 - 137 = 1234\,\text{см}^2$, следовательно, площадь квадрата можно выразить формулой $2018 - 1234 = 784\,\text{см}^2$. В итоге заключаем, что длина стороны квадрата равна $\sqrt{784} = 28\,\text{см}$, а его периметр — 112 см. □

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $\pm$ Арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений — 5 баллов.

2. Перед Васей лежит стопка из 15 красных, 15 синих и 15 желтых карточек. Васе требуется выбрать 15 из всех 45 карточек так, чтобы заработать максимальное количество очков. Очки при этом начисляются следующим образом. За каждую красную карточку Вася получает одно очко. За каждую синюю карточку Вася получает количество очков, равное удвоенному количеству выбранных красных карточек, а за каждую желтую карточку Вася получает количество очков, равное утроенному количеству выбранных синих карточек. Какое максимальное количество очков может получить Вася?

Ответ: 168.

Обозначим количества взятых Васей красных, синих и желтых карточек символами К, С и Ж соответственно. Число очков, которое получит Вася, выражается формулой

$$\text{К} + 2 \cdot \text{К} \cdot \text{С} + 3 \cdot \text{С} \cdot \text{Ж} = \text{К} \cdot (2\text{С} + 1) + \text{Ж} \cdot 3\text{С}\,.$$

Если $\text{С} = 0$, то Вася получит очки только за красные карточки, то есть не более 15.

Если же $\text{С} \geqslant 1$, то $2\text{С}+1 \leqslant 3\text{С}$, и, как видно из формулы выше, после замены всех красных карточек на желтые количество очков, набранных Васей, не уменьшится. Тем самым можно считать, что Вася взял только желтые и синие карточки, и тогда $\text{С} + \text{Ж} = 15$. Общая сумма набранных очков вычисляется по формуле

$$3 \cdot \text{С} \cdot (15 - \text{С})\,.$$

Рассмотрим параболу $f(x) = 3x(15 - x)$. Максимальное значение в целочисленной точке достигается, когда эта точка ближе всех к вершине параболы, то есть при $x = 7$ или $x = 8$. Количество очков при этом равно $3 \cdot 7 \cdot 8 = 168$. □

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $\pm$ Решение сведено к нахождению максимума функции $3x(15 - x)$ — 5 баллов.
- $\mp$ Доказано, что (в случае наибольшего количества очков) можно все красные карточки заменить на желтые — 3 балла.
- $-.$ Верный ответ без обоснования максимальности (или с неверным обоснованием) — 1 балл.
- $-$ Верный ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.

3. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

Ответ: $(3, 5)$ и $(5, 3)$.

Равенство $p^2 + pq + q^2 = a^2$, подразумеваемое в условии задачи, перепишем следующим образом

$$pq = (p + q)^2 - a^2 = (p + q - a)(p + q + a)\,.$$

Поскольку сомножитель $p+q+a$ в правой части больше и чем p, и чем q, то, используя простоту чисел p и q, выводим, что $p+q-a=1$ и $p+q+a=pq$. Складывая полученные равенства, заключаем, что $2(p+q)=pq+1$. Последнее уравнение переписывается в виде

$$(p-2)(q-2)=3\,,$$

откуда получаем две пары решений: $(p,q)=(3,5)$ и $(p,q)=(5,3)$. $\square$

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

+. Арифметическая ошибка в финале решения, не влияющая на его суть, но, возможно, искажающая ответ — 6 баллов.

± Задача сведена к решению уравнения $pq-2(p+q)+1=0$ или равносильного, но дальнейших продвижений нет — 4 балла.

∓ Условие переписано в виде $pq=(p+q-a)(p+q+a)$, а дальнейших продвижений нет — 2 балла.

−. Верный ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) — 1 балл.

Не проверено, что ответы подходят — баллы не снижаются.

Выписана только одна пара чисел вместо двух — баллы не снижаются.

4. В треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка D, а на стороне BC точка E так, что выполняются соотношения $CD=AB$, $BE=BD$, $AB\cdot AC=BC^2$. Найдите $\angle DEA$, если известно, что $\angle DBC=40^\circ$.

Ответ: 30°.

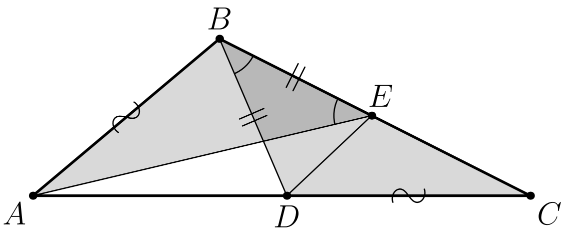


Рис. 4: к решению задачи 4.

Рис. 4. Рассмотрим треугольники BCD и ACB. У них общий угол C и верно соотношение $BC/DC=BC/BA=AC/BC$. Следовательно, треугольники подобны, и $\angle ABC=\angle BDC$. Теперь обратимся к треугольникам BDC и EBA. Как мы только что проверили, в них есть равные углы; более того, по условию в них есть пары равных сторон $BE=DB$ и $BA=DC$. Значит, треугольники равны, и $\angle BEA=\angle DBC=40^\circ$. При этом из равнобедренности треугольника BED следует равенство $\angle BED=(180^\circ-40^\circ)/2=70^\circ$. Искомый угол DEA находим по формуле

$$\angle DEA=\angle BED-\angle BEA=70^\circ-40^\circ=30^\circ\,.\quad\square$$

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

−. Указано на подобие треугольников ABC и BDC — 1 балл.

5. В нижней строке прямоугольника 2×2018 размещены 2018 фишек, занумерованных числами $1,2,\ldots,2018$ слева направо. За одну операцию разрешается передвинуть любую фишку в соседнюю по стороне пустую клетку. Какое наименьшее количество операций требуется для того, чтобы разместить фишки в нижней строке в обратном порядке?

Ответ: $2\cdot2017+2\cdot1009^2=2040196$.

Оценка. Заметим, что в любой паре фишек есть как минимум одна, которая поднимается в верхнюю строку, иначе они никак не смогли бы поменяться местами. Поднявшись в верхнюю строку, фишка должна когда-то спуститься обратно. Таким образом, есть как минимум $2 \cdot 2017$ вертикальных ходов. Далее, каждая из фишек с номерами k и $2019 - k$ ($k = 1, 2, \ldots, 1009$) должна совершить как минимум $(2019 - 2k)$ горизонтальных перемещений. Таким образом, количество операций должно быть не меньше чем

$$2 \cdot 2017 + 2(2017 + 2015 + \ldots + 1) = 2 \cdot 2017 + 2 \cdot 1009^2 = 2040196\,.$$

Пример. Для того чтобы справиться за указанное количество операций можно действовать, например, следующим образом. С фишками с номерами от 1 до 1009 проделываем по-очереди следующие операции: поднимаем в верхнюю строку и задвигаем в крайне правое из возможных положений. Далее, фишки с номерами от 1010 до 2017 двигаем по-очереди налево до позиций, которые они должны занять в окончательной расстановке и сдвигаем их наверх. После этого передвигаем фишку с номером 2018 в крайнее левое положение в нижней строке. После чего все фишки с 1 по 2017 сдвигаем вниз. В результате, все фишки кроме 2018 сдвигались один раз наверх и один раз вниз. Кроме того, все фишки по горизонтали пропутешествовали наименьшее возможное количество ходов. Это соответствует приведенной выше оценке. □

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $+.$ В логически верном решении из-за арифметических ошибок получился неправильный ответ — 6 баллов.
- $\pm$ Приведен любой верный *пример* перестановки фишек за минимальное количество ходов, но оценки нет — 3 балла.
- $\mp$ Доказана нижняя *оценка* на количество ходов, но нет алгоритма, переставляющего фишки за указанное число ходов — 3 балла.
- $-.$ Только верный ответ и больше ничего — 1 балл.
- $-.$ Замечено, что для любых двух фишек одна из них должна была сделать вертикальных ход, но оценка на число ходов не получена — 1 балл. Этот балл может суммироваться с баллами за пример или за ответ.

9 класс

1. Приведите пример натурального числа n, которое представляется в виде разности квадратов натуральных чисел ровно 2018 способами.

Один из возможных примеров — $n = 5^{2\cdot2018}$. Действительно, равенство $(a-b)(a+b) = 5^{2\cdot2018}$ с натуральными a и b равносильно тому, что $a-b = 5^k$ и $a+b = 5^{2\cdot2018-k}$ при некотором $k = 0, 1, \ldots, 2017$. Для каждого указанного k эта система имеет единственное решение $a = \dfrac{5^{2\cdot2018-k}+5^k}{2}$, $b = \dfrac{5^{2\cdot2018-k}-5^k}{2}$. В результате получаем ровно 2018 решений. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

± Верная идея примера, но допущена арифметическая ошибка (например, получается 2017 решений вместо 2018) — 5 баллов.

2. Петя и Вася загадали по два действительных числа и сообщили их Маше. Оказалось, что сумма чисел, загаданных Петей, равна произведению чисел, загаданных Васей, и что произведение чисел, загаданных Петей, равно сумме чисел, загаданных Васей. Маша прибавила ко всем четырем числам по единице и перемножила. Мог ли у Маши получиться отрицательный результат?

Ответ: нет.

Обозначим числа Пети через a и b, числа Васи — через c и d. По условию $a+b = cd$ и $ab = c+d$. Верна цепочка соотношений

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = (ab+a+b+1)(cd+c+d+1) = \\ = (ab+cd+1)^2 \geqslant 0\,.$$

Таким образом, Маша не могла получить отрицательный результат. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

− Переформулировка задачи в алгебраической форме (без дальнейших продвижений) — не оценивается (0 баллов).

3. Вычислите значение выражения

$$\frac{(3^4+4)\cdot(7^4+4)\cdot(11^4+4)\cdot\ldots\cdot(2015^4+4)\cdot(2019^4+4)}{(1^4+4)\cdot(5^4+4)\cdot(9^4+4)\cdot\ldots\cdot(2013^4+4)\cdot(2017^4+4)}\,.$$

Ответ: $2020^2+1 = 4080401$.

Воспользуемся формулой

$$a^4+4 = a^4+4a^2+4-4a^2 = (a^2+2)^2-(2a)^2 = \\ = (a^2-2a+2)(a^2+2a+2) = \big((a-1)^2+1\big)\big((a+1)^2+1\big)\,.$$

Теперь выражение в числителе искомой дроби записывается в виде произведения

$$(2^2+1)\cdot(4^2+1)\cdot(6^2+1)\cdot\ldots\cdot(2018^2+1)\cdot(2020^2+1)\,,$$

в то время как выражение в знаменателе записывается

$$(0^2+1)\cdot(2^2+1)\cdot(4^2+1)\cdot\ldots\cdot(2016^2+1)\cdot(2018^2+1)\,.$$

Сокращая общие множители в числителе и в знаменателе, приходим к ответу. □

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $\pm$ Арифметическая ошибка при верной идее решения — 6 баллов.
- $\mp$ В решении присутствует идея разложения $a^4 + 4$ на множители, дальнейших продвижений нет — 2 балла.
- $-$ Задача сведена к некоторому бесконечному произведению или сумме — не считается продвижением (0 баллов).

4. В остроугольном треугольнике ABC через вершину A проведена прямая ℓ, перпендикулярная медиане, выходящей из вершины A. Продолжения высот BD и CE треугольника пересекают прямую ℓ в точках M и N. Докажите, что $AM = AN$.

Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ и $\overrightarrow{AN} = \vec{v}$. Прямая MN перпендикулярна медиане, следовательно,

$$\vec{u} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0\,.$$

С другой стороны, $BM \perp AC$ и $CN \perp AB$, поэтому

$$(\vec{b} - \vec{u}) \cdot \vec{c} = (\vec{v} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0\,.$$

Складывая три полученных равенства выводим

$$(\vec{u} + \vec{v})\vec{b} = 0\,,$$

что возможно только если вектор $\vec{u} + \vec{v}$ нулевой, поскольку прямая MN не перпендикулярна стороне AB. Это обеспечивает равенство $AM = AN$.

Другое решение. Обозначим середину отрезка BC за T. Отразим точки C и N относительно A,

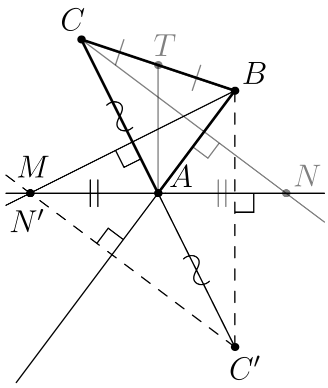


Рис. 5: к решению задачи 4.

то есть построим точки C' и N' такие, что A является серединой отрезков CC' и NN' (рис. 5). Ясно, что $C'N' \parallel CN$, что означает $C'N' \perp BA$. С другой стороны, $BM \perp C'A$, так как $C'A$ и CA — это одна и та же прямая. Наконец, отметим, что $\ell \perp C'B$: это следует из того, что ℓ перпендикулярна AT, а AT — средняя линия в треугольнике CBA', то есть $AT \parallel BC'$.

Осталось воспользоваться тем, что высоты ℓ, BM и $C'N'$ треугольника ABC' пересекаются в одной точке. Это означает, что N' совпадает с M, то есть $AM = AN' = AN$. $\square$

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $-.$ Сделано дополнительное построение: одна из вершин B, C отражена относительно точки A — 1 балл.

5. Натуральные числа 1, 2, …, 64 записаны в клетках таблицы 8×8 так, что для всех $k = 1, 2, 3, \ldots, 63$ числа k и $k+1$ находятся в соседних по стороне клетках. Каково максимальное значение возможной суммы чисел на главной диагонали?

Ответ: 432.

Оценка. Раскрасим клетки таблицы в шахматном порядке так, чтобы клетки на выбранной главной диагонали были белыми. Не умаляя общности, можно считать, что единица стоит не выше диагонали. Найдем максимальное значение наименьшего числа, попавшего на диагональ. Поскольку соседние числа стоят в клетках разного цвета, а белых клеток под диагональю находится всего 12, то одно из чисел от 1 до 26 обязательно попадает на диагональ. Остальные числа на диагонали гарантированно имеют одну четность, поэтому их сумма не превосходит суммы четных чисел от 52 до 64. В итоге заключаем, что для суммы чисел на диагонали есть оценка сверху:

$$26 + 52 + 54 + 56 + 58 + 60 + 62 + 64 = 432\,.$$

Пример подходящей расстановки чисел изображен на рис. 6. □

52	51	50	49	44	43	34	33
53	54	55	48	45	42	35	32
6	7	56	47	46	41	36	31
5	8	57	58	59	40	37	30
4	9	16	17	60	39	38	29
3	10	15	18	61	62	63	28
2	11	14	19	22	23	64	27
1	12	13	20	21	24	25	26

Рис. 6: к решению задачи 5.

Критерии

$+$ Верное решение — 7 баллов.

$\pm$ Доказана верная *оценка* сверху на сумму чисел на диагонали — 4 балла.

$\mp$ Приведен верный *пример* расстановки с максимальной суммой чисел на диагонали — 3 балла.

$-.$ Верный ответ без дальнейших продвижений — 1 балл.

10 класс

1. Приведите пример натурального числа n, которое представляется в виде разности квадратов натуральных чисел ровно 2018 способами.

См. решение и критерии задачи 9.1. □

2. Квадратные трехчлены $P(x) = x^2 + \frac{x}{2} + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ с вещественными коэффициентами таковы, что $P(x)Q(x) = Q(P(x))$ для всех x. Найдите все вещественные корни уравнения $P(Q(x)) = 0$.

Ответ: $x \in \{-1, \frac{1}{2}\}$.

В уравнении $P(x)Q(x) = Q(P(x))$ раскроем скобки и приравняем коэффициенты при всех степенях. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} c + \dfrac{1}{2} = 1 \\ d + b + \dfrac{c}{2} = \dfrac{1}{4} + 2b + c \\ \dfrac{d}{2} + bc = b + \dfrac{c}{2} \\ bd = bc + b^2 + d \end{cases}$$

единственное решение которой $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = 0$. Тогда трехчлен $P(x)$ можно представить в виде $P(x) = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = (x+1)(x-\frac{1}{2})$. Далее, уравнение $P(Q(x)) = 0 = (Q(x)+1)(Q(x)-\frac{1}{2})$ сводится к тому, что либо $Q(x) = -1$, либо $Q(x) = \frac{1}{2}$, первое из которых не имеет решений, а второе имеет два решения $x \in \{-1, \frac{1}{2}\}$.

Другое решение. Заметим, что по теореме Безу многочлен $Q(P(x)) - Q(0)$ делится на многочлен $P(x)$, следовательно, в силу условия, $Q(0)$ делится на $P(x)$ как многочлен, что возможно только если $d = Q(0) = 0$. В этом случае $Q(P(x)) = P(x)(P(x)+c)$, и значит $P(x) + c = Q(x)$, откуда выводим равенства $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$. После нахождения неизвестных коэффициентов решение заканчивается так же, как первое. □

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $\pm$ Верно найдены все коэффициенты a, b, c, но в решении уравнений $P(y) = 0$ или $Q(x) = y$ допущены арифметические ошибки — 5 баллов.
- $\mp$ Верными рассуждениями найдены два из коэффициентов b, c, d — 3 балла.
- $-.$ Верными рассуждениями найден один из коэффициентов b, c, d — 1 балл.

3. Существует ли набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{99}$ такой, что каждое из них равно $\sqrt{2}+1$ или $\sqrt{2}-1$ и выполняется равенство

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{98}x_{99} + x_{99}x_1 = 199?$$

Ответ: нет, не существует.

Предположим противное: пусть такой набор чисел существует. Заметим, что произведение соседних чисел может принимать значения 1 (если они разные), $3+2\sqrt{2}$ (если оба равны $1+\sqrt{2}$) и $3-2\sqrt{2}$ (если оба равны $1-\sqrt{2}$). Обозначим количество пар соседних чисел с произведением $3+2\sqrt{2}$ через m, с произведением $3-2\sqrt{2}$ — через n. Тогда пар соседних чисел чисел с произведением 1 ровно $99-m-n$. Получаем соотношения

$$(99-m-n) + m\cdot(3+2\sqrt{2}) + n\cdot(3-2\sqrt{2}) = 199\,,$$

из которого перегруппировкой слагаемых выводим

$$(m-n)\cdot 2\sqrt{2} = 100 - 2m - 2n\,.$$

В силу иррациональности числа $\sqrt{2}$ последнее соотношение может быть выполнено только при $m = n = 25$. Получается, что ровно 49 пар соседних чисел состояли из разных чисел. Но при расстановке двух типов чисел по кругу количество пар соседних чисел разного типа всегда четно, так как при обходе круга пары типа $(1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$ чередуются с парами типа $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$. Противоречие. $\square$

Критерии

$+$ Полное верное решение — 7 баллов.

$\mp$ Посчитано необходимое число пар каждого типа, но противоречие не получено — 2 балла.

4. Натуральные числа 1, 2, …, 64 записаны в клетках таблицы 8×8 так, что для всех $k = 1, 2, 3, \dots, 63$ числа k и $k+1$ находятся в соседних по стороне клетках. Каково максимальное значение возможной суммы чисел на главной диагонали?

См. решение и критерии задачи 9.5. $\square$

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Точка I_A — центр вневписанной со стороны BC окружности треугольника ABC, а точки K и L — середины отрезков DI_A и EI_A соответственно. Прямые BK и CL пересекаются в точке F, лежащей внутри угла BAC. Найдите $\angle BFC$, если $\angle BAC = 50°$. (*Вневписанная окружность* касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC за точки B и C соответственно.)

Ответ: $130°$.

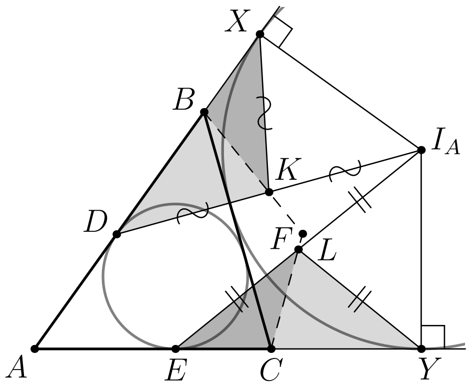


Рис. 7: к решению задачи 5.

Обозначим через X и Y точки касания вневписанной окружности со стороны BC с продолжениями сторон AB и AC соответственно (рис. 7). Прямоугольные треугольники DXI_A и EYI_A симметричны относительно биссектрисы угла A, следовательно, равны и равнобедренные треугольники DKX и YLE. При этом у них на основаниях отмечены точки B и C такие, что $BD = CY = p - b$, где p — полупериметр треугольника ABC, а b — длина стороны AC. В итоге заключаем, что $\angle KBD = \angle LCY$ и, тем самым, четырехугольник $ABFC$ является вписанным. Это приводит к соотношению $\angle BFC = 180° - \angle BAC = 130°$. $\square$

Критерии

$+$ Верное решение — 7 баллов.

11 класс

1. Найдите все вещественные числа x, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5},$$

где через $[x]$ обозначена целая часть числа x (то есть наибольшее целое число, не превосходящее x), а $\{x\} = x - [x]$.

Ответ: $x = 2\frac{7}{20}, 3\frac{1}{10}, 1\frac{14}{15}$.

Ясно, что $x \geqslant 1$, так как иначе левая часть уравнения отрицательна или не определена.

Обозначим $[x]$ через m; тогда $[2x] = 2m$, если $\{x\} \in [0, 1/2)$, и $[2x] = 2m + 1$, если $\{x\} \in [1/2, 1)$.

В первом случае получаем, что

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5} \in \left[\frac{2}{5}, \frac{9}{10}\right),$$

откуда $\frac{1}{m} \in \left[\frac{4}{15}, \frac{3}{5}\right)$, $m \in \left(\frac{5}{3}, \frac{15}{4}\right]$, то есть $m \in \{2, 3\}$, что приводит к решениям $x = 2\frac{7}{20}, 3\frac{1}{10}$.

Во втором случае получаем условие

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2m+1} = \frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5} \in \left[\frac{9}{10}, \frac{7}{5}\right),$$

которому удовлетворяет только $m = 1$, так при $m \geqslant 2$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2m+1} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}.$$

Значение $m = 1$ приводит нас к последнему решению $x = 1\frac{14}{15}$. □

Критерии

$+$ Верное решение — 7 баллов.

$+.$ В логически верном решении из-за арифметических ошибок корни найдены неправильно, потерян один из корней или присутствуют лишние корни — снимается 1 балл за каждую из перечисленных ошибок, суммарный штраф не может превосходить 3 баллов.

$\pm$ В решении предполагается, что всегда $2[x] = [2x]$, за каждый потерянный корень снимается 1 балл. При этом за каждую дополнительную арифметическую ошибку снимается 1 балл, суммарный штраф не может превосходить 2 баллов.

$\mp$ Значение $[x]$ ограничено сверху небольшим числом, и тем самым задача сведена к конечному перебору значений $[x]$ и $[2x]$, а дальнейшие продвижения несущественны — 2 балла.

$\mp$ Задача решена методом перебора без обоснования — 2 балла. За каждый неверный корень -1 балл.

2. Вершины правильного 100-угольника раскрашены случайным образом в два цвета: 50 вершин — в белый цвет, 50 — в черный. Докажите, что можно разбить все вершины на 25 групп по 4 вершины так, чтобы в каждой группе было по две вершины каждого цвета, и вершины каждой группы являлись вершинами некоторого прямоугольника.

Будем обозначать черные и белые вершины буквами ч и б соответственно. Рассмотрим 50 пар диаметрально противоположных вершин исходного 100-угольника. Среди этих пар несколько (скажем, n) имеют тип б–б, несколько — ч–ч, и несколько — б–ч. Поскольку черных и белых вершин поровну, то пар ч–ч столько же, сколько пар б–б. Каждую пару ч–ч объединим с некоторой парой б–б, получим n групп по четыре вершины. Оставшиеся $50 - 2n$ пар вершин типа б–ч также объединим по две пары в группу. Каждая из 25 построенных групп содержит по две вершины каждого цвета, и эти четыре вершины располагаются на двух диаметрах описанной окружности исходного многоугольника, то есть являются вершинами прямоугольника. □

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $\pm$ Не доказано, что 2 пары диаметрально противоположных точек образуют прямоугольник — 5 баллов.
- $\pm$ Не доказано, что для каждой пары (б–б, б–ч или ч–ч) можно выбрать другую пару так, что они образуют прямоугольник, для которых выполняется условие — 4 балла.
- $\mp$ Присутствует идея формирования групп по четыре вершины из пар диаметрально противоположных вершин, других существенных продвижений нет — 2 балла.
- $-$ Разбиение на группы построено лишь для конкретной раскраски вершин в два цвета — 0 баллов.

3. Приведите пример натуральных чисел a и b таких, что

$$\frac{a^2+a+1}{b^2+b+1} = 2018^2 + 2018 + 1\,.$$

Для любого числа n можно записать равенство

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)\,. \tag{*}$$

Но тогда

$$n^2+n+1 = \frac{n^4+n^2+1}{n^2-n+1} = \frac{(n^2)^2+(n^2)+1}{(n-1)^2+(n-1)+1}\,,$$

что и дает требуемый пример: можно положить $a = 2018^2$, $b = 2017$.

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно получить иную пару чисел, удовлетворяющих условию: $a = 2019^2$, $b = 2019$. □

Критерии

$+$ Указана подходящая пара чисел a, b — 7 баллов.

$\mp$ Записано тождество (*), дальнейших продвижений нет — 2 балла.

4. У Васи есть калькулятор с двумя кнопками, на экране которого отображается целое число x. Нажатие на первую кнопку заменяет число x на экране на число $[x/2]$, а нажатие на вторую кнопку заменяет число x на число $4x+1$. Вначале на экране калькулятора отображается число 0. Сколько натуральных чисел, не превосходящих числа 2018, можно получить последовательным нажатием кнопок? (Разрешается в процессе получать числа, большие 2018. Через $[y]$ обозначена целая часть числа y, то есть наибольшее целое число, не превосходящее y).

Ответ: 232.

Переведем число на экране калькулятора в двоичную систему счисления. Тогда операции, выполняемые при нажатии кнопок, есть не что иное, как стирание последней цифры числа и дописывание в конец числа комбинации цифр 01. Ясно, что таким образом можно получить любую комбинацию цифр, в которой не встречаются две единицы подряд.

Обозначим через S_k количество не более чем k-значных в двоичной системе чисел, не содержащих двух единиц подряд (для удобства будем дописывать нули в старшие разряды числа, чтобы цифр стало ровно k). Легко видеть, что $S_1 = 2$ (числа 0 и 1), $S_2 = 3$ (числа 00, 01 и 10).

Убедимся, что при всех $k \geqslant 1$ выполнено рекуррентное соотношение $S_{k+2} = S_{k+1} + S_k$. Действительно: все не более чем $(k+2)$-значные числа без двух единиц подряд либо оканчиваются на 0 (таких чисел ровно S_{k+1}), либо оканчиваются на 01 (таких ровно S_k), и значит $S_{k+2} = S_{k+1} + S_k$.

Выясним, сколько чисел, не превосходящих 11-значного числа $2018 = 11\,111\,100\,010_2$, не содержат двух единиц подряд. Заметим, что все 11-значные числа, большие 2018, точно содержат две единицы подряд, и поэтому достаточно посчитать $S_{11} = 233$ (что легко сделать, использовав доказанную выше рекуррентную формулу); после чего нужно откинуть комбинацию из всех нулей, которая не соответствует натуральному числу.

Замечание 1. На самом деле $S_k = F_{k+2}$, где F_k — последовательность Фибоначчи, определенная соотношениями $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$.

Замечание 2. В приведенном выше решении S_k — количество чисел, включая число 0. Если считать количество *натуральных* чисел, рекуррента примет вид $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k + 1$. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

+. В логически верном решении из-за арифметических ошибок получился другой ответ (неправильно посчитано S_{11}, забыли откинуть нулевую комбинацию) — 6 баллов.

± Доказана рекуррента вида $S_{k+2} = S_{k+1} + S_k$ или эквивалентная, дальнейших продвижений нет — 5 баллов.

∓ S_k найдены эмпирически, объяснениий нет — 1 балл.

− Только правильный ответ без каких-либо объяснений — 0 баллов.

5. Последовательность различных клеток $a_1, a_2, \ldots, a_k$ клетчатого квадрата $n \times n$ называется *циклом,* если, во-первых, $k \geqslant 4$ и, во-вторых, клетки a_j и a_{j+1} являются соседними по стороне при всех $j = 1, 2, \ldots, k$ (считаем при этом, что $a_{k+1} = a_1$). Множество X клеток квадрата назовем *разделяющим,* если в любом цикле есть хотя бы одна клетка из множества X. Найдите наименьшее вещественное число C такое, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ в квадрате $n \times n$ существует разделяющее множество из не более чем $C \cdot n^2$ клеток.

Ответ: $C = 1/3$.

Пример. Для построения примера разделяющего множества, в котором не более чем $n^2/3$ клеток, раскрасим все клетки в три цвета по диагоналям (рис. 8): первую диагональ — в первый цвет, вторую — во второй, третью — в третий, четвертую — опять в первый, и так далее. Любой цикл из клеток, как легко видеть, пересекает как минимум три соседних диагонали и, следовательно, содержит клетки всех трех цветов. Клеток одного из цветов будет не более $n^2/3$, и этот цвет можно использовать в качестве разделяющего множества.

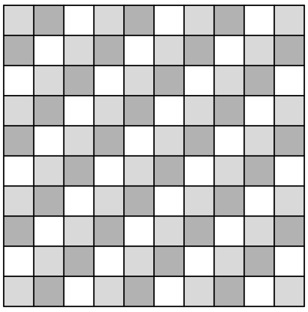


Рис. 8: к решению задачи 5.

Оценка. Покажем, что никакое $C < 1/3$ не подходит. Для этого построим граф, вершинами которого являются клетки. Две клетки соединим ребром, если они являются соседними. Получим граф, в котором n^2 вершин и $2n(n-1)$ ребер, при этом циклы задачи находятся во взаимно однозначном соответствии с циклами в графе. Требуется удалить несколько вершин так, чтобы в оставшемся графе не было циклов.

Предположим, мы удалили $k < C \cdot n^2$ вершин. Если в оставшемся графе нет циклов, то этот граф является объединением деревьев и в нем не более чем $n^2 - k - 1$ ребро. При этом из каждой удаленной вершины выходило не более 4 ребер, и всего было удалено было не более $4k$ ребер. Таким образом, имеем неравенство

$$2n(n-1) - 4k \leqslant n^2 - k - 1\,,$$

откуда $(n-1)^2/3 \leqslant k < C \cdot n^2$, что невозможно при $C < 1/3$ и достаточно большом n. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

± Доказано, что никакие $C < 1/3$ не подходят (т. е. оценка) — 5 баллов.

∓ Доказано, что $C = 1/3$ подходит (т. е. пример) — 2 балла.

− Правильный ответ без объяснений — 0 баллов.

6. Тетраэдр $ABCD$ с остроугольными гранями вписан в сферу с центром O. Прямая, проходящая через точку O перпендикулярно плоскости ABC, пересекает сферу в точке E такой, что D и E лежат по разные стороны относительно плоскости ABC. Прямая DE пересекает плоскость ABC в точке F, лежащей внутри треугольника ABC. Оказалось, что $\angle ADE = \angle BDE$, $AF \neq BF$ и $\angle AFB = 80°$. Найдите величину $\angle ACB$.

Ответ: $40°$.

Заметим, что точка E равноудалена от точек A, B, C, так ее проекция на плоскость ABC совпадает с проекций точки O на эту плоскость и является центром описанной окружности треугольника ABC.

Рассмотрим треугольники ADE и BDE. Они имеют пару равных сторон AE и BE, общую сторону DE и равные углы ADE и BDE. Из теоремы синусов следует, что эти треугольники либо равны, либо углы DAE и DBE дополняют друг друга до $180°$. Первая ситуация невозможна, так как в случае равенства треугольников ADE и BDE точки A и B равноудалены относительно любой точки на стороне DE, но по условию $AF \neq BF$. Значит, $\angle DAE + \angle DBE = 180°$.

Рассмотрим точку X пересечения луча AF со сферой Ω, описанной около тетраэдра $ABCD$. Заметим, что луч AF лежит в плоскостях ABC и AED, а значит точка X лежит на описанных окружностях треугольников ABC и AED. Точка E равноудалена относительно всех точек описанной окружности треугольника ABC; в частности, $AE = XE$. Из вписанности четырехугольника $AEXD$ следует, что $\angle DAE + \angle DXE = 180°$. Раз $AE = XE$, то E — середина дуги AX описанной окружности треугольника ADE, и значит $\angle ADE = \angle XDE$.

Используя выведенные ранее равенства углов, заключаем, что треугольники DBE и DXE равны по второму признаку: $\angle DBE = 180° - \angle DAE = \angle DXE$, $\angle XDE = \angle ADE = \angle BDE$, сторона DE — общая. Раз треугольники DBE и DXE равны, то вершины B и X равноудалены относительно любой точки на стороне DE; в частности, $BF = FX$.

Осталось посчитать углы в плоскости ABC. Последовательно используя вписанность четырехугольника $ABXC$, равнобедренность треугольника BFX и теорему о внешнем угле для треугольника BFX, пишем

$$\angle ACB = \angle AXB = \frac{1}{2} \cdot (\angle FXB + \angle FBX) = \frac{1}{2} \cdot \angle AFB = 40°\,.$$

Другое решение. Пусть луч AF пересекает сферу Ω, описанную около тетраэдра $ABCD$, в точке X. По построению точки E верно соотношение $EX = EA$, которое влечет за собой равенство $\angle ADE = \angle EAF$. Аналогичными рассуждениями получаем, что $\angle BDE = \angle EBF$, и, следовательно, $\angle EAF = \angle EBF$.

Обозначим точку пересечения прямой OE с плоскостью ABC, являющуюся центром описанной окружности треугольника ABC, через O_1. Тогда $\angle O_1AE = \angle O_1BE$.

Рассмотрим трехгранные углы AO_1EF и BO_1EF. В них совпадают плоские углы EAF и EBF, плоские углы O_1AE и O_1BE и двугранные углы при ребрах AO_1 и BO_1 прямые. Следовательно, соответствующие трехгранные углы равны. А значит равны и плоские углы $\angle FAO_1 = \angle FBO_1$. Отметим, что это равенство можно вывести и из теоремы косинусов для трехгранных углов.

Указанное равенство возможно в двух случаях: либо точка F лежит на серединном перпендикуляре к AB (точки A и B симметричны относительно FO_1), либо точка F лежит на описанной окружности треугольника ABO_1. Первый случай запрещен условием $AF \neq BF$, значит, имеет место второй. Тогда $\angle AOB = \angle AFB = 80°$ и является центральным для угла ACB в описанной окружности треугольника ACB. В результате заключаем, что $\angle ACB = 40°$. □

Критерии

Следующие пункты суммируются.

1. Доказано, что точка E равноудалена от точек A, B и C (+1 балл).
2. Доказано хотя бы одно из двух равенств (или оба) $\angle EAF = \angle EBF$, $\angle DAE + \angle DBE = 180°$ (+1 балл).

3. Доказано равенство $\angle ADE = \angle XDE$ (+1 балл).
4. Доказано равенство треугольников DBE и XDE (+1 балл).
5. Доказано равенство $BF = FX$ (+1 балл).
6. Получен правильный ответ (+2 балла).