Задача 1. Возвращаясь домой вместе с мамой, мальчик Петя решил подниматься по лестнице пешком, а его мама поехала на лифте. До 2 этажа он добрался на 2 секунды быстрее, но добежав до 6, он устал и дальше поднимался по лестнице с той же скоростью, что и лифт. На каком этаже живут Петя с мамой, если известно, что они добрались одновременно? Чтобы подняться на этаж, нужно преодолеть два пролета лестницы, а на переходы между пролетами мальчик тратил по одной секунде.

Решение:
Введем обозначения:
t_1 — время подъема мальчика на один этаж до k этажа, без учета задержки на поворотах.
t_2 — время подъема мальчика на один этаж после k этажа, без учета задержки на поворотах.
t_3 — время на один поворот.
t_4 – время, нужное лифту для подъема на 1 этаж.
Так как добрались они одновременно, то

$$(k-1)t_1 + (n-k)t_2 + (2n-3)t_3 = (n-1)t_4$$

Известно из условия задачи, что
$k = 6$,
$t_2 = t_4 = t$ — после 6 этажа мальчик поднимался с той же скоростью, что и лифт;
$t_3 = 1$ с — тратил на поворот 1 секунду;
$t_1 + t_3 = t_4 - 2$ — добрался до 2 этажа на 2 секунды быстрее, чем лифт.
Решая эту систему, находим n=9.

Ответ: на 9 этаже.

Критерии:
Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).
Правильно составлено уравнение для поиска n - 3 балла.
Ответ без обоснования - 0 баллов.
Арифметическая ошибка - минус 1 балл.

Задача 2. Вася нашел дома весы и решил поэкспериментировать. Он выяснил, что один баклажан и один кабачок весят столько же, сколько три картофелины и одна морковка, а два баклажана столько же, сколько четыре морковки и один кабачок. Оказалось также, что пять морковок весят больше чем кабачок и две картофелины, но меньше, чем два кабачка и одна картофелина. Сколько, по меньшей мере, ему надо взять баклажанов, чтобы перевесить картофелину, кабачок и две морковки?

Решение:

Составим систему, отвечающую условию задачи, обозначив массы баклажана, кабачка, картофелины и морковки как m_1, m_2, m_3, m_4.

$m_1 + m_2 = 3m_3 + m_4$

$2m_1 = 4m_4 + m_2$

$m_2 + 2m_3 < 5m_4 < 2m_2 + m_3$

Получаем, что $\frac{44}{15} < m_1 < \frac{37}{12}$, приняв массу морковки $m_4 = 1$.

Теперь будем проверять сколько баклажанов надо взять, чтобы $nm_1 > m_2 + m_3 + 2m_4$.

Если возьмем один, то получим $m_1 < \frac{11}{6}$ — не подходит.

Если возьмем 2, то получим $m_1 < \frac{11}{3}$ — подходит.

Ответ: 2 баклажана.

Критерии:

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Полностью составлена система уравнений и неравенств (+1).

Показано, что одного баклажана не хватит (+1).

Получен верный ответ, но не доказан (1).

Задача 3. Мальчик играл в ванной с солдатиками, переправляя их на прямоугольном деревянном плоту с одного берега на другой. Грузоподъемность плота равна массе четырех солдатиков. Скольких еще можно будет взять пассажиров, если приклеить к плоту мыльницу такого же размера? Плотность дерева взять 560 кг/м^3.

Решение:

Солдат получится переправить, если сила Архимеда, действующая на плот, больше массы плота и пассажиров. Условие, что грузоподъемность плота равна массе 4 солдатиков, можно записать как: $V\rho_0 = M + n_1 m$, где V — объем плота, ρ_0 — плотность воды, n_1 — число солдатиков, m — масса одного солдатика, M – масса плота. Приклеив мыльницу, мы увеличим объем нашего транспорта в два раза, и лишь незначительно увеличим его массу. Таким образом можно записать: $2V\rho_0 > M + n_2 m$, где n_2 — число пассажиров во втором случае. Учтем, что $M = V\rho_1$, получим $n_2 = 13$.

Ответ: 9 солдат.

Критерии:

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Правильно указаны силы, действующие в системе (+2).

Правильно записаны уравнения (+2).

Дан верный ответ (+1).

Задача 4. В цилиндр, заполненный водой, с площадью дна 80 см^2, вставили поршень с трубкой и соединили поршень с дном цилиндра пружиной жесткостью 30 Н/м. Через трубку в цилиндр долили еще воды, при этом пружина растянулась на 3 см. Сколько воды долили в цилиндр? Известно радиус трубки в 4 раза меньше радиуса цилиндра. Ответ укажите в см^3.

Решение:

Доливая воду в трубку мы увеличиваем давление в цилиндре, что и приводит к растяжению пружины. Обозначим через k – жесткость пружины, S – площадь поперечного сечения цилиндра, s — площадь поперечного сечения трубки, h_1, h_2 — высота столба воды в трубке до и после того как долили воду, x_1, x_2 — деформация пружины до и после того как долили воду.

Приравняем давление, которое оказывает поршень с пружиной на воду к гидростатическому давлению, получим $mg + kx_{1,2} = (S - s)pgh_{1,2}$.

Выразим объем воды, добавленной в систему как $V = (x_2 - x_1)S + (h_2 - h_1)s$.

Решая систему, находим V.

Ответ: 246 см^3.

Критерии:

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Правильно отмечены силы, действующие в системе, учтено гидростатическое давление (+2).

Правильно составлена система уравнений (+2).

Посчитан ответ (+1).

Ошибка в вычислении площади поршня (-1).

Задача 5. Двое ребят отправились в деревню. У одного из них есть велосипед на котором можно ехать со скоростью 24 км/ч, и на нем нельзя ехать вдвоем. За какое наименьшее время они оба будут в деревне, если скорость одного из них без велосипеда равна 5 км/ч, а второго 6 км/ч. Расстояние до деревни 60 км.

Решение :

Поскольку ребята не могут ехать на велосипеде вдвоем, чтобы существенно сократить время движения, им надо ехать на нем по очереди. Пусть один из них проехал первую часть пути длиной x на велосипеде со скоростью 24 км/ч а оставшуюся часть пути длиной $60 - x$ прошел со скоростью 6 км/ч тогда второй сначала шел со скоростью 5 км/ч а потом ехал на велосипеде. Чтобы как можно раньше добраться до деревни, надо найти такой x, при котором они прибыли туда одновременно:

$$\frac{x}{24} + \frac{60 - x}{6} = \frac{x}{5} + \frac{60 - x}{24},$$

откуда получим $x = 900/34$ км и потом найдем время движения.

Ответ : $t = 6,7$ ч.

Критерии :

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Предложен способ значительно сократить время пути для обоих ребят (+3).

Правильно составлены уравнения и получено наименьшее время движения (5).

Задача 1. В бочке с водой, диаметром 1 м, плавает льдина, которую за веревочку привязали ко дну. Когда льдина растаяла, то уровень воды в бочке изменился на 1 см. Найдите чему равнялась сила натяжения нити.

Решение:

Для решения задачи полезно рассмотреть случай, когда льдина не притянута ко дну бочки. В таком случае, когда льдина растает, уровень воды в бочке не изменится, т. к. сила Архимеда, действующая на льдину, равна массе воды в объеме V вытесненном льдиной, и льдина, растаяв, не изменит своей массы и займет ровно этот объем V. Если мы притянем льдину ко дну, то уровень воды в бочке повысится на уровень h, такой что $V_1 = hS$, где S – площадь поперечного сечения бочки, а $V_1 + V$ — объем льдины под водой. Силу натяжения нити найдем из условия, что льдина находиться в равновесии, т. е. равнодействующая сил, действующих на льдину равна нулю. $T = F_a - mg = (V + V_1)\rho g - V\rho g = V_1\rho g$.

Ответ: 78,5 Н.

Критерии:

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Показано, увеличится или уменьшится уровень воды (+1).

Показано что плотность и форма льдины не имеют значения (+2). Если задача решена в частном случае, баллы не засчитываются.

Получена верная формула и посчитан ответ (+2).

Задача 2. С помощью кипятильника воду объемом 2 литра нагрели с 80 до 90 $°C$ за 1 минуту. Затем его выключили, и еще через минуту вода остыла на $1°C$. Найдите мощность кипятильника.

Решение :

Рассмотрим указанную систему учитывая теплообмен между водой и кипятильником, а также между водой и окружающей средой. Для простоты можно считать мощность теплообмена с окружающей средой постоянной в пределах указанного диапазона температур. Когда воду нагревают, следует учесть подвод тепла от кипятильника N_1 и отвод тепла в окружающую среду N_0. $(N_1 - N_0)\tau = dt_1mc$, где $\tau = 1$ мин, $\Delta t_1 = 10$ $°C$ $m = 2$ кг $c = 4200$ Дж$\cdot°C$/кг. Когда кипятильник отключают, учитываются только потери тепла в окружающую среду. $N_0\tau = \Delta t_2mc$, где $\Delta t_2 = 1°C$.

Ответ : 1540 Дж/с.

Критерии :

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов.

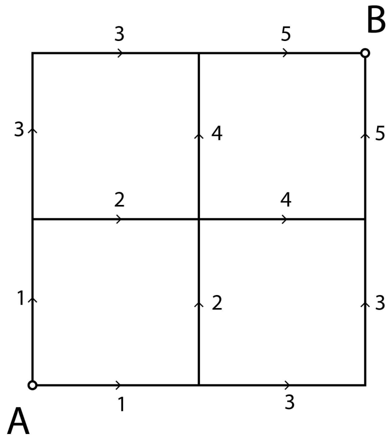
Сказано про мощность отвода тепла (+1).

Сказано, почему ее можно считать постоянной (+1).

Составлены уравнения (+2).

Посчитан ответ (+1).

Задача 3. В квадрате 2×2 соседние узлы соединены через резисторы с сопротивлением 1 Ом. Чему равно сопротивление между противоположными углами квадрата?



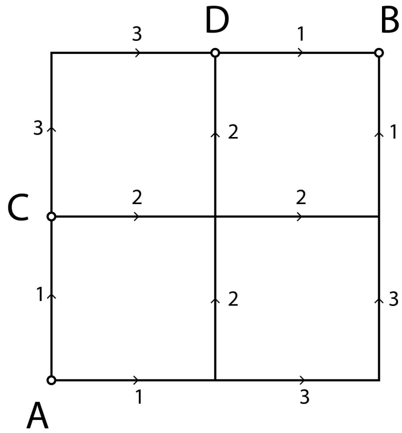


Рис. к задаче 3

Решение:
Выберем на схеме направление токов и отметим одинаковыми цифрами участки цепи по которым текут равные токи, учтя, что система симметрична относительно диагонали AB, и сопротивление все резисторов одинаково (см. рисунок). Если мы поменяем полярность, то направление всех токов измениться на противоположное, а абсолютное значение не измениться. Теперь повернем схему на 180^o и увидим, что она совпала с исходной, значит $I_1 = I_5$, $I_2 = I_4$. Рассмотрим чему равно падение напряжения между точками C и D. Т. к. падение напряжение не зависит от пути, то обязательно $I_2 = I_3$. Кроме того, из закона сохранения заряда известно, что сумма токов, которые втекают в некоторый узел, равно сумме токов которые из него вытекают, значит $I_2 = I_1/2$. Запишем чему равно падение напряжения между точками A и B, откуда найдем полное сопротивление цепи R_0.
$U_{AB} = R_0 I_0 = R_0 2 I_1$
$U_{AB} = RI_1 + RI_2 + RI_2 + RI_1 = 3RI_1$
Получаем $R_0 = 1,5R$.
Ответ: $1,5$ Ом.
Критерии:
Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).
Использована симметрия системы для упрощения схемы (+1 за способ).
Использован закон сохранения заряда (+1).
Отмечено, что что падение напряжения не зависит от пути (+1).
Обоснован верный ответ (5).

Задача 4. Двое ребят отправились в деревню. У одного из них есть велосипед на котором можно ехать со скоростью 28 км/ч, и на нем нельзя ехать вдвоем. За какое наименьшее время они оба будут в деревне, если скорость одного из них без велосипеда равна 8 км/ч, а второго 7 км/ч. Расстояние до деревни 80 км.

Решение :

Поскольку они не могут ехать на велосипеде вдвоем, чтобы существенно сократить время движения им надо ехать на нем по очереди. Пусть один из них проехал первую часть пути длиной x на велосипеде со скоростью 28 км/ч а оставшуюся часть пути длиной $80 - x$ прошел со скоростью 7 км/ч тогда второй сначала шел со скоростью 8 км/ч а потом ехал на велосипеде. Чтобы как можно раньше добраться до деревни, надо найти такой x, при котором они прибыли туда одновременно:

$$\frac{x}{28} + \frac{80 - x}{7} = \frac{x}{8} + \frac{80 - x}{28},$$

откуда получим $x = 480/11$ км и потом найдем время движения.

Ответ : $t = 6,8$ ч.

Критерии :

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Предложен способ значительно сократить время пути для обоих ребят (+3).

Правильно составлены уравнения и получено наименьшее время движения (5).

Задача 5. Прямоугольная тележка длиной $a = 8$ см и высотой $b = 6$ см съехала с горки, после чего ее колеса заклинило и тележку перевернуло. Как вы думаете, какой высоты была горка?

Решение :

Если тележка смогла перевернуться, значит она обладала для этого достаточной энергией, которую она набрала, скатившись с горки. Во время переворота центр тяжести тележки поднимается на высоту $h = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$. Минимальная энергия, необходимая для этого равна mgh, при которой в верхней точке переворота скорость тележки равна 0. Записав закон сохранения энергии получим, что высота горки $H > \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} - \frac{b}{2}$.

Ответ : 2 см.

Критерии :

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Показано, что задача решается из ЗСЭ (+1).

Указано, что минимальное значение высоты находится, если в верхней точке переворота скорость тележки равна 0 (+2).

Правильно выбрана верхняя точка (+1).

Дан верный ответ (+1).

Задача 1. Человек стреляет из пушки по мишени. На расстоянии 300 м от него стоит стенка высотой 120 м, за которой на расстоянии 100 м на земле стоит мишень. С какой скоростью ядро вылетит из пушки при удачном выстреле?

Решение:

Обозначим за l расстояние от стенки до мишени, за h высоту на котором пролетело ядро на расстоянии l до мишени. Известно, что тело в поле тяжести движется по параболе: $y = c - ax^2$, при этом точки (l, h) и $(2l, 0)$ принадлежат этой кривой. Находим, что $c = \frac{4}{3}h$. Начальную скорость v можно найти из теоремы Пифагора, зная проекции скорости на координатные оси. Из закона сохранения энергии найдем $v_y = \sqrt{2gc}$. Записав уравнения движения в проекции на оси x и y, найдем $v_x = l\sqrt{\frac{2g}{c}}$. Подставляя, находим:

$$v = \sqrt{\frac{l^2 3g}{2h} + \frac{8gh}{3}},$$

где $h > 120$ м – условие, что ядро пролетело выше стенки. Кроме того при $h = 120$ м скорость будет минимальна, т. к. в этом случае уже $v_x < v_y$.

Ответ: $v > 66,7$ м/с.

Критерии:

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Правильно записаны уравнения движения (+2).

Получено выражение для v и указано, что $h > 120$ м (+2).

Показано, что v – min, при $h = 120$ м (+1).

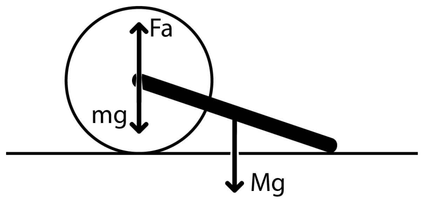


Рис. к задаче 3

Задача 2. В пруд закинули деревянный шар объема V, с тонкой железной ручкой длиной L. При какой минимальной массе ручки шар будет лежать на дне водоема? Плотности воды ρ_1 и дерева ρ_2 считайте известными.

Решение:
На деревянный шар в воде действует сила Архимеда и сила тяжести. Ручка тонкая, поэтому воздействием силы Архимеда на нее можно пренебречь. Чтобы найти условие при котором шар будет лежать на дне, требуется записать уравнение моментов: $gV(\rho_1 - \rho_2) = \frac{gM}{2}$.

Ответ: $M = 2V(\rho_1 - \rho_2)$.

Критерии:
Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).
Показано, что требуется написать уравнение моментов (+3).
Правильно отмечены силы, действующие на систему (+2).

Задача 3. В квадрате 3×3 соседние узлы соединены через резисторы с сопротивлением 1 Ом. Чему равно сопротивление между противоположными углами квадрата?

Решение:

Учитывая симметрию системы, можно существенно упростить данную схему. Во-первых, система симметрична относительно диагонали AB, во-вторых, поменяв полярность и развернув схему на 180^o, можно совместить ее саму с собой, в-третьих можно размыкать узлы, между которыми не течет ток. Полностью упрощенная схема требует только знания правил последовательного и параллельного соединения проводников.

Ответ: 13/7 Ом.

Критерии:

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Использована симметрия системы для упрощения схемы (+1 за способ).

Дан верный ответ (5).

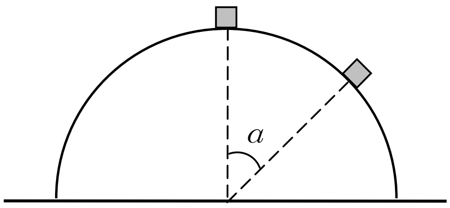
Задача 4. На полу лежит брусок, массой $m = 1$ кг соединенный первой пружиной, жесткостью $k = 10$ Н/м с неподвижной стенкой. На нем лежит второй такой же брусок, соединенный второй пружиной такой же жесткости, с ручкой. Сначала обе пружины расслаблены, и ручку начинают тянуть в направлении от стенки, медленно увеличивая силу, пока верхний брусок не двинется с нижнего. Приняв, что коэффициент трения между полом и бруском равен $\mu_1 = 0,1$, а между брусками равен $\mu_2 = 0,8$, постройте график $x_2(x_1)$, где x_1 — деформация первой пружины, x_2 — деформация второй пружины, и найдите площадь под графиком в см^2.

Решение:
Будем предполагать, что движение происходит равномерно, и настолько медленно, что можно пренебречь ускорением.
Пока $kx_2 < \mu_1 2mg$ бруски покоятся, только растягивается 2 пружина.
Когда $kx_2 > \mu_1 2mg$ оба бруска будут двигаться как целое, при этом $x_2 = x_1 + \frac{2mg\mu_1}{k}$.
Как только $kx_2 = mg\mu_2$, бруски станут двигаться относительно друг друга.
Ответ: $S = 3000$ см^2.
Критерии:
Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).
Правильно описано движение системы (+3).
Построен график (+1).
Рассчитан ответ (+1).

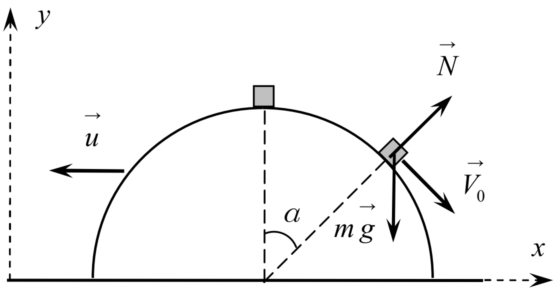
Задача 5. На наклонной плоскости покоятся два груза, соединенные стержнем. Найдите угол между стержнем и горизонтом, если $\alpha = 30^o$ а масса правого груза вдвое больше левого.

Решение:
Требуется записать уравнения Ньютона для каждого бруска в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси. Будем считать первым левый брусок, а правый вторым. Понадобятся уравнения:
$N_2 \cos\alpha = m_2 g + T \sin\beta$
$N_2 \sin\alpha = T \cos\beta$
$T \sin\beta = m_1 g$
Решая систему получаем: $tg\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{m_1}{m_1+m_2}$
Ответ: $30°$.
Критерии:
Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).
Правильно составлена система уравнений (+3).
Получена конечная формула или численный ответ (+2).

Задача 1. Маленький брусок начинает соскальзывать с вершины гладкой полусферы, стоящей на гладком горизонтальном столе, и в некоторой точке отрывается от неё. Центральный угол между радиусами полусферы, проведёнными к её вершине и к точке отрыва, равен $\alpha = \arccos(0,67)$. Найдите отношение x массы полусферы M к массе бруска m: $x = M/m$.



Возможное решение



Рассмотрим движение бруска и полусферы в инерциальной системе отсчёта, связанной со столом. Ось x направим вдоль стола, ось y вертикально вверх. Так как между полусферой и столом нет трения, то горизонтальная составляющая полного импульса сохраняется:

$$-Mu + mV_x = 0\,.$$

Здесь $\vec{u}$ и $\vec{V}$ — скорости полусферы и бруска относительно стола. По закону сложения скоростей имеем:

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{V_0}\,.$$

$\vec{V_0}$ — скорость бруска относительно полусферы; вектор $\vec{V_0}$ направлен по касательной к окружности, по которой движется брусок. Получаем:

$$V_x = -u + V_0 \cos\alpha\,,$$

$$-Mu - mu + mV_0\cos\alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad u = \frac{mV_0\cos\alpha}{M+m}\,.$$

Запишем второй закон Ньютона для бруска:

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}\,,$$

$\vec{a}$ — ускорение бруска относительно стола, $\vec{N}$ — сила нормальной реакции, действующая на брусок со стороны полусферы. По закону сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{w} + \vec{a_0}\,,$$

$\overrightarrow{w}$ — ускорение полусферы относительно стола, $\overrightarrow{a_0}$ — ускорение бруска относительно полусферы. Вектор $\overrightarrow{w}$ сонаправлен вектору скорости полусферы $\overrightarrow{u}$. Ускорение $\overrightarrow{w}$ опреляется горизонтальной составляющей силы давления бруска на полусферу. Так как эта сила равна $-\overrightarrow{N}$, то:

$$Mw = N\sin\alpha\,.$$

В момент отрыва имеем:

$$\overrightarrow{N} = 0\,, \quad \overrightarrow{w} = 0\,, \quad \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_0}\,,$$

$$m\overrightarrow{a_0} = m\overrightarrow{g} \quad \longrightarrow \quad \overrightarrow{a_0} = \overrightarrow{g}\,.$$

Составляющая ускорения $\overrightarrow{a_0}$, направленная вдоль радиуса полусферы, представляет собой центростремительное ускорение бруска. Получаем:

$$g\cos\alpha = \frac{V_0^2}{R} \quad \longrightarrow \quad V_0^2 = gR\cos\alpha\,,$$

R — радиус полусферы. Для того чтобы найти скорость V_0, запишем закон сохранения энергии:

$$mgR = mgR\cos\alpha + \frac{Mu^2}{2} + \frac{mV^2}{2}\,.$$

Горизонтальная составляющая скорости $\overrightarrow{V}$ была найдена выше. Для вертикальной составляющей имеем:

$$V_y = -V_0\sin\alpha\,.$$

Квадрат скорости равен:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 = (-u + V_0\cos\alpha)^2 + V_0^2\sin^2\alpha = u^2 - 2\,uV_0\cos\alpha + V_0^2\,.$$

Из закона сохранения энергии получаем:

$$2mgR\,(1-\cos\alpha) = (M+m)\,u^2 - 2m\,uV_0\cos\alpha + mV_0^2\,.$$

Далее воспользуемся найденными ранее выражениями для u и V_0:

$$2mgR\,(1-\cos\alpha) = (M+m)\cdot\frac{m^2V_0^2\cos^2\alpha}{(M+m)^2} - 2mV_0\cos\alpha\cdot\frac{mV_0\cos\alpha}{M+m} + mV_0^2\,,$$

$$2gR\,(1-\cos\alpha) = \frac{V_0^2}{M+m}\,(m\cos^2\alpha - 2m\cos^2\alpha + M + m)\,,$$

$$2gR\,(1-\cos\alpha) = \frac{gR\cos\alpha}{M+m}(-m\cos^2\alpha + M + m)\,,$$

$$2 - 2\cos\alpha = -\frac{m\cos^3\alpha}{M+m} + \cos\alpha\,,$$

$$\frac{m\cos^3\alpha}{M+m} = 3\cos\alpha - 2 \quad \longrightarrow \quad \frac{M+m}{m} = \frac{\cos^3\alpha}{3\cos\alpha - 2}\,.$$

Отсюда находим отношение масс $x = M/m$:

$$x + 1 = \frac{\cos^3\alpha}{3\cos\alpha - 2} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{\cos^3\alpha}{3\cos\alpha - 2} - 1 = 29$$

Ответ:

$$x = \frac{\cos^3\alpha}{3\cos\alpha - 2} - 1 = 29$$

Критерии оценивания

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Записан закон сохранения горизонтальной составляющей импульса (+1).

Записан второй закон Ньютона и закон сложения ускорений (+1).

Сформулировано условие отрыва и найдены ускорения бруска и полусферы в момент отрыва (+1).

Записан закон сохранения энергии (+1).

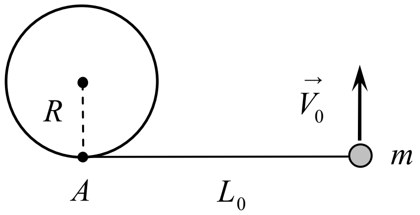
Получен правильный ответ (+1).

Задача 2. На гладкой горизонтальной поверхности неподвижно закреплён вертикальный столб радиуса $R = 20$ см. К точке A, лежащей на поверхности столба, прикреплён конец невесомой нерастяжимой нити длины $L_0 = 4$ м. К другому концу нити прикреплена маленькая шайба массы $m = 50$ г. В начальном положении шайба неподвижна, а нить направлена по касательной к окружности столба в точке A (см. вид сверху на рисунке). Шайбе сообщают скорость $V_0 = 2$ м/с, направленную перпендикулярно нити. В результате нить начинает наматываться на столб. Считая, что нить всё время остаётся горизонтальной, найдите следующие величины:

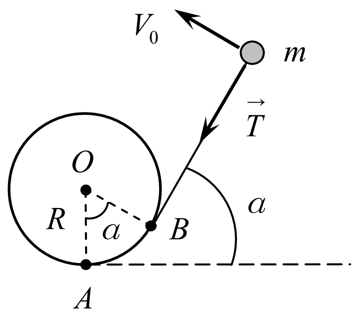
1. Число N оборотов нити вокруг столба к моменту, когда сила натяжения нити станет равна $T_0 = 0,1$ Н. Числовой ответ округлите до десятых.

2. Время τ, за которое нить сделает это число оборотов. Числовой ответ выразите в секундах.

Трение не учитывайте, шайбу считайте материальной точкой.



Возможное решение



Примем за начало отсчёта времени момент начала движения шайбы. Пусть в момент времени t нить касается столба в точке B и нить повернулась на угол α. Угол между радиусами OA и OB также равен α. Длина участка нити от точки B до шайбы равна:

$$L = L_0 - \alpha R.$$

Если не учитывать трение, то в горизонтальной плоскости на шайбу действует только сила натяжение нити $\vec{T}$. Работа этой силы равна нулю, поскольку направление её действия перпендикулярно скорости шайбы. Поэтому абсолютная величина скорости шайбы не меняется при движении. Так как мгновенная скорость точки B равна нулю, то можно считать, что в данный момент времени шайба вращается по окружности радиуса L с центром в точке B. Тогда сила натяжения нити сообщает шайбе центростремительное ускорение. По второму закону Ньютона имеем:

$$m \cdot \frac{V_0^2}{L} = T \quad \longrightarrow \quad \frac{mV_0^2}{L_0 - \alpha R} = T \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{R}\left(L_0 - \frac{mV_0^2}{T}\right).$$

Полагая $T = T_0$, находим соответствующий угол поворота нити:

$$\alpha_0 = \frac{1}{R}\left(L_0 - \frac{mV_0^2}{T_0}\right).$$

Число оборотов нити равно:

$$N = \frac{\alpha_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R}\left(L_0 - \frac{mV_0^2}{T_0}\right) = 1,6$$

Для того чтобы найти время τ поворота нити на угол α_0, разобьём промежуток $[0, \tau]$ на малые интервалы и перенумеруем их индексом k. Пусть за время от t_k до $t_k + \Delta t_k$ угол поворота нити увеличился от α_k до $\alpha_k + \Delta\alpha_k$. При этом шайба переместилась на малое расстояние $V_0 \Delta t_k$. Считая, что шайба двигалась по дуге окружности радиуса $L_k = L_0 - \alpha_k R$, то же расстояние можно записать в виде $L_k \Delta\alpha_k$:

$$V_0 \Delta t_k = L_k \Delta\alpha_k \quad \longrightarrow \quad V_0 \Delta t_k = (L_0 - \alpha_k R)\,\Delta\alpha_k.$$

Просуммируем все такие равенства:

$$\sum_k V_0 \Delta t_k = \sum_k (L_0 - \alpha_k R)\,\Delta\alpha_k,$$

$$V_0 \sum_k \Delta t_k = L_0 \sum_k \Delta\alpha_k - R\sum_k \alpha_k \Delta\alpha_k.$$

Входящие сюда суммы равны:

$$\sum_k \Delta t_k = \tau, \quad \sum_k \Delta\alpha_k = \alpha_0, \quad \sum_k \alpha_k \Delta\alpha_k = \frac{\alpha_0^2}{2}.$$

Последняя сумма вычисляется как площадь под графиком линейной функции $y(\alpha) = \alpha$ при изменении α от нуля до α_0. Окончательно получаем:

$$V_0 \tau = L_0 \alpha_0 - \frac{R\alpha_0^2}{2} = \frac{\alpha_0\,(2L_0 - R\alpha_0)}{2} = \frac{1}{2R}\left[L_0^2 - \left(\frac{mV_0^2}{T_0}\right)^2\right],$$

$$\tau = \frac{1}{2V_0 R}\left[L_0^2 - \left(\frac{mV_0^2}{T_0}\right)^2\right] = 15\ \text{с}$$

Ответ:

1.

$$N = \frac{1}{2\pi R}\left(L_0 - \frac{mV_0^2}{T_0}\right) = 1,6$$

2.

$$\tau = \frac{1}{2V_0 R}\left[L_0^2 - \left(\frac{mV_0^2}{T_0}\right)^2\right] = 15\ \text{с}$$

Критерии оценивания

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Правильно найдено число оборотов нити (+1).

Для нахождения времени движения использован метод разбиения на малые промежутки (+1).

Получена связь между длительностью промежутка и углом поворота (+1).

Правильно вычислены все необходимые суммы (+1).

Получен правильный ответ для времени движения (+1).

Задача 3. В закрытом горизонтальном цилиндре может без трения двигаться поршень, прикреплённый пружиной к правому торцу цилиндра. Слева от поршня находится гелий, справа — вакуум. В начальном состоянии поршень закреплён, пружина не деформирована, объём гелия $V_1 = 2$ л, температура $T_1 = 300$ К. Поршень отпускают, и через некоторое время система приходит в состояние механического и теплового равновесия, в котором объём гелия $V_2 = 3$ л. Считая, что стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, найдите температуру T_2 гелия в этом состоянии.

Возможное решение

Пусть a – начальная длина левой части цилиндра, x – сжатие пружины, k– жёсткость пружины, S – площадь поперечного сечения поршня, ν – число молей газа, P_1 и P_2 – начальное и конечное давления, R — универсальная газовая постоянная. Начальный и конечный объёмы газа равны:

$$V_1 = Sa\,, \quad V_2 = S\,(a+x)\,.$$

Рассмотрим баланс энергии для системы (газ + поршень):

$$\frac{3}{2}\,\nu R T_1 = \frac{3}{2}\,\nu R T_2 + \frac{kx^2}{2}\,.$$

В конечном состоянии имеем:

$$P_2 S = kx\,, \quad P_2 S\,(a+x) = \nu R T_2 \quad \longrightarrow \quad k = \frac{P_2 S}{x} = \frac{\nu R T_2}{x\,(a+x)}\,.$$

Подставляя это значение k в уравнение баланса энергии и сокращая на $\nu R/2$, получаем:

$$3T_1 = 3T_2 + \frac{T_2\, x}{(a+x)}\,.$$

Далее имеем:

$$\frac{x}{a+x} = \frac{Sx}{S\,(a+x)} = \frac{V_2 - V_1}{V_2}\,,$$

$$3T_1 = 3T_2 + T_2\,\frac{(\,V_2 - V_1\,)}{V_2} \quad \longrightarrow \quad T_1 = T_2\left(1 + \frac{V_2 - V_1}{3V_2}\right) = T_2\,\frac{(\,4V_2 - V_1\,)}{3V_2}\,.$$

Отсюда находим T_2:

$$T_2 = T_1\,\frac{3V_2}{(\,4V_2 - V_1\,)} = 270 \text{ К}$$

Ответ:

$$T_2 = T_1\,\frac{3V_2}{(\,4V_2 - V_1\,)} = 270 \text{ К}$$

Критерии оценивания

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Записано уравнение баланса энергии (+1).
Записано условие равновесия поршня в конечном состоянии (+1).
Записано уравнение состояния (+1).
Найдена жёсткость пружины (+1).
Получен правильный ответ (+1).

Задача 4. Плоский конденсатор состоит из трёх одинаковых тонких проводящих пластин, расположенных параллельно друг другу. Расстояние между левой и средней пластинами в два раза больше, чем между средней и правой. Конденсатор заряжают, присоединив левую пластину к положительному полюсу батареи, а правую к отрицательному. Найдите, на какую величину Δq изменится заряд конденсатора, если средней пластине сообщить заряд $q_0 = 1,8$ нКл. Числовой ответ выразите в нанокулонах. Краевыми эффектами пренебрегите.

Возможное решение

Обозначим через d расстояние между средней и правой пластинами. Тогда расстояние между между левой и средней пластинами равно $2d$. Пусть q_1 — заряд конденсатора в случае, когда средняя пластина не заряжена. Введём поверхностную плотность заряда на левой пластине:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S},$$

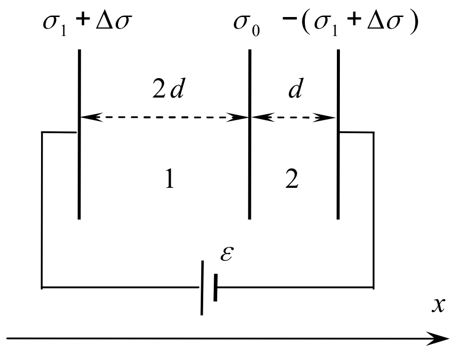
S — площадь пластин. Плотность заряда на правой пластине равна $-\sigma_1$. Направим ось x от левой пластины к правой. Вектор напряжённости электрического поля в конденсаторе направлен вдоль этой оси. Абсолютная величина напряжённости равна:

$$E = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0},$$

ϵ_0 — электрическая постоянная. Напряжение на конденсаторе равно ЭДС батареи ε. Связь между напряжением и напряжённостью поля определяется соотношением:

$$\varepsilon = 3dE \quad \longrightarrow \quad \varepsilon = \frac{3d\sigma_1}{\epsilon_0}.$$

Здесь $3d$ — расстояние между крайними пластинами.



Рассмотрим теперь случай, когда средняя пластина несёт заряд q_0. Введём плотность заряда на этой пластине:

$$\sigma_0 = \frac{q_0}{S}.$$

Плотность заряда на левой пластине запишем как $\sigma_1 + \Delta\sigma$. Тогда плотность заряда на правой пластине равна $-(\sigma_1 + \Delta\sigma)$. Назовём областью 1 часть конденсатора между левой и средней пластинами, областью 2 — часть между средней и правой. В этих областях проекции вектора напряжённости электрического поля на ось x равны:

$$E_{1x} = \frac{\sigma_1 + \Delta\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}, \quad E_{2x} = \frac{\sigma_1 + \Delta\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}.$$

Для напряжения имеем:

$$\varepsilon = 2dE_{1x} + dE_{2x} = \frac{d}{\epsilon_0}\left(2\sigma_1 + 2\Delta\sigma - \sigma_0 + \sigma_1 + \Delta\sigma + \frac{\sigma_0}{2}\right) = \frac{3d\sigma_1}{\epsilon_0} + \frac{d}{\epsilon_0}\left(3\Delta\sigma - \frac{\sigma_0}{2}\right) .$$

Используя соотношение $\varepsilon = 3d\sigma_1/\epsilon_0$, получаем:

$$\varepsilon = \varepsilon + \frac{d}{\epsilon_0}\left(3\Delta\sigma - \frac{\sigma_0}{2}\right) \quad \longrightarrow \quad 3\Delta\sigma - \frac{\sigma_0}{2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta\sigma = \frac{\sigma_0}{6} .$$

Изменение заряда конденсатора равно:

$$\Delta q = S\Delta\sigma = \frac{S\sigma_0}{6} = \frac{q_0}{6} = 0,3 \text{ нКл}$$

Ответ:

$$\Delta q = \frac{q_0}{6} = 0,3 \text{ нКл}$$

Критерии оценивания

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Записана связь между напряжённостью и напряжением на конденсаторе (+1).

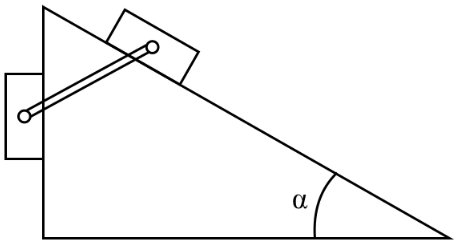
Записано выражение для напряжённости поля в левой области в случае заряженной средней пластины (+1).

Записано выражение для напряжённости поля в правой области (+1).

Записана связь между напряжённостями и напряжением (+1).

Получен правильный ответ (+1).

Задача 5. На наклонной плоскости покоятся два груза, соединенные стержнем (см. рисунок). Найдите угол между стержнем и горизонтом, если $\alpha = 30^\circ$, а масса правого груза втрое больше левого.



Возможное решение

Требуется записать уравнения Ньютона для каждого бруска в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси. Будем считать первым левый брусок, а правый вторым. Составим уравнения:
$N_2 \cos\alpha = m_2 g + T\sin\beta$
$N_2 \sin\alpha = T\cos\beta$
$T\sin\beta = m_1 g$
Решая систему получаем: $tg\beta = \frac{1}{tg\alpha}\frac{m_1}{m_1+m_2}$

Ответ: $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Критерии оценивания

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Правильно составлена система уравнений (+3).

Получена конечная формула или численный ответ (+2).

Задача 1. Два шарика, связанных легкой нитью, запускают с поверхности Земли с одинаковыми по модулю скоростями v_0 под разными углами: один шарик под углом $30°$ к горизонту, другой — $60°$.

1) Найдите максимальное расстояние между шариками.

2) Какие значения может принимать угол между нитью и горизонтом?

Нить считать всегда натянутой, силами упругости пренебречь.

Комментарий. В условии задачи не хватает уточнения, что шарики выпущены из одной точки, летят в одной плоскости в одну сторону. Шарик, который упадет первым, остаётся на поверхности Земли. Данное уточнение распространялось дополнительно, однако могут встречатся решения в иных предположениях. Такие решения будут оцениваться иначе, но исходя из 10 баллов за полностью правильное решение в предположениях участника.

Возможное решение

Поскольку в условии сказано, что силами упругости нити необходимо пренебречь, задача превращается в кинематическую, а нить представляет собой просто отрезок, соединяющий два шарика.

Запишем уравнения движения для шариков. Пусть первый шарик летит под углом $\alpha = 30°$, соответственно второй — под углом $\beta = 60°$.

$$\begin{cases} x_1(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ x_2(t) = v_0 \cos\beta \cdot t \\ y_1(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \\ y_2(t) = v_0 \sin\beta \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Расстояние между шариками определяется выражением:

$$L^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Подставляя выражения для координат шариков получим:

$$L^2 = (v_0 t)^2(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (v_0 t)^2(\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 2(v_0 t)^2(\sin\alpha - \cos\alpha)^2,$$

т.к. $\cos\alpha = \sin\beta, \sin\alpha = \cos\beta$.

Данное выражение монотонно возрастает по t, следовательно максимум может быть достугнут только на границе области определения данной функции. Это произойдет в момент, когда шарик, выпущенный по более пологой траектории (под углом $30°$ к горизонту), упадет на Землю. Обозанчим этот моент времени за τ

$$\tau = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

Подставляя значение в выражение для L^2 получим:

$$L_{max} = \frac{2\sqrt{2}v_0^2 \sin\alpha}{g}|\sin\alpha - \cos\alpha| = \frac{v_0^2}{g}(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}})$$

Для того, чтобы найти возможные значения выражения для угла между нитью и гризонтом (обозначим его за φ), посмотрим на выражение для L^2. Видно, что в процессе полета обоих шариков вериткальная и горизонтальная составляющая равны друг другу.

Это означает, что искомый угол равен $45°$. Когда первый шарик приземлится, второй продолжит лететь в ту же точку, куда упал первый (дальность полета, очевидно, одинаковая у обоих шариков). Соответственно нить будет представлять собой секущую параболы, по которой движется второй шарик, а угол будет возрастать. Когда второй шарик упадет, хорда превратится в касательную, следовательно угол между нитью и горизонтом будет равен углу, под которым второй шарик приземлится. Из симметрии параболы этот угол равен углу, под которым шарик запустили, т.е. $60°$.

$$\varphi \in [45°; 60°].$$

Критерии оценивания

1). Задача сведена к кинематической, записаны уравнения движения (+3 балла).

2). Записано выражение для расстояния между шариками (+1 балл).

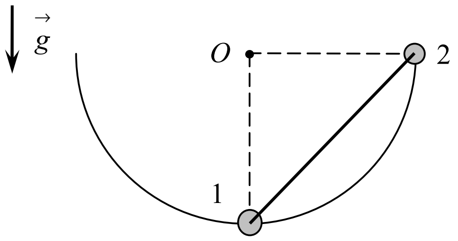
3). Определено условия максимума для расстояния между шариками (+1 балл).

4). Получен ответ для максимальго расстояния между шариками (+1 балл).

5). Получено выражение для угла между нитью и горизонтом во время полета обоих шариков, получена оценка снизу для этого угла (+2 балла).

6). Получена оценка сверху для угла между нитью и горизонтом (+2 балла).

Задача 2. Из тонкой проволоки согнута полуокружность с центром в точке O и радиусом $R = 0{,}5$ м. Полуокружность неподвижно закреплена в вертикальной плоскости. По проволоке могут скользить без трения маленькие бусинки 1 и 2, соединённые жёстким невесомым стержнем. Отношение масс бусинок $k = m_1/m_2 = 2$. При движении стержень может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к бусинкам. В начальном положении бусинки 1 и 2 находятся на концах вертикального и горизонтального радиусов. Стержень с бусинками отпускают без толчка. Найдите максимальную скорость V бусинки 1 при дальнейшем движении. Бусинки считайте материальными точками. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.



Возможное решение

Рассмотрим промежуточное положение системы, когда радиусы, проведённые из центра полуокружности к бусинкам, повернулись на угол φ относительно своих первоначальных положений. Скорости бусинок обозначим через V_1 и V_2. Отсчитывая высоты от центра полуокружности, запишем закон сохранения энергии:

$$-m_1 g R = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} - m_1 g R \cos\varphi - m_2 g R \sin\varphi$$

$$m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 = 2gR\,(\,m_1(\,\cos\varphi - 1\,) + m_2 \sin\varphi\,)$$

$$k\,V_1^2 + V_2^2 = 2gR\,(\,k\,(\,\cos\varphi - 1\,) + \sin\varphi\,)$$

Здесь R — радиус полуокружности, $k = m_1/m_2$. Так как длина стержня не меняется при движении, то проекции скоростей на направление стержня совпадают. Из простых геометрических соображений следует, что при любом значении угла φ скорости бусинок образуют со стержнем углы в 45°. Получаем:

$$V_1 \cos 45^\circ = V_2 \cos 45^\circ \quad \longrightarrow \quad V_1 = V_2$$

Исключая скорость V_2, находим V_1 как функцию угла φ:

$$(\,k+1\,)\,V_1^2 = 2gR\,(\,k\,(\,\cos\varphi - 1\,) + \sin\varphi\,) \quad \longrightarrow \quad V_1^2 = \frac{2gR}{k+1}\,f\,(\varphi)$$

Функция $f\,(\varphi)$ равна:

$$f\,(\varphi) = k\,(\,\cos\varphi - 1\,) + \sin\varphi = k\,\cos\varphi + \sin\varphi - k$$

Преобразуем эту функцию с помощью метода вспомогательного аргумента:

$$f\,(\varphi) = \sqrt{k^2+1}\,\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\,\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\,\sin\varphi\right) - k = \sqrt{k^2+1}\,\cos\,(\,\varphi - \varphi_0\,) - k$$

Вспомогательный аргумент φ_0 определяется двумя равенствами:

$$\sin\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\ ; \quad \cos\varphi_0 = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$$

Угол φ_0 лежит в первой четверти. Поэтому его можно выразить через арктангенс:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{1}{k} \quad \longrightarrow \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{1}{k}$$

Очевидно, что функция $f(\varphi)$ максимальна при $\varphi = \varphi_0$:

$$f(\varphi_0) = \sqrt{k^2+1} - k$$

Тогда максимальная скорость первой бусинки равна:

$$V = \sqrt{\frac{2gR}{k+1}\, f(\varphi_0)} = \sqrt{\frac{2\,gR\,(\sqrt{k^2+1} - k)}{k+1}} = 0{,}89 \text{ м/с}$$

Ответ также можно представить в виде, удобном для приближённого вычисления:

$$V = \sqrt{\frac{2\,gR}{(k+1)(\sqrt{k^2+1}+k)}}$$

Следует отметить, что угол φ_0 определяет положение равновесия системы. Действительно, приравнивая моменты сил тяжести относительно центра полуокружности, получаем:

$$m_1 gR\sin\varphi = m_2 gR\cos\varphi \quad \longrightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{k} \quad \longrightarrow \quad \varphi = \varphi_0$$

Поскольку бусинки совершают колебания около положения равновесия, можно сразу считать очевидным, что максимальные скорости достигаются в этом положении.

Ответ:

$$V = \sqrt{\frac{2\,gR\,(\sqrt{k^2+1} - k)}{k+1}} = \sqrt{\frac{2\,gR}{(k+1)(\sqrt{k^2+1}+k)}} = 0{,}89 \text{ м/с}$$

Критерии оценивания

1). Правильно получена конечная формула, нет логических ошибок, получен правильный численный ответ (10 баллов).

2). Содержится небольшая логическая ошибка, неверный/отсутствует численный ответ (9 баллов).

3). Все законы записаны правильно, найден верный угол отклонения шариков, но допущена ошибка в промежуточных вычислениях (7 баллов).

4). Записан закон сохранения энергии, доказано равенство скоростей, есть дальнейшие продвижения в решении, но ответ неправильный (5 баллов).

5). Верно записан закон сохранения энергии (4 балла).

6). Верно определен центр масс и/или доказано равенство скоростей (3 балла).

7). Представлено доказательство равенства скоростей (2 балла).

8). Записан второй закон Ньютона (1 балл).

Задача 3. Длинный горизонтальный цилиндр с одной стороны наглухо закрыт, а с другой открыт в окружающую среду. В цилиндре может двигаться без трения тяжёлый поршень. Между поршнем и закрытым торцом цилиндра находится идеальный одноатомный газ, занимающий объём $V_0 = 1{,}5$ л при внешнем давлении P_0. Внешнее давление мгновенно уменьшают до значения $P_1 = (1-\alpha)\,P_0$, где $\alpha = 0.2$, и поддерживают его постоянным до полной остановки поршня и перехода газа в новое состояние равновесия с давлением P_1. Далее внешнее давление скачком увеличивают до начального значения P_0 и поддерживают его постоянным до перехода газа в конечное равновесное состояние, в котором газ занимает некоторый объём V_K при давлении P_0. Считая, что стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, найдите разность объёмов $\Delta V = V_K - V_0$. Числовой ответ выразите в кубических сантиметрах.

Возможное решение

Рассмотрим переход газа из начального состояния 0 в промежуточное равновесное состояние 1. Параметры газа, относящиеся к этим состояниям, будем отмечать индексами 0 и 1. Запишем первое начало термодинамики:

$$0 = \frac{3}{2}\nu RT_1 - \frac{3}{2}\nu RT_0 + A_{01}\,,$$

R — универсальная газовая постоянная, ν – число молей газа, A_{01} — работа силы давления газа на поршень. Далее рассмотрим баланс энергии для поршня. Так как его механическая энергия не изменилась, то

$$0 = A_{01} + A'_{01}\,.$$

Здесь A'_{01} — работа силы внешнего давления:

$$A'_{01} = -P_1\,(V_1 - V_0)\,.$$

Эта работа отрицательна, поскольку сила внешнего давления действует против направления движения поршня при расширении газа. Используя также уравнение состояния газа

$$P_0V_0 = \nu RT_0\,, \quad P_1V_1 = \nu RT_1\,,$$

находим объём V_1:

$$A_{01} = -A'_{01} = P_1\,(V_1 - V_0)\,,$$

$$0 = \frac{3}{2}P_1V_1 - \frac{3}{2}P_0V_0 + P_1\,(V_1 - V_0) \quad\longrightarrow\quad 0 = 3P_1V_1 - 3P_0V_0 + 2P_1V_1 - 2P_1V_0\,,$$

$$5P_1V_1 = 3P_0V_0 + 2P_1V_0 \quad\longrightarrow\quad V_1 = \frac{V_0\,(3P_0 + 2P_1)}{5P_1} = \frac{V_0\,(5-2\alpha)}{5\,(1-\alpha)}\,.$$

Рассмотрим теперь переход газа из состояния 1 в конечное состояние. Параметры газа, относящиеся к конечному состоянию, будем отмечать индексом K. Запишем первое начало термодинамики:

$$0 = \frac{3}{2}\nu RT_K - \frac{3}{2}\nu RT_1 + A_{1K}\,,$$

A_{1K} — работа силы давления газа на поршень. Так как механическая энергия поршня не изменилась, то

$$0 = A_{1K} + A'_{1K}\,,$$

A'_{1K} — работа силы внешнего давления:

$$A'_{1K} = P_0\,(V_1 - V_K)\,.$$

В данном случае работа положительна, поскольку сила внешнего давления действует по направлению движения поршня при сжатии газа. Используя также соотношение

$$P_0 V_K = \nu R T_K$$

и полученное выше значение V_1, находим объём V_K:

$$A_{1K} = -A'_{1K} = -P_0\,(\,V_1 - V_K\,)\,,$$

$$0 = \frac{3}{2}\,P_0 V_K - \frac{3}{2}\,P_1 V_1 - P_0\,(\,V_1 - V_K\,) \quad \longrightarrow \quad 0 = 3P_0 V_K - 3P_1 V_1 - 2P_0 V_1 + 2P_0 V_K\,,$$

$$5P_0 V_K = 3P_1 V_1 + 2P_0 V_1 \quad \longrightarrow \quad V_K = \frac{V_1\,(\,3P_1 + 2P_0\,)}{5P_0} = \frac{V_0\,(\,5-2\alpha\,)\,(\,5-3\alpha\,)}{25\,(\,1-\alpha\,)}\,.$$

Разность конечного и начального объёмов равна:

$$\Delta V = V_K - V_0 = V_0\,\left[\,\frac{(\,5-2\alpha\,)\,(\,5-3\alpha\,)}{25\,(\,1-\alpha\,)} - 1\,\right] = \frac{6\,\alpha^2\,V_0}{25\,(\,1-\alpha\,)} = 18\ \text{см}^3$$

Ответ:

$$\Delta V = \frac{6\,\alpha^2\,V_0}{25\,(\,1-\alpha\,)} = 18\ \text{см}^3$$

Критерии оценивания

1. Записано первое начало термодинами для перехода из начального состояния в промежуточное (+2 балла).
2. Правильно вычислена работа газа для этого перехода с пояненииями к уравнению баланса энергии для поршня (+2 балла).
3. Найден объём газа в промежуточном состоянии (+1 балл).
4. Записано первое начало термодинами для перехода из промежуточного состояния в конечное (+2 балла).
5. Правильно вычислена работа газа для этого перехода с пояненииями к уравнению баланса энергии для поршня (+2 балла).
6. Получен правильный ответ для разности объёмов (+1 балл).

Задача 4. Электродвигатель постоянного тока подключён к батарее с ЭДС $\varepsilon = 10$ В. На вал двигателя намотана длинная лёгкая нить с грузом массы $m = 0{,}1$ кг. При работе двигателя груз поднимается с постоянной скоростью $v = 8$ см/с. Найдите силу тока I, текущего по цепи в этом случае. Известно, что при полном затормаживании вала двигателя по цепи течёт ток $I_0 = 50$ мА. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2; потери энергии на трение не учитывайте. Числовой ответ выразите в миллиамперах.

Возможное решение

Рассмотрим баланс энергии в цепи за некоторый промежуток времени Δt:

$$\varepsilon I \Delta t = I^2 R \Delta t + A.$$

В левой части этого уравнения записана работа батареи. Первое слагаемое в правой части — количество выделившейся теплоты, R — полное сопротивление цепи; A — работа двигателя. Так как груз поднимается с постоянной скоростью, то работа A определяется приращением потенциальной энергии груза. Учитывая, что за время Δt груз поднимается на высоту $h = v\Delta t$, получаем:

$$A = mgh = mgv\Delta t,$$

$$\varepsilon I \Delta t = I^2 R \Delta t + mgv\Delta t \quad \longrightarrow \quad \varepsilon I = I^2 R + mgv.$$

Уравнение для случая, когда вал двигателя полностью заторможен, получается отсюда при $v = 0$:

$$\varepsilon I_0 = I_0^2 R \quad \longrightarrow \quad R = \frac{\varepsilon}{I_0}.$$

Для тока I получаем квадратное уравнение:

$$I^2 \frac{\varepsilon}{I_0} - \varepsilon I + mgv = 0 \quad \longrightarrow \quad I^2 - I_0 I + \frac{mgvI_0}{\varepsilon} = 0.$$

Корни этого уравнения равны:

$$I = \frac{I_0}{2} \pm \sqrt{\frac{I_0^2}{4} - \frac{mgvI_0}{\varepsilon}} = \frac{I_0}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgv}{\varepsilon I_0}}\right)$$

Поскольку при $v = 0$ ток I должен равняться I_0, то перед квадратным корнем следует взять знак плюс. Окончательно получаем:

$$I = \frac{I_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4mgv}{\varepsilon I_0}}\right) = 40 \text{ мА}$$

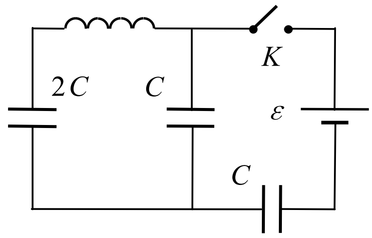
Ответ:

$$I = \frac{I_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4mgv}{\varepsilon I_0}}\right) = 40 \text{ мА}$$

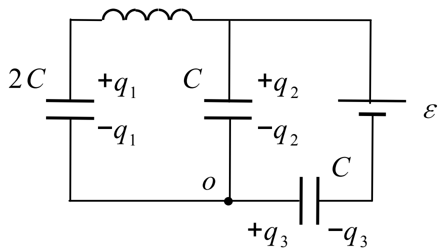
Критерии оценивания

1. Записано уравнение баланса энергии (+3 балла).
2. Записана связь механической работы и скорости груза (+2 балла).
3. Найдено общее сопротивление цепи (+1 балл).
4. Получено уравнение для определения тока (+1 балл).
5. Правильно выбран корень уравнения (+2 балла).
6. Получен правильный ответ (+1 балл).

Задача 5. Цепь состоит из ключа K, катушки, двух конденсаторов ёмкостью C, одного конденсатора ёмкостью $2C$ и батареи с ЭДС $\varepsilon = 12$ В. Сначала ключ разомкнут, конденсаторы не заряжены. После замыкания ключа в цепи возникают колебания токов и напряжений. Если пренебречь излучением и сопротивлением всех элементов цепи, то колебания можно считать гармоническими. В этом приближении найдите амплитуду V_A колебаний напряжения на конденсаторе $2C$. Числовой ответ выразите в вольтах и округлите до десятых.



Возможное решение



Обозначим через V_{max} и V_{min} максимальное и минимальное значения напряжения на конденсаторе $2C$. Амплитуда колебаний напряжения равна полуразности этих величин:

$$V_A = \frac{V_{max} - V_{min}}{2}.$$

Обозначим заряд на конденсаторе $2C$ через q_1, а заряды на двух оставшихся конденсаторах через q_2 и q_3. Напряжения на конденсаторах равны:

$$V_1 = \frac{q_1}{2C}, \quad V_2 = \frac{q_2}{C}, \quad V_3 = \frac{q_3}{C}.$$

Запишем два соотношения, которые справедливы в любой момент времени после замыкания ключа. Для правого контура, включающего в себя батарею и два конденсатора ёмкостью C, имеем:

$$\varepsilon = V_2 + V_3.$$

Три обкладки конденсаторов, соединённые в нижнем узле o, образуют изолированный проводник, заряд которого равен нулю:

$$-q_1 - q_2 + q_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad -2CV_1 - CV_2 + CV_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad 2V_1 + V_2 = V_3.$$

Выразим из полученных уравнений V_2 и V_3 через V_1:

$$\begin{cases} V_2 + V_3 = \varepsilon \\ V_2 - V_3 = -2V_1 \end{cases} \longrightarrow \quad V_2 = \frac{\varepsilon}{2} - V_1, \quad V_3 = \frac{\varepsilon}{2} + V_1.$$

Поскольку в правом контуре нет индуктивности, то сразу после замыкания ключа на конденсаторах ёмкости C устанавливаются отличные от нуля заряды и напряжения. При этом, из-за действия ЭДС самоиндукции в катушке, ток в левом контуре можно считать всё ещё равным нулю. Поэтому заряд и напряжение на конденсаторе $2C$ не успевают измениться, то есть остаются равными нулю. Полагая $V_1 = 0$, из полученных выше соотношений находим напряжения и заряды на конденсаторах ёмкости C сразу после замыкания ключа:

$$V_{20} = V_{30} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad q_{20} = q_{30} = \frac{C\varepsilon}{2}$$

Рассматривая эти значения в качестве начальных, запишем уранение баланса энергии в цепи:

$$A = \Delta W + \frac{L\,I^2}{2}\,.$$

Здесь A — работа батареи, ΔW — приращение энергии конденсаторов, L — индуктивность катушки, I — сила тока в катушке. Учитывая, что через батарею в направлении действия её ЭДС прошёл заряд $(\,q_3 - q_{30}\,)$, для работы A получаем:

$$A = (\,q_3 - q_{30}\,)\,\varepsilon = C\,(\,V_3 - V_{30}\,)\,\varepsilon = C\,V_3\,\varepsilon - \frac{C\,\varepsilon^2}{2}\,.$$

Для приращения энергии имеем:

$$\Delta W = W - W_0\,,$$

W — энергия конденсаторов в произвольный момент времени:

$$W = \frac{2\,C\,V_1^2}{2} + \frac{C\,V_2^2}{2} + \frac{C\,V_3^2}{2}\,,$$

W_0 — энергия сразу после замыкания ключа:

$$W_0 = \frac{C\,V_{20}^2}{2} + \frac{C\,V_{30}^2}{2} = \frac{C\,\varepsilon^2}{4}\,.$$

В те моменты времени, когда заряд на конденсаторе $2\,C$ максимален или минимален, сила тока в катушке обращается в нуль. Для этих моментов имеем:

$$A = \Delta W \quad \longrightarrow \quad C\,V_3\,\varepsilon - \frac{C\,\varepsilon^2}{2} = C\,V_1^2 + \frac{C\,V_2^2}{2} + \frac{C\,V_3^2}{2} - \frac{C\,\varepsilon^2}{4}\,,$$

$$V_3\,\varepsilon = V_1^2 + \frac{V_2^2 + V_3^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} \quad \longrightarrow \quad 4\,V_3\,\varepsilon = 4\,V_1^2 + 2\,V_2^2 + 2\,V_3^2 + \varepsilon^2\,.$$

Здесь V_1 — максимальное или минимальное значение напряжения на конденсаторе $2\,C$. Подставим в последнее уравнение значения V_2 и V_3, выраженные через V_1:

$$4\,\left(\frac{\varepsilon}{2} + V_1\right)\varepsilon = 4\,V_1^2 + 2\,\left(\frac{\varepsilon}{2} - V_1\right)^2 + 2\,\left(\frac{\varepsilon}{2} + V_1\right)^2 + \varepsilon^2\,,$$

$$2\,\varepsilon^2 + 4\,\varepsilon\,V_1 = 4\,V_1^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} - 2\,\varepsilon\,V_1 + 2\,V_1^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\,\varepsilon\,V_1 + 2\,V_1^2 + \varepsilon^2\,,$$

$$8\,V_1^2 - 4\,\varepsilon\,V_1 = 0\,.$$

Отсюда максимальное и минимальное значения напряжения на конденсаторе $2\,C$ равны:

$$V_{max} = \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad V_{min} = 0\,.$$

Для амплитуды колебаний напряжения получаем:

$$V_A = \frac{V_{max} - V_{min}}{2} = \frac{\varepsilon}{4} = 3 \text{ В}$$

Ответ:

$$V_A = \frac{\varepsilon}{4} = 3 \text{ В}$$

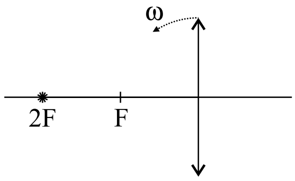
Критерии оценивания

1. Найдены заряды на конденсаторах C сразу после замыкания ключа (+2 балла).
2. Правильно записан закон сохранения энергии для цепи (+ 3 балла).
3. Решено уравнение относительно заряда или напряжения на конденсаторе $2C$ (+2 балла).
4. Найдена амплитуда (+3 балла).

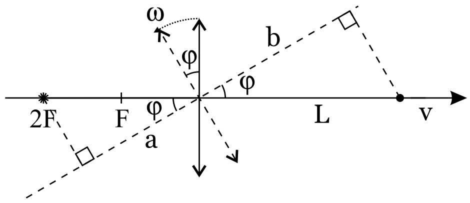
Критерии оценивания при решении через законы Кирхгофа

1. Правильно записан 2-й закон Кирхгофа для любых двух контуров (+2 балла).
2. Записан закон сохранения заряда для изолированной области (+2 балла).
3. Из составленного дифференциального уравнения найден вид решения (+1 балл).
4а. Найдена положение равновесия (+2 балла).
4б. Найдена амплитуда колебаний в контуре (+2 балла).
5. Получен правильный ответ (+1 балл).

Задача 6. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F расположен источник света. Расстояние от источника света до линзы $2F$. Линзу начинают поворачивать в плоскости, содержащей главную оптическую ось с постоянной угловой скоростью ω. Найдите скорость изображения источника света в момент, когда расстояние между ним и главной оптической осью равно F.



Возможное решение



Рассмотрим момент, когда ось повернулась относительно первоначального пололжения на некоторый угол φ. Поскольку луч, проходящий через центр линзы, всегда соединяет источник света и его изображение, движение самого изображения будет направлено вдоль этого луча. Введем расстояние от центра линзы до изображения вдоль центрального луча и обозначим его за L. Из рисунка видно, что $L = b/\cos\varphi$, где b — расстояние от изображения до линзы (не до центра линзы!). Расстояние от источника до линзы также легко определить: $a = 2F\cos\varphi$. Подставляя выражения для a и b в формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F},$$

получаем

$$L = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{aF}{a-F} = \frac{2F^2}{2F\cos\varphi - F} = F\frac{2}{2\cos\varphi - 1}$$

. Искомая скорость получается простым дифференцированием по времени выражения для L:

$$v = \dot{L} = F \cdot 2 \cdot \frac{(-1)\cdot(-2\sin\varphi\cdot\dot{\varphi})}{(2\cos\varphi - 1)^2}$$

. Учитывая, что $\dot{\varphi} = \omega$, получаем:

$$v = F\omega\frac{4\sin\varphi}{(2\cos\varphi - 1)^2}$$

. Осталось найти угол при котором, выполняется условие, что расстояние между источником света и оптической осью равно F (условие можно было прочитать двояко; второй вариант, что расстояние между изображением и оптической осью равно F). В первом случае угол определяется немедленно:

$$\sin\varphi_0 = \frac{F}{2F} = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi_0 = \pi/6,$$

а итоговое значение скорости приобретает вид:

$$v = F\omega\frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2} = F\omega\frac{1}{2-\sqrt{3}} \approx 3{,}73F\omega.$$

Во втором случае, условие на угол имеет вид

$$\sin\varphi_0 = F/L = \left\{L = F\frac{2}{2\cos\varphi - 1}\right\} = \cos\varphi_0 - \frac{1}{2}.$$

Возводя в квадрат полученное тригонометрическое уравнение, получим

$$\sin 2\varphi_0 = 3/4 \to \varphi_0 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}.$$

Критерии оценивания

1. Правильно записна формула тонкой линзы (+1 балл).
2. Верно найдено расстояние от центра линзы до изображения источника (+3 балла).
3. Верно найдено выражение для скорости изображения источника, но не найден угол φ_0 (+4 балла).
4. Верно найден угол φ_0 (+1 балл).
5. Получен правильный ответ (+1 балл).