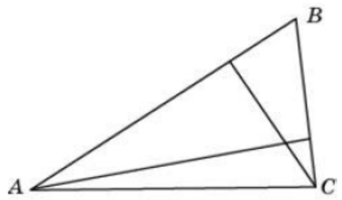
ЗАДАЧИ на ЕГЭ по математике (профиль) в 2023 году

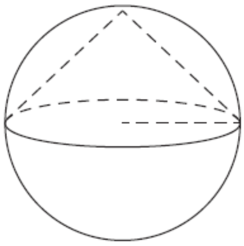
Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 У треугольника со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 4. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?



2 Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 6. Найдите объем шара.



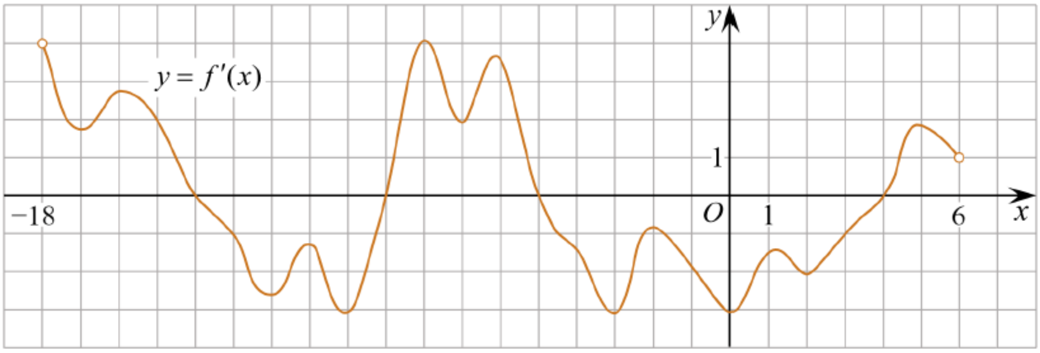
3 Фабрика выпускает сумки. В среднем 8 сумок из 100 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

4 В коробке 8 синих, 6 красных и 11 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{(x-8)} = \frac{1}{9}$.

6 Найдите значение выражения $\log_{\sqrt[6]{13}} 13$.

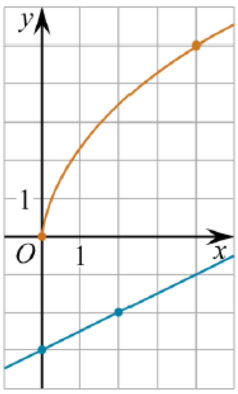
7 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$ определенной на интервале $(-18; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-13; 1]$.



8 К источнику с ЭДС $\varepsilon = 55$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, дается формулой $U = \dfrac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 50 В? Ответ выразите в омах.

9 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно в B со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.

10 На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$ которые пересекаются в точке A. Найдите абсциссу точки A.



11 Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x + 1$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12-18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$2\sin^2 x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = \sqrt{3}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

ИЛИ

а) Решите уравнение

$$\sin x\cos 2x - \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

ИЛИ

а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x = \sqrt{3}\sin^2 x + 2\cos x$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

13 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм. На рёбрах A_1B_1, B_1C_1 и BC отмечены точки M, K и N соответственно, причем $B_1K : KC_1 = 1 : 2$, а $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.
а) Докажите, что N – середина BC.
б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объем призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12, а ее высота равна 2.

ИЛИ

Дана прямая призма, в основании которой равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. M – точка, которая делит сторону A_1D_1 в отношении $1 : 4$, К – середина DD_1.
а) Доказать, что $MCK || BD$.
б) Найти тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания, если $\angle BAC = 60°$, а $\angle CKM = 90°$.

ИЛИ

Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB. На AB отмечена точка P такая, что $AP : PB = 3 : 1$. Точка Q делит пополам ребро B_1C_1. Точка M делит пополам ребро BC. Через точку M проведена плоскость α, перпендикулярная PQ.
а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α.
б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит PQ, если $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $\cos\angle ABC = \frac{3}{5}$.

14 Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x^2 - \log_3 x^2}{\log_6^2(2x^2 - 10x + 12{,}5) + 1} \leqslant 0.$$

ИЛИ

Решите неравенство

$$\log_{25}((x-4)(x^2-2x-8)) \geqslant 0{,}5\log_5(x-4)^2.$$

ИЛИ

Решите неравенство

$$(\log^2_{0{,}25}(x+3) - \log_4(x^2+6x+9) + 1) \cdot \log_4(x+2) \leqslant 0.$$

ИЛИ

Решите неравенство

$$\log_8(x-1)^3 \geqslant \log_2(x^2-1) - 5.$$

ИЛИ

Решите неравенство

$$\frac{\log_3(3-x) - \log_3(x+2)}{\log_3^2(x^2) + \log_3(x^4) + 1} \geqslant 0.$$

ИЛИ

Решите неравенство

$$\log_{0{,}1}(x^3 - 5x^2 - 25x + 125) \leqslant \log_{0{,}01}(x-5)^4.$$

15 В июле 2025 взяли кредит на 10 лет на 800 тыс. руб.
- в январе начисляется $r\%$ по кредиту.
- с февраля по июнь в 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 долг уменьшается равномерно на какую то сумму.
- в конце 2030 года долг составляет 200 тыс. руб.
- с февраля по июнь в 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 долг уменьшается равномерно на другую сумму.
- к 2035 году кредит должен быть выплачен.

Найдите r, если общая сумма выплат составила 1480 тыс. руб.

ИЛИ

В июле 2025 взяли кредит на 10 лет на 700 тыс. руб.
- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь в 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 долг уменьшается равномерно на какую то сумму;
- с февраля по июнь в 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 долг уменьшается равномерно на другую сумму;
- к 2035 году кредит должен быть выплачен.

Какая выплата была в 2026 году, если общая сумма выплат составила 1420 тыс. руб.

ИЛИ

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 10 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого из годов с 2026 по 2030 долг уменьшается на одну и ту же сумму по сравнению с июлем предыдущего года;
— в июле каждого из годов с 2031 по 2035 долг уменьшается на одну и ту же сумму по сравнению с июлем предыдущего года, отличную от суммы, на которую долг убывал в первые пять лет.
Известно, что в конце 2030 года долг составил 800 тысяч рублей. Найдите начальную сумму кредита, если сумма выплат по кредиту равна 2090 тысяч рублей.

16 ABC равносторонний треугольник. На стороне AC выбрана точка M, серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает сторону AB в точке E, а сторону BC в точке K.
а) Доказать что угол AEM равен углу CMK.
б) Найти отношение площадей треугольников AEM и CMK, если $AM : CM = 1 : 4$.

ИЛИ

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Биссектрисы углов BAD и BCD пересекаются в точке O. Точки M и N отмечены на боковых сторонах AB и CD соответственно. Известно, что $AM = MO$, $CN = NO$.
а) Докажите, что точки M, N и O лежат на одной прямой.
б) Найдите $AM : MB$, если известно, что $AO = OC$ и $BC : AD = 1 : 7$.

ИЛИ

Дан ромб $ABCD$. Прямая, перпендикулярная стороне AD, пересекает его диагональ AC в точке M, диагональ BD — в точке N, причем $AM : MC = 1 : 2$, $BN : ND = 1 : 3$.
а) Докажите, что $\cos\angle BAD = 0{,}2$.
б) Найдите площадь ромба, если $MN = 5$.

17 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + 6x)\sqrt{x + y + 6} = 0, \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

ИЛИ

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy - x + 7)(y - x + 7) = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

ИЛИ

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(xy - x + 8) \cdot \sqrt{y - x + 8} = 0,\\ y = 2x + a\end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

ИЛИ

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x^2 - 7x + 8 - y)\sqrt{x - y + 8} = 0,\\ y = ax + a\end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

18 Дана правильная несократимая дробь $\frac{a}{b}$. За один ход можно увеличить числитель на знаменатель, а знаменатель на два числителя, т.е. получить несократимую дробь $\frac{(a+b)}{(b+2a)}$.

а) Можно ли из дроби $\frac{2}{3}$ получить дробь $\frac{29}{41}$.

б) Можно ли из некоторой дроби получить дробь $\frac{6}{7}$ за 2 хода.

в) Дробь $\frac{c}{d}$ больше $\frac{7}{10}$. Найдите Найдите минимальную дробь $\frac{c}{d}$, которую нельзя получить из другой правильной несокращаемой дроби за 2 хода.

ИЛИ

Есть числа A и B. Из них можно сделать числа $A+2$ и $B-1$ или $B+2$ и $A-1$, только если следующая пара этих чисел будет натуральной. Известно, что $A = 7$, $B = 11$.

а) Можно ли за 20 ходов создать пару, где одно из чисел равно 50?

б) За сколько ходов можно сделать пару, где сумма чисел будет равна 600?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать, чтобы оба числа не превышали 50?

ИЛИ

В классе больше 10, но не больше 26 человек, доля девочек не более 46%.

а) Может ли в классе быть 9 девочек?

б) Может ли в классе быть 55% девочек, если придёт ещё одна?

в) Какова максимальная доля девочек, если в класс придёт одна девочка? (max. доля $\in \mathbb{Z}$)

ИЛИ

В игре число $a = 4$ и число $b = 5$, за ход можно сделать $(a-1; b+2)$ или $(a+2; b-1)$. (новые числа a и b всегда положительные)

а) Можно ли получить число 200 за 100 ходов?

б) Сколько нужно сделать ходов, чтобы получить сумму равную 300

в) Сколько нужно сделать ходов, чтобы получить максимальную сумму, при этом ни одно число не превышает 200.

ИЛИ

Для чисел A и B, состоящих из одинакового количества цифр, вычислили S – сумму произведений соответствующих цифр. Например. для числа $A = 123$ и $B = 579$ получается сумма $S = 15 + 27 + 39 = 46$.
а) Существуют ли трёхзначные числа A и B, для которых $S = 100$?
б) Существуют ли пятизначные числа A и B. для которых $S = 400$?
В) Верно ли, что любое натуральное число от 1 до 260 является суммой для некоторых четырёхзначных чисел A и B?

ИЛИ

На доске написано трёхзначное число A. Серёжа зачёркивает одну цифру и получает двузначное число B, затем Коля записывает число A и зачеркивает одну цифру (возможно ту же, что Серёжа) и получает число C.
а) Может ли быть верным уравнение $A = B \cdot C$, если $A > 140$?
б) Может ли быть верным уравнение $A = B \cdot C$, если $440 \leqslant A < 500$?
в) Найдите наибольшее число A до 900, для которого выполняется $A = B \cdot C$.