Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2021

Заключительный этап. 7 класс

Задача 1. В высоком цилиндрическом сосуде с площадью дна $S = 120$ см^2 находятся две несмешивающиеся жидкости с плотностями $\rho_1 = 1360$ кг/м^3 и $\rho_2 = 880$ кг/м^3. Внутрь сосуда помещают кубический блок объемом $V = 400$ см^3 и плотностью $\rho_k = 1100$ кг/м^3. Блок полностью находится внутри жидкости и не касается дна сосуда. Насколько изменится высота разделяющей поверхности двух жидкостей после помещения блока внутрь емкости?

Возможное решение

Поскольку плотность блока больше, чем плотность верхней жидкости, и меньше, чем плотность нижней жидкости, блок будет продолжать плавать на разделяющей поверхности между двумя жидкостями. В этом случае на блок действует сила тяжести:

$$F = mg = \rho_k V g.$$

Силы Архимеда обеих жидкостей:

$$F_A = F_{A1} + F_{A2} = \rho_1 g V_x + \rho_2 g (V - V_x).$$

Под V_x понимется объем блока, погруженный в нижнюю жидкость, а под $V - Vx$ - объем блока, находящийся в верхней части жидкости. Сила тяжести и силы Архимеда друг друга уравновешивают, поэтому получаем уравнение

$$\rho_k V g = \rho_1 g V_x + \rho_2 g (V - V_x).$$

Отсюда можно выразить V_x :

$$V_x = V \frac{\rho_k - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Уровень нижней жидкости повышается на объем V_x. Поскольку площадь основания сосуда равна S, то уровень границы раздела жидкостей повышается на Δh, а именно

$$\Delta h = \frac{V_x}{S}.$$

Подставляя V_x, находим искомый объём:

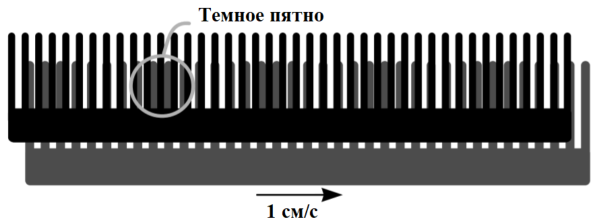
$$\Delta h = \frac{V(\rho_k - \rho_2)}{S(\rho_1 - \rho_2)} = 1,5 \text{ см}.$$

Критерии

1. Верно записаны силы Архимеда, действующие на погруженное тело, обусловленные обеими жидкостями (+ 1 балл).
2. Верно записан баланс сил, приложенных к погруженному в жидкости телу (+ 1 балл).
3. Верно посчитана доля объёма тела (или выражен сам объём), находящегося в одной из двух жидкостей (+ 1 балл).
4. Приведена верная формула для изменения высоты уровня разделения жидкостей (+ 1 балл).
5. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 2. Муаровый узор возникает при наложении двух периодических структур с близким периодами так, что повторяющиеся элементы то накладываются друг на друга, то образуют промежутки. Рассмотрим в качестве периодических структур две расчески, изображенные на рисунке. Расчески имеют имеют слегка отличающиеся расстояния между зубцами, нижняя расческа двигается со скоростью $v = 1$ см/с вправо относительно верхней. С какой скоростью и в каком направлении двигаются темные пятна, изображенные на рисунке?



Возможное решение

Зафиксируем положение некоторого тёмного пятна. Если нижняя расческа переместится на один зубец, то новая композиция тёмных пятен будет идентична исходной. Следовательно, выбранное темное пятно переместится на некоторое количество зубцов N относительно предыдущего своего положения. По рисунку можно определить, что на один сдвиг пятен на N зубцов приходится $7N$ зубцов нижней расчески, поэтому темные пятна перемещаются в 7 раз быстрее, чем нижняя расческа: $v = 7$ см/с.

Критерии

1. Присутствует понимание характера движения тёмного пятна (если нижняя расчёска сдвигается на 1 зубец, то система тёмных пятен должна повториться) (+ 2 балла).

2. Посчитано, насколько зубцов "съедет"некоторое фиксированное тёмное пятно в таком случае (+ 2 балла).

3. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 3. Локомотив приближается к вокзалу с постоянной скоростью, двигаясь по линейному участку пути. Машинист дает свисток в течение фиксированного промежутка времени $t_0 = 10$ с, но диспетчер вокзала, ожидающий поезд, измеряет время доносящегося до него свиста как $t_1 = 9$ с. Найдите скорость поезда v. Скорость звука в воздухе $c = 340$ м/с.

Возможное решение

Пусть L - расстояние от локомотива до вокзала в момент, когда машинист начинает давать свисток. Время, необходимое звуку, чтобы добраться до диспетчера станции, в данном случае равно

$$\tau_A = L/c.$$

Когда свист прекращается, расстояние от локомотива до диспетчера станции равно $L - vt_0$, где v - скорость поезда. Время, за которое звук распространяется с этого расстояния, равно

$$\tau_B = (L - vt_0)/c.$$

Допустим, машинист начинает давать свисток в момент τ_0 и заканчивает в момент $\tau_0 + t_0$. Диспетчер станции слышит начало свистка в момент $\tau_0 + \tau_A$ и окончание свистка в момент $\tau_0 + t_0 + \tau_B$. Разница этих моментов времени t_1 - это и есть время свистка, измеренное диспетчером. Таким образом, мы получаем уравнение

$$t_1 = t_0 - \tau_A + \tau_B = t_0 - \frac{v}{c}t_0.$$

Отсюда получаем искомую скорость

$$v = \frac{t_0 - t_1}{t_0}c = 34 \text{ м/с}.$$

Критерии

1. Верно рассчитано время, необходимое звуку, чтобы добраться до диспетчера станции (+ 1 балл).

2. Верно рассчитано время, за которое звук распространяется от локомотива до диспетчера станции (+ 1 балл).

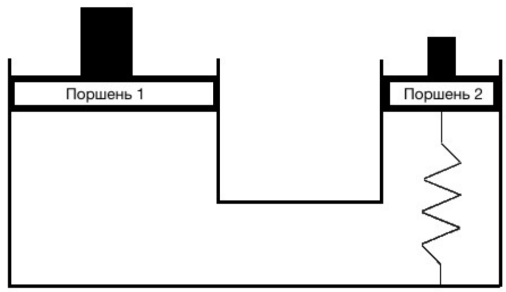
3. Приведено верное выражение для времени свистка, измеренного диспетчером (+ 1 балл).

4. Приведена верная формула для скорости поезда (+ 1 балл).

5. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 4. Два сообщающихся сосуда, заполненных жидкостью, закрыты подвижными невесомыми поршнями, к одному из которых прикреплена невесомая пружина с коэффициентом жесткости $k = 100$ Н/м. В начальный момент времени на поршнях помещены гирьки, причем масса гирьки 1 в четыре раза больше массы гирьки 2. Площадь поршня 1 равна $S_1 = 100$ см^2. Пружина при этом не растянута, а поршни находятся на одном уровне. Плотность жидкости равна $\rho = 0{,}5$ г/см^3. На рисунке изображено начальное состояние системы. Затем на поршень 1 дополнительно ставят гирьку массы $m = 500$ г. Найдите возникающее при этом удлинение пружины. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.



Возможное решение

Из равновесия в начальный момент времени можно заключить, что площадь первого поршня в четыре раза больше, чем площадь второго поршня. Когда на первый поршень дополнительно ставят гирьку массы m, первый поршень опустится вниз на Δx_1, а второй поршень поднимется на Δx_2, причем эти величины связаны через сохранение объема воды в сосуде:

$$S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2.$$

откуда следует

$$\Delta x_2 = 4\Delta x_1$$

Более того, пружина также растянется на Δx_2. Из условия равенства давлений в жидкости на одной и той же высоте относительно дна сосуда получаем:

$$\frac{mg}{S_1} = \rho g(\Delta x_1 + \Delta x_2) + \frac{k\Delta x_2}{S_2}$$

Отсюда следует

$$mg = 5\rho g \Delta x_1 S_1 + \frac{S_1^2}{S_2^2} k \Delta x_1,$$

$$\Delta x_1 = \frac{mg}{5\rho g S_1 + \frac{S_1^2}{S_2^2} k},$$

$$\Delta x_1 = \frac{0,5 \cdot 10}{5 \cdot 500 \cdot 10 \cdot 0,01 + 16 \cdot 100} \approx 2,7\text{мм}.$$

Критерии

1. Записано условие равновесия в начальный момент времени (+ 1 балл).
2. Найдена зависимость площади второго поршня от площади первого (+ 1 балл).
3. Записано равновесие после установления второй гирьки (+ 1 балл).
4. Получена формула для ответа (+ 1 балл).
5. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 5. В тазу с водой плавает свеча, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Высота свечи $l_0 = 10$ см, длина стороны основания $a = 2$ см. Плотность материала свечи равна $\rho_с = 0{,}45$ г/см^3. К центру нижнего основания свечи прикреплена невесомая упругая резинка с коэффициентом упругости $k = 100$ Н/м. В начальный момент времени резинка не растянута и имеет длину $L = 16$ см. Плотность воды равна $\rho_в = 1$ г/см^3, высота уровня воды равна $H = 20$ см. Свечу поджигают, и она начинает равномерно и медленно гореть, так что высота свечи уменьшается на 1 см в 1 минуту. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2. Найдите момент времени, когда резинка начнет натягиваться. Найдите момент времени, когда прекратится горение свечи.

Возможное решение

Запишем условие равновесия для свечи:

$$mg + F_{упр} = F_{арх}.$$

При этом нужно учесть, что сила упругости начнет действовать в тот момент, когда резинка начнет натягиваться. Это произойдет тогда, когда сумма длин погруженной части свечи и резинки сравняются с уровнем воды. Найдем момент, в который начнет действовать сила упругости. Обозначим за h длину погруженной в воду части свечи, а за c - скорость сгорания свечи в см/мин. До натяжения резинки:

$$\rho_с a^2 l g = \rho_в a^2 h g,$$

$$h(t) = \frac{\rho_с}{\rho_в} \cdot l(t).$$

Учтем, что

$$l(t) = l_0 - ct.$$

Тогда получаем

$$h(t) = -c\frac{\rho_с}{\rho_в}t + l_0\frac{\rho_с}{\rho_в}.$$

Эта зависимость будет верна до тех пор, пока $h + L > H$ Найдем момент, когда резинка начнет натягиваться:

$$H = L - c\frac{\rho_с}{\rho_в}t + l_0\frac{\rho_с}{\rho_в}.$$

Откуда

$$t_1 = (-H + L + l_0\frac{\rho_с}{\rho_в})\frac{\rho_в}{c \cdot \rho_с}.$$

Подставляя численные значения, находим $t_1 = 10/9$ минут. При этом:

$$l(t_1) = 10 - \frac{10}{9} = \frac{80}{9} = l_1,$$

$$h(t_1) = \frac{80 \cdot 45}{9 \cdot 100} = 4 = h_1.$$

Установим связь растяжения резинки и h:

$$\Delta(t) = H - h(t) - L.$$

Запишем условие равновесия с учетом добавившейся силы упругости:

$$k(H - h(t) - L) + \rho_с a^2 l(t) g = \rho_в a^2 h(t) g.$$

Выразим $h(t)$:

$$h(t) = \frac{k(H - L) + \rho_с a^2 l(t) g}{\rho_в a^2 g + k}.$$

Имея ввиду наличие начального промежутка времени t_1, примем момент начала растяжения за нулевой:

$$h(t) = \frac{k(H - L) + \rho_с a^2 l_1 g}{\rho_в a^2 g + k} - \frac{\rho_с a^2 ctg}{\rho_в a^2 g + k}.$$

Возможны два случая:
1) Свеча погасла, не догорев до конца, поскольку пламя погрузилось в воду:

$$h(t_2) = l(t_2) > 0.$$

2) Свеча полностью прогорела:

$$h(t_2) = l(t_2) = 0.$$

Рассмотрим первый случай:

$$l_1 - ct = \frac{k(H-L) + \rho_{\text{с}} a^2 l_1 g}{\rho_{\text{в}} a^2 g + k} - t\frac{\rho_{\text{с}} a^2 cg}{\rho_{\text{в}} a^2 g + k},$$

$$t_2 = -\frac{l_1 - \frac{k(H-L)+\rho_{\text{с}} a^2 l_1 g}{\rho_{\text{в}} a^2 g + k}}{\frac{\rho_{\text{с}} a^2 cg - c(\rho_{\text{в}} a^2 g + k)}{\rho_{\text{в}} a^2 g + k}} \approx 6,1 \text{ мин},$$

$$l_2 = l_1 - 6,1 = 2,8 \text{ см}.$$

Таким образом, реализуется случай, когда свеча погаснет, не догорев.

Критерии

1. Записано условие равенства сил, действующих на свечу (+ 1 балл).
2. Найдена зависимость длины погруженной части свечи от времени (+ 1 балл).
3. Найден момент, когда начнет натягиваться резинка (+ 1 балл).
4. Найдена новая зависимость длины погруженной части свечи от времени (+ 1 балл).
5. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2021

Заключительный этап. 8 класс

Задача 1. Металлический брусок массой $m = 10$ г и плотностью $\rho = 8900$ кг/м^3 целиком вморожен в небольшой монолитный кусок льда без полостей массой $M = 130$ г. Температура льда и бруска одинакова и равна $0°C$. Лёд помещают в небольшое ведро, заполненное водой до объёма $V = 0{,}4$ л с начальной температурой T. Какой должна быть температура воды T, чтобы после достижения теплового равновесия кусок льда с металлическим бруском опустился на дно ведра. Теплообменом ведра с окружающей средой пренебречь. Теплота плавления льда $\lambda = 330$ КДж/кг, удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг $\cdot$ $°C$), плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, плотность льда составляет $\rho_1 = 900$ кг/м^3.

Возможное решение

Кусок льда с бруском начнёт тонуть, если приложенная к нему сила тяжести равна силе Архимеда. Обозначим массу льда, окружающего брусок в момент начала погружения, буквой M_*, а его объем - V_*. В этом случае сила тяжести, приложенная к куску льда, равна

$$F_0 = (M_* + m)g$$

до погружения, а сила Архимеда будет равна

$$F_A = \rho_0(V_b + V_*)g = \rho_0(\frac{m}{\rho} + \frac{M_*}{\rho_1})g.$$

Приравнивая эти выражения, можно найти массу льда, оставшуюся в момент его потопления:

$$M_* = m\frac{\rho_1(\rho - \rho_0)}{\rho(\rho_0 - \rho_1)} \approx 79.9 \text{ г}.$$

Следовательно, масса растаяшего льда равна

$$M_p = M - M_* = 50,1 \text{ г}.$$

Чтобы найти искомую температуру воды, нужно подсчитать затраты на плавление такого количества льда. Она находится из уравнения теплового баланса:

$$c\rho_0 V\Delta T = \lambda M_p \Rightarrow \Delta T = \frac{\lambda M_p}{c\rho_0 V\Delta T} \approx 9,8°C.$$

Ответ: $9,8°C$

Критерии

1. Верно записан баланс сил, приложенных к погруженному в жидкости телу (+ 1 балл).
2. Верно рассчитана масса льда, которая останется в момент его потопления (+ 1 балл).
3. Верно рассчитана масса растаявшего льда (+ 1 балл).
4. Приведено верное уравнение теплового баланса для системы (+ 1 балл).
5. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 2. Три цилиндрических сосуда соединены трубками так, что первый сосуд соединен со вторым, а второй с третьим, на трубках установлены краны, позволяющие перекрывать трубки. В начальный момент времени краны открыты, а уровень жидкости таков, что места прикреплений трубок к сосудам погружены под воду. Сначала перекрыли кран между сосудом 1 и сосудом 2, а затем налили некоторый объем воды в сосуд 2, после чего уровень воды в сосуде 2 поднялся на 1 см. Затем был перекрыт кран между сосудом 2 и сосудом 3, а после этого открыт кран между сосудом 1 и сосудом 2. В сосуд 2 снова налили то же количество воды, что и в первый раз, и уровень воды в сосуде 2 поднялся на 2 см по сравнению с уровнем непосредственно перед вторым наливанием воды. Далее был снова открыт кран между сосудом 2 и сосудом 3, и оказалось, что уровень воды в сосуде 2 поднялся на 1,5 см по сравнению с уровнем до самого первого наливания воды. Найдите отношение диаметра сосуда 3 к диаметру сосуда 1.

Возможное решение

Обозначим $h_1 = 1$см, $h_2 = 2$см, $h_3 = 1,5$см. После первого наливания воды

$$S_2h_1 + S_3h_1 = V$$

Более того, запомним, что уровень в сосудах 2 и 3 поднялся на 1 см. Если мы перекроем кран между 2 и 3, а затем откроем кран между 1 и 2, то уровень воды в сосудах 1 и 2 установится на новом значении, причем

$$h \cdot S_1 + h \cdot S_2 = h_1S_2.$$

Откуда новый уровень

$$h = \frac{S_2h_1}{S_1 + S_2}.$$

Если после этого налить еще воды в сосуд 2, то окажется, что $h_2S_1 + h_2S_2 = V$ Получаем

$$S_2h_1 + S_3h_1 = h_2S_1 + h_2S_2.$$

Поделим на S_2:

$$1 + \frac{S_3}{S_2} = 2\frac{S_1}{S_2} + 2.$$

Теперь рассмотрим, что произойдет после открытия всех кранов:

$$h_3(S_1 + S_2 + S_3) = h_2S_1 + (h_1 + h_2)S_2 + h_1S_3$$

Откуда

$$0,5\frac{S_1}{S_2} - 0,5\frac{S_3}{S_2} + 1,5 = 0,$$

$$\frac{S_1}{S_2} - \frac{S_3}{S_2} + 3 = 0.$$

Решим теперь систему уравнений:

$$\frac{S_3}{S_2} - 2\frac{S_1}{S_2} = 1,$$

$$\frac{S_1}{S_2} - \frac{S_3}{S_2} = -3,$$

$$\frac{S_1}{S_2} + 3 - 2\frac{S_1}{S_2} = 1,$$

$$\frac{S_1}{S_2} = 2.$$

$$\frac{S_3}{S_2} = 5.$$

Тогда ответ

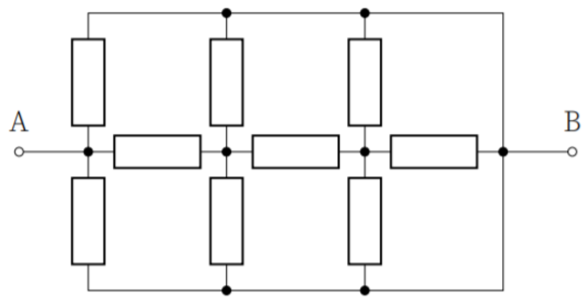
$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{5}{2}.$$

Критерии

1. Получено значение уровня h после первого прибавления воды и открытия крана 1-2 (+ 1 балл).
2. Получено соотношение на площади или отношения площадей из равенства объемов добавленной воды (+ 1 балл).
3. Получено соотношение на площади из данных об открытии всех кранов (+ 1 балл).
4. Приведён верный численный ответ (+ 2 балла).

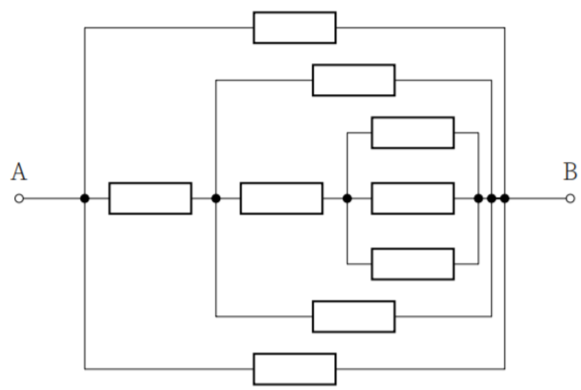
Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 3. Найдите полное сопротивление участка AB электрической цепи, изображенной на рисунке, если сопротивление каждого резистора равно 3 Ом.



Возможное решение

Можно представить данный участок цепи в виде, представленном на рисунке ниже, руководствуясь равенством потенциалов в точках смыкания проводов, симметричных относительно оси, соединяющей точки A и B. После этого можно посчитать общее сопротивление цепи.



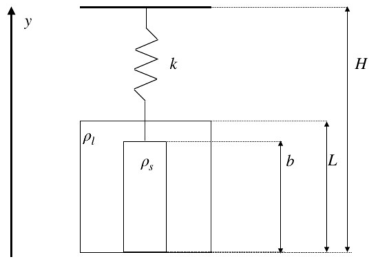
$$R_{AB} = (2R^{-1} + (R + (2R^{-1} + (R + (3R^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} = \frac{15}{41} R \approx 1,1 \text{ Ом}.$$

Критерии

1. Данная электрическая схема верно сведена к эквивалентной (+ 3 балла).
2. Верно записана формула общего сопротивления участка цепи (+ 1 балл).
3. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 4. Брусок имеет форму прямоугольного параллелепипеда высоты $b = 20$ см и квадратным основанием со стороной $a = 5$ см. Плотность материала бруска $\rho_s = 7$ г/см^3. Брусок стоит на дне сосуда, высота уровня жидкости равна $L = 40$ см, плотность жидкости равна $\rho_l = 1$ г/см^3, причем нижняя грань бруска так плотно прилегает ко дну сосуда, что жидкость не проникает между нижней гранью бруска и дном сосуда. Верхняя грань бруска крепится на пружину с коэффициентом жесткости $k = 500$ Н/м, которая в нерастянутом состоянии имеет длину $l = 20$ см. На какой максимальной высоте H относительно дна сосуда можно закрепить верхний конец пружины, чтобы нижняя грань бруска не отрывалась от дна сосуда? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.



Возможное решение

Поскольку жидкости между дном сосуда и бруском нет, то применять формулу для силы Архимеда нельзя. Вместо этого запишем силу давления на верхнюю грань бруска:

$$F_P = \rho_l g(L - b)a^2.$$

Теперь можно записать условие на неподвижность бруска в виде равенства проекций сил на ось y.

$$0 = \rho_l g(L - b)a^2 + \rho_s a^2 bg - k\Delta x.$$

Откуда возможно найти растяжение пружины:

$$\Delta x = \frac{\rho_l g(L - b)a^2 + \rho_s a^2 bg}{k},$$

$$\Delta x = \frac{1000 \cdot 10 \cdot (0,40 - 0,20) \cdot 0,05^2 + 7000 \cdot 0,05^2 \cdot 0,20 \cdot 10}{500} = 0{,}08 \text{ м.}$$

Высота, на которой можно разместить верхний конец пружины, равна:

$$H = l + \Delta x + b \Rightarrow$$

$$H = 20 + 8 + 20 = 48 \text{ см.}$$

Критерии

1. Правильно записано условие равенства сил вдоль оси y (+ 3 балла).
2. Получена формула для максимальной высоты закрепления пружины (+ 1 балл).
3. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 5. В таз с водой погружают ледяной шар, в котором есть замкнутая полость, частично заполненная водой – V_1, а частично – воздухом – V_2. Шар погружен в воду только наполовину. Если поместить в таз с водой такой же шар, но изменить содержимое полости так, что объем V_1, ранее занимаемый водой, теперь занимает воздух, а объем V_2, который прежде был занят воздухом, теперь занимает вода, то шар погрузится в воду на 2/3. Найдите отношение объема полости к объему шара. Плотность воды равна $\rho_в = 1$ г/см^3, плотность льда $\rho_л = 0{,}92$ г/см^3. Силой тяжести, действующей на воздух в полости, пренебречь.

Возможное решение

Приравняем выталкивающую силу к силе тяжести:

$$0,5\rho_w V g = \rho_i V_0 g + \rho_w V_1 g.$$

При этом объем полости $V_p = V_1 + V_2$, где V_2 - объем, занимаемый воздухом в первом случае. Аналогично

$$\frac{2}{3}\rho_w V g = \rho_i V_0 g + \rho_w V_2 g.$$

Поделим оба уравнения на V.

$$0,5\rho_w g = \rho_i \frac{V_0}{V} g + \rho_w \frac{V_1}{V} g,$$

$$\frac{2}{3}\rho_w g = \rho_i \frac{V_0}{V} g + \rho_w \frac{V_2}{V} g.$$

Учтем еще, что

$$V_2 = V - V_0 - V_1.$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} 0{,}5\rho_w g = \rho_i \frac{V_0}{V} g + \rho_w \frac{V_1}{V} g \\ \frac{2}{3}\rho_w g = \rho_i \frac{V_0}{V} g + \rho_w g - \rho_w \frac{V_1}{V} g - \rho_w \frac{V_0}{V} g \end{cases}$$

Введём переменные $\frac{V_0}{V} = a$, $\frac{V_1}{V} = b$ и преобразуем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,5\rho_w g = \rho_i g a + \rho_w g b \\ -\frac{1}{3}\rho_w g = (\rho_i - \rho_w) g a - \rho_w g b \end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнения:

$$\frac{1}{6}\rho_w g = (2\rho_i - \rho_w) g a.$$

Сразу получаем решение:

$$a = \frac{1}{6}\frac{\rho_w}{2\rho_i - \rho_w}.$$

Искомая доля равна

$$1 - a = \frac{12\rho_i - 7\rho_w}{12\rho_i - 6\rho_w} = 0{,}8.$$

Критерии

1. Записано условие равновесия для первого случая (+ 1 балл).
2. Записано условие равновесия для второго случая (+ 1 балл).
3. Приведён верный численный ответ (+ 3 балла).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2021

Заключительный этап. 9 класс

Задача 1. Пассажирский поезд движется по дугообразному участку железной дороги, равномерно замедляя скорость. Длина участка равна S, а время, необходимое поезду, чтобы проехать по нему, равно t. После прохождения участка направление поезда изменилось на угол φ, в начале участка скорость поезда была в α раз больше, чем в конце участка. Найдите связь между массой пассажира m, сидящего в поезде, и весом пассажира P в момент, когда поезд находится в середине участка. Найдите массу пассажира, если $P = 840$ Н, $S = 1{,}5$ км, $t = 60$ с, $\alpha = 1{,}5$, $\varphi = 60^\circ$ и $g = 9{,}8$ м/с^2.

Возможное решение

На пассажира действуют три перпендикулярных друг другу ускорения: ускорение свободного падения, центростремительное ускорение и тангенциальное ускорение. Сначала найдем ускорение по направлению движения поезда. Пусть начальная скорость поезда равна v_0, а конечная скорость v_1, тогда $v_0 = \alpha v_1$. Поскольку скорость изменяется линейно, средняя скорость выражается как частное от общей длины пути и времени, а также как среднее значение начальной и конечной скорости:

$$\frac{v_0 + v_1}{2} = \frac{(\alpha+1)v_0}{2} = \frac{s}{t} \Rightarrow v_1 = \frac{2s}{(\alpha+1)t}.$$

Тогда модуль тангенциального укорения равен:

$$a_\tau = \left|\frac{v_1 - v_0}{t}\right| = \frac{(\alpha-1)v_1}{t} = \frac{2s(\alpha-1)}{t^2(\alpha+1)}.$$

Теперь изучим центростремительное ускорение. Для этого нам нужно найти радиус траектории, который в случае движения по кругу равен:

$$r = s/\varphi.$$

Далее находим скорость v_2 в центре траектории. Для этого воспользуемся общей формулой, записанной для двух одинаковых участков пути - от начала дугового участка до его середины и от середины до его конца:

$$\frac{s}{2} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = \frac{v_0^2 - v_2^2}{2a}.$$

Отсюда можно получить выражение для скорости v_2:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2+1}{2}}v_1 = \sqrt{\frac{\alpha^2+1}{2}}\frac{2s}{(\alpha+1)t}.$$

Отсюда центростремительное ускорение равно:

$$a_n = \frac{v_2^2}{r} = v_2^2\frac{\varphi}{s} = \frac{2s\varphi}{t^2}\frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2}.$$

Третье ускорение в системе - это ускорение свободного падения. Поскольку все ускорения перпендикулярны, мы должны сложить каждое ускорение в квадрате и извлечь квадратный корень из суммы для нахождения результирующего ускорения a:

$$a = \sqrt{g^2 + a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{2s(\alpha-1)}{t^2(\alpha+1)}\right)^2 + \left(\frac{2s\varphi}{t^2}\frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2}\right)^2}.$$

Данное ускорение и является связующим звеном между весом пассажира и его массой:

$$P = ma \Rightarrow m = \frac{P}{a}.$$

Подставляя данные задачи, получаем массу пассажира $m \approx 85{,}6$ кг.

Критерии

1. Верно найдено тангенциальное ускорение (+ 1 балл).
2. Верно найдено центростремительное ускорение (+ 2 балла).
3. Верно найдена масса пассажира (+ 1 балл).
5. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 2. Тонкий стержень длины $a = 1$ м лежит в неподвижной сфере радиуса $R = 2$ м так, что один конец находится в нижней точке сферы P. Сфера гладкая за исключением окрестности точки P много меньшей длины стержня. Найдите минимальный коэффициент трения в окрестности точки P, при котором такое положение стержня возможно.

Возможное решение

Обозначим крайнюю нижнюю точку стержня точкой 1, а верхнюю точку – точкой 2. Напишем условие равновесия стержня. Напишем II закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось:

$$F_{\text{тр}} = N_2 \sin\alpha \quad \longrightarrow \quad \mu N_1 = N_2 \sin\alpha\,,$$

где α – угол между точками 1, точкой центра сферы и точкой 2. Напишем равенство моментов сил относительно центра масс стержня:

$$F_{\text{тр}} l_{\text{тр}} + N_2 l_N = N_1 l_N\,,$$

где плечо силы трения равно

$$l_{\text{тр}} = \frac{a}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\,,$$

а плечо нормальной реакции опоры равно

$$l_N = \frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

Тогда:

$$\mu N_1 \frac{a}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = (N_1 - \frac{\mu N_1}{\sin\alpha})\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,,$$

$$\mu \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\mu}{\sin\alpha}\,,$$

$$\mu = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sin\alpha}}\,.$$

Здесь $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$, а $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Подставим в выражение для μ тригонометрические функции:

$$\mu = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{\frac{a}{R}\sqrt{1 - (\frac{a}{2R})^2}}{\frac{a^2}{2R^2} + 1}$$

Критерии

1. Верно написан второй закон Ньютона (+ 1 балл).
2. Верно написано равенство моментов сил (+ 2 балла).
3. Приведён верный ответ (+ 2 балла).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 3. Кошка совершает прыжок с края стола высоты H, приобретая начальную скорость V_0, направленную под углом α к горизонту, таким что $\sin\alpha = \sqrt{2gH}/V_0$. Длина лап кошки равна l, при этом $l \ll H$. Приземление кошки на пол с коэффициентом трения μ происходит таким образом, что на кошку действует минимально возможная сила реакции опоры. Найдите тормозной путь кошки в двух случаях: а) коэффициент трения $\mu \ll \operatorname{ctg}\alpha$; б) коэффициент трения $\mu \gg \operatorname{ctg}\alpha$.

Возможное решение

Найдем проекции скорости перед приземлением кошки на горизонтальную и вертикальную оси – x и y.

$$v_x = v_0 \cos\alpha\,, \quad v_y = \sqrt{{v_0}^2 \sin\alpha^2 + 2gH}\,.$$

В процессе приземления кошка проходит путь равный длине лап (это следует из условия минимальности развиваемой лапами силы, также этим условием обеспечивается постоянство силы). Условие, что длина лап кошки много меньше высоты стола, дает право пренебречь работой силы тяжести в процессе приземления:

$$(N - mg)l = \frac{m{v_y}^2}{2} \quad \longrightarrow \quad N \approx \frac{2mgH}{l}\,.$$

Далее нам понадобится узнать, как связаны времена приземления и торможения кошки. Это будет определять, останавливалась ли кошка исключительно в процессе приземления или часть процесса торможения (возможно, почти все торможение) происходила уже после того, как приземление закончилось. Для этого оценим время приземления, полагая для простоты, что средняя скорость равна среднему арифметическому начальной скорости и конечной скорости v_1 (это упрощение не будет влиять на порядок величины)

$$t \approx \frac{2l}{v_y} = \frac{l}{\sqrt{gh}}\,.$$

Из закона изменения импульса найдем, как изменится горизонтальная скорость за время приземления:

$$F_{\text{тр}}t = mv_0\cos\alpha - mv_1 = m(v_0\cos\alpha - v_1) = m\Delta v\,,$$

$$\Delta v \approx \mu\frac{2gH}{l}\frac{l}{\sqrt{gH}} = 2\mu\sqrt{gH}\,.$$

В итоге для изменения горизонтальной скорости имеем оценку для двух случаев: случай а – торможение после приземления, случай б – во время приземления.

а) $\Delta v \ll v_0\cos\alpha$;

б) $\Delta v \gg v_0\cos\alpha$.

Тогда из ЗСЭ получаем тормозной путь $L_{\text{т}}$ в двух случаях:

$$\text{а) } L_{\text{т}}\mu mg = \frac{mv_0^2\cos\alpha^2}{2}\,,$$

$$L_{\text{т}} = \frac{v_0^2\cos\alpha^2}{2\mu g}\,.$$

$$\text{б) } L_{\text{т}}\mu N = \frac{mv_0^2\cos\alpha^2}{2} \quad \longrightarrow \quad L_{\text{т}}\frac{\mu 2mgH}{l} = \frac{mv_0^2\cos\alpha^2}{2}\,,$$

$$L_{\text{т}} = \frac{v_0^2\cos\alpha^2}{4\mu gH}\,.$$

Критерии

1. Верно найдена скорость кошки в момент падения (+ 1 балл).
2. Верно написана оценка на нормальную реакцию опоры (+ 1 балл).
3. Верно написана оценка на изменение горизонтальной скорости (+ 2 балла).
4. Найден тормозной путь для обоих случаев (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 4. Цилиндрический бачок высоты H содержит слой льда толщины $h = 4/5H$ при температуре $0°C$. В бачок наливают до полного заполнения объема цилиндра воду с температурой $50\ °C$, потом долго ждут, затем всю воду выливают. Какое минимальное число раз нужно повторить эту операцию, чтобы растопить весь лед. Считать, что теплообмена с окружающей средой нет. Теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг $\cdot°\ C$), плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Возможное решение

Для n-го раза наливания воды (толщина слоя h_n) напишем уравнение теплового баланса.

$$c_{\,в} T_1 \rho_{\,в} h_n S = \lambda \Delta h_n S \rho_{\,л}\,,$$

$$\Delta h_n = \frac{c_{\,в} T_1 \rho_{\,в} h_n}{\rho_{\,л}} = k h_n\,,$$

где k постоянная величина. Учтем, что установившаяся температура равна 0 градусов, при этом часть льда (толщины Δh_n) превратилась в воду, которую перед повторением операции с номером n+1 сольют. Площадь сечения сосуда S из уравнения сокращается. Заметим, что последовательность h_n образует геометрическую прогрессию

$$h_1 = H - h\,, \quad \Delta h_1 = kh_1\,; \quad h_2 = h_1 + kh_1\,, \quad \Delta h_2 = h_1(1+k)k\,; \quad \ldots \quad h_n = h_1(1+k)^{n-1}.$$

Формальным условием того, что весь лёд растаял, является толщина слоя воды большая, чем высота сосуда

$$h_{n+1} \geq H\,,$$

$$(H-h)(1+k)^n \geq \quad \longrightarrow \quad (1+k)^n \geq \frac{H}{H-h}\,.$$

В полученном неравенстве левая часть — растущая функция n, поэтому нужное наименьшее значение можно найти подбором. Отсюда нужно совершить операцию $n = 4$ раз.

Критерии

1. Верно написано уравнение теплового баланса (+ 1 балл).
2. Верно написана геометрическая прогрессия для толщины слоя льда (+ 2 балла).
3. Приведён верный ответ (+ 2 балла).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 5. У экспериментатора Глюка в наборе имеется батарейка с внутренним сопротивлением 1 Ом, при коротком замыкании через нее проходит ток 1 А. Также имеется четыре внешних разных резистора с сопротивлениями: 1,5 Ом, 2 Ом, 3 Ом, 6 Ом. Какой набор резисторов нужно составить и как нужно собрать электрическую схему из имеющихся элементов для выделения максимальной тепловой мощности на внешних резисторах? Чему равна эта мощность?

Возможное решение

Сначала поймем, к чему должно стремиться внешнее сопротивление R при подключении к батарейке с внутренним сопротивлением r, чтобы достичь выделения максимальной тепловой мощности в общем случае. Напишем закон Ома:

$$U = Ir + IR\,.$$

Тогда максимальная тепловая мощность на внешнем резисторе равна:

$$P = I^2R = \frac{U^2R}{(r+R)^2} = \frac{U^2}{\frac{r^2}{R} + 2r + R} = \frac{U^2}{f(R)}$$

Мощность P будет максимальна, когда функция $f(R)$ будет минимальна. Функция $f(R)$ является суммой гиперболической функции, линейной функции и константы. Такая функция имеет единственный минимум при $R > 0$. Предположим, что это минимум $R = r$. Докажем это. Предположим, мы увеличим минимум функции $f(R)$ на малую величину Δ, тогда:

$$P(r) - P(r+\Delta) = \frac{U^2r}{4r^2} - \frac{U^2(r+\Delta)}{(2r+\Delta)^2} = \frac{U^2r\Delta^2}{4r^2(2r+\Delta)^2} > 0$$

Значит, действительно, мощность максимальна при $R = r$. Из имеющихся в наборе резисторов нужно составить общее внешнее сопротивление максимально близкое. В нашем случае нужно выбрать резисторы с сопротивлениями, например: 2 Ом, 3 Ом, 6 Ом или 1,5 Ом и 3 Ом и подключить их параллельно, тогда внешнее сопротивление будет равняться внутреннему сопротивлению батарейки, равному 1 Ом. А максимальная тепловая мощность на внешнем сопротивлении в таком случае равна

$$P_{max} = \frac{U^2r}{(2r)^2} = \frac{I_0^2r}{4} = 0{,}25\ \text{Вт}\,.$$

Критерии

1. Получено, что максимальная мощность выделяется при равенстве сопротивлений, внутреннего и внешнего (+ 3 балла).
2. Найден верный набор резисторов (+ 1 балл).
3. Найдена максимальная мощность (+ 1 балла).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2021

Заключительный этап. 10 класс

Задача 1. Стена абсолютно упруга относительно воздействий вдоль нормали к ее поверхности. Поверхность стены также имеет коэффициент трения $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$. В стену бросают абсолютно твердый кубик так, что одна грань кубика параллельна стене, а скорость кубика $\vec{v}$ составляет угол α с нормалью к поверхности. Найдите зависимость угла β, под которым кубик отскакивает от стены, от угла α. Постройте качественный график функции $\beta(\alpha)$.

Возможное решение

При упругом соударении кубика со стенкой составляющая импульса кубика, нормальная к стенке, изменится на величину:

$$\Delta p_\perp = 2p_\perp.$$

Составляющая импульса параллельная плоскости стенки изменится из-за силы трения:

$$\Delta p_\parallel = F_{\text{тр}}\Delta t.$$

С другой стороны сила трения пропорциональна по модулю силе реакции стенки: $F_{\text{тр}} = \mu N$, где N - сила реакции стены. За время соударения Δt сила реакции меняет нормальную компоненту импульса кубика на $\Delta p_\perp$, следовательно сила трения, пропорциональная по модулю силе реакции в каждый момент времени, изменит другую компоненту импульса на $\mu\Delta p_\perp$ (по модулю). Однако сила трения действует на кубик только до тех пор, пока у него есть ненулевая компонента скорости вдоль поверхности кубика. Поэтому возникает два значимых случая:

$$1)\ \ \mu\Delta p_\perp < p_\parallel.$$

В этом случае после соударения новые компоненты импульса будут $p'_\perp = -p_\perp, p'_\parallel = p_\parallel - 2\mu p_\perp$

$$2)\ \ \mu\Delta p_\perp > p_\parallel.$$

Очевидно, что сила трения не может разгонять кубик в обратную сторону, следовательно во время соударения компонента $p_\parallel$ зануляется, и новые компоненты импульса будут: $p'_\perp = -p_\perp, p'_\parallel = 0$
Теперь можно вычислить углы отражения для каждого из случаев:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|p'_\parallel|}{|p'_\perp|}.$$

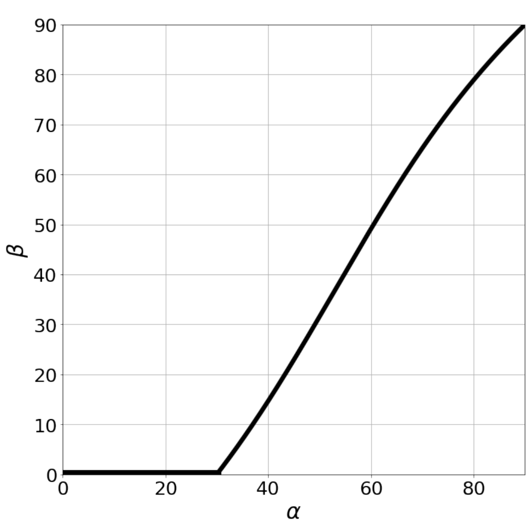
В случае 1 имеем:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|p'_\parallel|}{|p'_\perp|} = \frac{p_\parallel - 2\mu p_\perp}{p_\perp} = \operatorname{tg}\alpha - 2\mu.$$

Подставляя значение μ, получаем

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}30^\circ.$$

Случай 2 отвечает $\operatorname{tg}\beta = 0$, при этом в случае, когда $\mu\Delta p_\perp = p_\parallel$, как раз оказывается, что $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}30^\circ$, так что зависимость угла отражения от угла падения непрерывна.

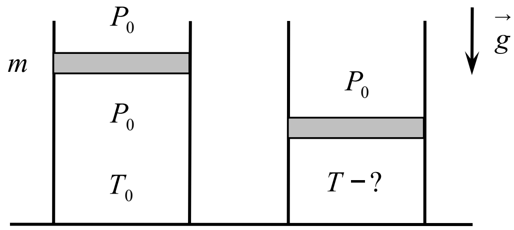


Критерии

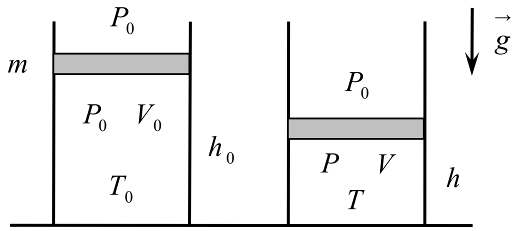
1. Найдена связь изменения тангенциального импульса с силой трения (+ 1 балл).
2. Найдена связь силы трения с силой реакции опоры (+ 1 балл).
3. Найдена связь силы реакции опоры с изменением импульса вдоль нормали (+ 1 балл).
4. Получена верная аналитическая связь между углами α и β (+ 1 балл).
5. Верно построена зависимость $\beta(\alpha)$ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 2. Вакуумная камера большого объёма заполнена воздухом при давлении $P_0 = 1$ кПа. В камере расположен высокий вертикальный цилиндр площадью поперечного сечения $S = 100$ см^2. Сверху цилиндр закрыт поршнем массой $m = 2$ кг. Под поршнем находится гелий при температуре $T_0 = 300$ К. В начальном состоянии поршень закреплён, давление гелия также равно P_0. Поршень отпускают, и через некоторое время система переходит в конечное равновесное состояние. Найдите температуру T гелия в этом состоянии. Числовой ответ выразите в кельвинах и округлите до целого значения. Стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, поршень движется без трения, давление воздуха в камере постоянно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



Пусть V_0 и V — начальный и конечный объёмы гелия, P — конечное давление, h_0 и h — начальная и конечная высоты поршня над дном цилиндра:

$$V_0 = Sh_0\,, \quad V = Sh\,.$$

Запишем первое начало термодинамики для гелия:

$$0 = \frac{3}{2}\,\nu RT - \frac{3}{2}\,\nu RT_0 + A\,,$$

ν — число молей, A — работа силы давления гелия на поршень. Рассмотрим баланс энергии для поршня:

$$mg\,(h - h_0) = A + A_0\,.$$

В левой части этого уравнения стоит приращение механической энергии поршня, в правой части — сумма работ сил давления. A_0 — работа постоянной силы внешнего давления P_0S. Учитывая, что поршень перемещается вниз на расстояние $(h_0 - h)$, получаем:

$$A_0 = P_0S\,(h_0 - h)\,, \quad A = mg\,(h - h_0) - A_0 = (h - h_0)\,(P_0S + mg)\,.$$

Подставим выражение для A в уравнение первого начала термодинамики:

$$0 = \frac{3}{2}\,\nu RT - \frac{3}{2}\,\nu RT_0 + (h - h_0)\,(P_0S + mg)\,.$$

Соберём в левой части уравнения слагаемые, относящиеся к конечному состоянию, в правой части — к начальному:

$$\frac{3}{2}\,\nu RT + (P_0S + mg)\,h = \frac{3}{2}\,\nu RT_0 + (P_0S + mg)\,h_0\,.$$

Запишем условие равновесия поршня в конечном состоянии:

$$PS = P_0S + mg\,.$$

Из уравнения состояния гелия имеем:

$$(P_0S + mg)\,h = PSh = PV = \nu RT\,,$$

$$P_0V_0 = P_0Sh_0 = \nu RT_0 \quad \longrightarrow \quad h_0 = \frac{\nu RT_0}{P_0S}\,.$$

Получаем:

$$\frac{3}{2}\,\nu RT + \nu RT = \frac{3}{2}\,\nu RT_0 + (P_0S + mg)\,\frac{\nu RT_0}{P_0S} \quad \longrightarrow \quad \frac{5}{2}\,T = \frac{3}{2}\,T_0 + T_0\left(1 + \frac{mg}{P_0S}\right),$$

$$\frac{5}{2}\,T = \frac{5}{2}\,T_0 + T_0\,\frac{mg}{P_0S} \quad \longrightarrow \quad T = T_0\left(1 + \frac{2\,mg}{5\,P_0S}\right).$$

Подставим числовые значения в системе СИ:

$$T = 300\left(1 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 10}{5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}\right) = 300 \cdot \frac{9}{5} = 540\ \text{К}.$$

Следует отметить, что в данной задаче нельзя пользоваться уравнением адиабаты, поскольку рассматриваемый процесс является необратимым. Значение температуры T, найденное из этого уравнения, сильно отличается от значения, полученного выше. Учитывая, что для гелия показатель адиабаты $\gamma = 5/3$, имеем:

$$PV^{\,\gamma} = \text{const} \quad \longrightarrow \quad \frac{T^{\,\gamma}}{P^{\,\gamma-1}} = \text{const}\,,$$

$$\frac{T^{\,\gamma}}{P^{\,\gamma-1}} = \frac{T_0^{\gamma}}{P_0^{\gamma-1}} \quad \longrightarrow \quad T = T_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{mg}{P_0S} = 3\,, \quad \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{2}{5} \quad \longrightarrow \quad T = 300 \cdot 3^{\,2/5} = 466\ \text{К}.$$

Критерии

1. Верно записано первое начало термодинамики для гелия (+ 1 балл).
2. Верно получено выражение для работы силы давления газа над поршнем (+ 1 балл).
3. Верно написано уравнение состояния гелия (+ 1 балл).
4. Верно получена температура гелия в конечном состоянии (+ 1 балл).
5. Приведен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 3. Картофельная пушка, стреляющая горизонтально, представляет собой полуоткрытый цилиндр с площадью поперечного сечения $S = 120$ см^2. Когда из пушки стреляют, картофель находится в состоянии покоя, объем между концом цилиндра и картофелем составляет $V_0 = 3100$ см^3, а давление газа в этом объеме составляет $P_0 = 9 \cdot 10^5$ Па. Газ в баллоне двухатомный: $C_v = 5R/2$ и $C_p = 7R/2$. (Возможно стоит убрать). Картофель движется вниз по цилиндру достаточно быстро, чтобы газ не передавал тепло. Трение между картофелем и бочкой незначительно, а утечка газа вокруг картофеля отсутствует. Параметры P_0, V_0 и S фиксированы, но общая длина L не фиксирована. Атмосферное давление – $P_{\text{атм}} = 10^5$ Па.

1) Какова максимальная кинетическая энергия E_{max}, с которой картофель может вылететь из бочки?

2) Какова длина L в этом случае?

Возможное решение

Пока давление внутри цилиндрической пушки больше, чем давление воздуха извне, картофель будет ускоряться. Следовательно, максимальная энергия будет передана картофелю, если цилиндр будет достаточно длинным для того, чтобы конечное давление внутри цилиндра составляло P_{atm}. Для идеального газа верно $PV = \nu RT$, а энергия идеального двухатомного газа равна

$$E = C_v \nu T.$$

Обозначим полный объём цилиндра как V_f. Максимальная энергия передается картофелю, когда конечное давление составляет атмосферное, поэтому работа, выполняемая газом над картофелем, составляет

$$A = C_v(P_0V_0 - P_{atm}V_f).$$

Но картофель движется против воздуха, поэтому фактическая энергия для картофеля

$$E_{max} = C_v(P_0V_0 - P_{atm}V_f) - P_{atm}(V_f - V_0).$$

Связь, определяющая V_f, связана с адиабатическим расширением для $\gamma = C_p/C_v$:

$$V_f = V_0 \Big(\frac{P_0}{P_{atm}}\Big)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Подставляя это выражение в уравнение выше, получаем конечное выражение для энергии:

$$E_{max} = V_0\Big(\frac{5}{2}P_0 + P_{atm} - \frac{7}{2}P_{atm}^{2/7}P_0^{5/7}\Big) = 2078 \text{ Дж}.$$

Длина трубы определяется как отношение полного объёма цилиндрической пушки к площади её сечения:

$$L = \frac{V_f}{S} = \frac{V_0}{S}\left(\frac{P_0}{P_{atm}}\right)^{5/7} \approx 124 \text{ см}.$$

Критерии

1. Верно написано выражение для энергии газа (+ 1 балл).

2. Верно получено выражение для работы, выполняемой газом над картофелем в процессе выстрела (+ 1 балл).

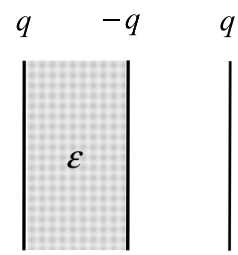
3. Верно написано выражение для полного объёма цилиндра (+ 1 балл).

4. Верно найдено выражение для максимальной кинетической энергии, с которой может вылететь картошка, и приведен верный численный ответ (+ 1 балл).

5. Верно найдена длина пушки и приведен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 4. Три одинаковые тонкие проводящие пластины расположены параллельно друг другу на равных расстояниях. Каждая из крайних пластин несёт заряд q, заряд средней пластины равен $(-q)$. Всё пространство между левой и средней пластинами заполняют твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 4$ и соединяют крайние пластины тонким проводом (провод не касается средней пластины). Найдите отношение $x = q_1/q_2$, где q_1 и q_2 — установившиеся заряды левой и правой пластин.



Возможное решение

По закону сохранения заряда имеем:

$$q_1 + q_2 = 2\,q.$$

Введём поверхностные плотности зарядов на пластинах:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S}\,, \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{S}\,, \quad \sigma = \frac{q}{S}\,,$$

S — площадь пластин. Обозначим цифрой 1 область между левой и средней пластинами, цифрой 2 — область между средней и правой. Направим ось x от левой пластины к правой. Напряжённость электрического поля между пластинами направлена по или против этой оси. Для проекции напряжённости на ось x в области 1 имеем:

$$E_{1x} = \frac{\sigma_1 + \sigma - \sigma_2}{2\,\varepsilon\,\varepsilon_0}\,,$$

ε_0 — электрическая постоянная. В области 2:

$$E_{2x} = \frac{\sigma_1 - \sigma - \sigma_2}{2\,\varepsilon_0}.$$

Мысленно перенесём положительный пробный заряд e вдоль оси x с левой пластины на правую. При этом работа сил электрического поля равна:

$$A = eE_{1x}d + eE_{2x}d = ed\,(\,E_{1x} + E_{2x}\,)\,,$$

d — расстояние между соседними пластинами. Та же работа может быть записана в виде:

$$A = e\,(\,\varphi_1 - \varphi_2\,)\,,$$

φ_1 и φ_2 — потенциалы левой и правой пластин. Приравнивая выражения для работы, получаем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = d\,(\,E_{1x} + E_{2x}\,).$$

Крайние пластины, соединённые проводом, образуют единый проводник, потенциал которого одинаков во всех его точках. Поэтому:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \to \quad E_{1x} + E_{2x} = 0.$$

Подставляя сюда выражения для напряжённостей и переходя к зарядам пластин, получаем:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma - \sigma_2}{\varepsilon} + \sigma_1 - \sigma - \sigma_2 = 0 \quad \to \quad q_1 + q - q_2 + \varepsilon\,(\,q_1 - q - q_2\,) = 0\,,$$

$$(\,q_1 - q_2\,)\,(\,\varepsilon + 1\,) = q\,(\,\varepsilon - 1\,) \quad \to \quad q_1 - q_2 = \frac{q\,(\,\varepsilon - 1\,)}{\varepsilon + 1}.$$

Таким образом, имеем систему двух уравнений для двух неизвестных зарядов q_1 и q_2:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 &= 2\,q \\ q_1 - q_2 &= q\,(\,\varepsilon - 1\,)/(\,\varepsilon + 1\,) \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения, получаем:

$$q_1 = \frac{q\,(\,3\,\varepsilon + 1\,)}{2\,(\,\varepsilon + 1\,)}\,, \quad q_2 = \frac{q\,(\,\varepsilon + 3\,)}{2\,(\,\varepsilon + 1\,)}.$$

Отношение зарядов равно:

$$x = \frac{q_1}{q_2} = \frac{3\,\varepsilon + 1}{\varepsilon + 3} = \frac{13}{7} = 1,86.$$

Критерии

1. Верно записано выражение для напряженностей электрического поля вдоль оси X в областях $1, 2$ (+ 1 балл).

2. Получена связь между работой сил электрического поля и напряженностей электрического поля вдоль оси X в областях $1, 2$ (+ 1 балл).

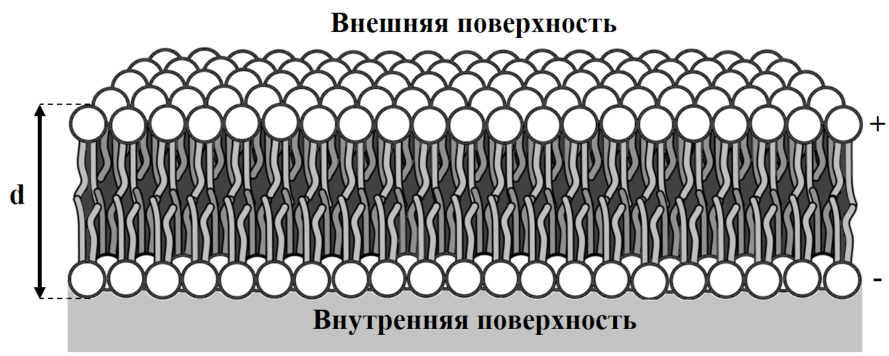
3. Приведен верный закон сохранения заряда (+ 1 балл).

4. Верно получены выражения для зарядов q_1, q_2 (+ 1 балл).

5. Приведен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 5. Стенка нейрона состоит из эластичной двуслойной липидной мембраны, которая сопротивляется сжатию так же, как пружина. Она имеет эффективную жесткость k и равновесную толщину d_0. Локально рассмотрим участок мембраны, имеющий незначительную кривизну, у которого площадь поверхности каждого из двух слоев равна S. В стенках клетки находятся специальные белковые ионные помпы, которые могут перемещать различные ионы через мембрану. В результирующем заряженном состоянии в межклеточной среде положительный и отрицательный ионный заряд равномерно распределяется вдоль внешней и внутренней поверхностей мембраны соответственно. После того как ионные насосы проделали некоторую работу, на внешней и внутренней поверхностях наводится заряд, поэтому толщина мембраны изменяется до некоторого нового значения. Предположим, что ионные помпы включаются, когда мембрана незаряжена, а мембрана заряжается достаточно медленно (квазистатически). Помпы прекращают работу в случае, если разность напряжений на мембране станет больше определенного порогового значения V_n. Насколько должна быть велика жесткость пружины k, чтобы ионные помпы отключились до того, как мембрана разрушится? Диэлектрическая проницаемость мембраны ε.



Возможное решение

В первую очередь определим напряжение между двумя слоями мембраны нейрона $U = Ed$. Для этого потребуется определить напряженность электрического поля внутри мембраны и измененное после наведения заряда расстояние между её слоями. Одна пластина площадью S с распределенным на ней зарядом, модуль которого обозначим за Q, согласно теореме Гаусса создает электрическое поле напряженностью

$$E_1 = \frac{Q}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Значит, сила, возникающая между двумя такими слоями, будет равна

$$F_E = QE_1 = \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Данная сила уравновешивается силой, возникающей при сжатии мембраны: $F_k = kx$, где $x = d_0 - d$. Приравнивая выражения, получим новое расстояние между слоями:

$$d = d_0 - \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 Sk}.$$

В свою очередь поле внутри мембраны между слоями характеризуется напряженностью

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} - \frac{-Q}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Значит, напряжение в области между слоями мембраны равно:

$$V = Ed = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}\left(d_0 - \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 Sk}\right).$$

Как мы видим, данное выражение зависит от модуля заряда Q кубически. Изучив данную функцию, заметим, что с ростом заряда на поверхности мембраны, связанным с работой ионной помпы, напряжение будет расти и достигнет определенного максимума V_{max}, после чего будет уменьшаться. Ионная помпа прекратит работу, если $V_{max} > V_n$, в противном случае помпы продолжат перегонять ионы одного типа на противоположную сторону до тех пор, пока увеличившийся заряд не разрушит клеточную мембрану (в таком случае d станет равно 0). Тогда найдем V_{max}, продифференцировав функцию напряжения от заряда (аналогичные рассуждения можно проводить, рассматривая зависимость $V(d)$):

$$\frac{dV}{dQ} = \frac{d_0}{\varepsilon\varepsilon_0 S} - \frac{3Q^2}{2\varepsilon^2\varepsilon_0^2 S^2 k} = 0 \Rightarrow Q_{max} = \sqrt{\frac{2d_0\varepsilon\varepsilon_0 Sk}{3}} \Rightarrow V_{max} = \frac{2d_0}{3}\sqrt{\frac{2kd_0}{3\varepsilon\varepsilon_0 S}} = \left(\frac{2d_0}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{k}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}.$$

Ограничивая полученное выражение с помощью V_n и возводя выражение в квадрат, получим граничное выражение для жесткости k:

$$k > \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{V_n^2 \varepsilon\varepsilon_0 S}{d_0^3}.$$

Критерии

1. Верно записаны силы, действующие на мембрану и найдено выражение для напряженности электрического поля, создаваемого одним слоем мембраны (+ 1 балл).

2. Верно найдена зависимость $d(Q)$ (+ 1 балл).

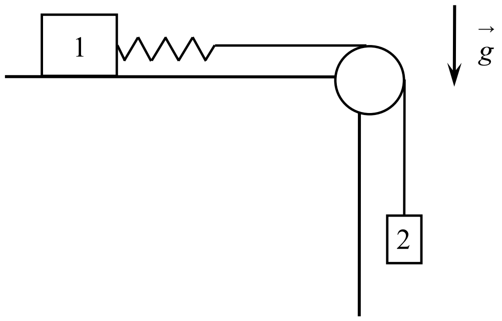
3. Верно найдена зависимость $V(Q)$ (+ 1 балл).

4. Верно найден экстремум зависимости $V(Q)$ - точка (Q_{max}, V_{max}) (+ 1 балл).

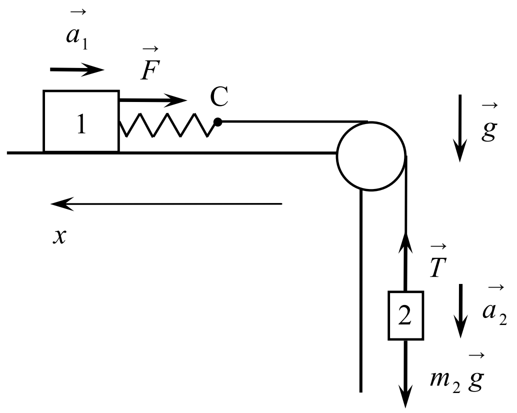
5. Записано конечное верное ограничение на жесткость мембраны k (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 1. На краю горизонтального стола закреплена труба, через которую переброшена длинная нерастяжимая нить. Горизонтальный конец нити привязан к невесомой пружине, прикреплённой к грузу 1. На вертикальном конце нити подвешен груз 2. В начальном положении груз 1 удерживают, груз 2 неподвижен, удлинение пружины равно x_1. Груз 1 отпускают без толчка. Найдите минимальное значение x_2 удлинения пружины при дальнейшем движении грузов. Известно отношение масс грузов $\beta = m_1/m_2 = 7/4$. Ответ выразите в виде отношения x_2/x_1 и округлите до сотых. Массу нити, массу пружины и трение не учитывайте.



Возможное решение



Рассмотрим начальное положение, в котором груз 1 неподвижен. В этом случае сила тяжести, действующая на груз 2, уравновешивается силой натяжения нити, которая равна силе упругости, возникающей в пружине:

$$m_2\, g = k\, x_1 \quad \longrightarrow \quad x_1 = \frac{m_2\, g}{k}\,.$$

Здесь k — жёсткость пружины. Обозначим через $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ ускорения грузов в неподвижной системе отсчёта, связанной со столом. Для дальнейшего ось x этой системы удобно направить влево. Запишем второй закон Ньютона для грузов:

$$m_1\, a_{1x} = -F\,, \quad m_2\, a_2 = m_2\, g - T\,,$$

a_{1x} — проекция ускорения $\overrightarrow{a_1}$ на ось x, F — абсолютная величина силы упругости, действующей на груз 1 со стороны пружины, T — абсолютная величина силы натяжения нити. Так как нить и пружина невесомы, то

$$T = F\,.$$

Рассмотрим движение точки C, в которой нить прикреплена к пружине. Вектор ускорения $\overrightarrow{a_c}$ этой точки направлен вправо и по абсолютной величине равен a_2. Представим ускорение $\overrightarrow{a_1}$ в виде:

$$\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a}'\,,$$

где $\overrightarrow{a}'$ — ускорение груза 1 в системе отсчёта, связанной с точкой C. В проекциии на ось x имеем:

$$a_{1x} = -a_2 + a'_x \,.$$

Из написанных выше соотношений получаем:

$$a_2 = g - \frac{T}{m_2} = g - \frac{F}{m_2}\,,$$

$$m_1\,(-a_2 + a'_x) = -F \quad \to \quad -m_1\,g + F\,\frac{m_1}{m_2} + m_1\,a'_x = -F\,,$$

$$m_1\,a'_x = -F\,\frac{m_1 + m_2}{m_2} + m_1\,g\,.$$

Введём величину μ, имеющую размерность массы:

$$\mu = \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Тогда последнее уравнение принимает вид:

$$\mu\,a'_x = -F + \mu\,g\,.$$

Таким образом, исходная задача сведена к более простой задаче о движении одного груза массой μ под действием силы упругости и силы тяжести. Очевидно, что такой груз колеблется около положения равновесия. Найдём удлинение пружины x_p в этом положении:

$$k\,x_p = \mu\,g \quad \to \quad x_p = \frac{\mu\,g}{k} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,x_1\,.$$

Максимальное отклонение A от положения равновесия (амплитуда колебаний) равно:

$$A = x_1 - x_p = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)\,x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,x_1\,.$$

Для минимального удлинения пружины получаем:

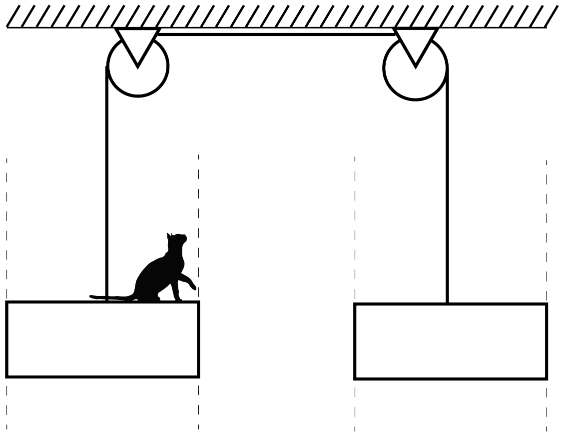
$$x_2 = x_p - A = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,x_1\,,$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = \frac{3}{11} = 0{,}27$$

Критерии

1. Верно написан второй закон Ньютона для грузов (+ 1 балл).
2. Верно рассмотрено ускорение точки C относительно ускорения первого груза (+ 2 балла).
3. Задача сведена к задаче о гармонических колебаниях груза массой μ (+ 3 балла).
4. Верно найдена амплитуда колебаний (+ 1 балла).
5. Верно найдено минимальное значение удлинения пружины при дальнейшем движении грузов и получен верный численный ответ (+ 3 балла).

Задача 2. Кот Фотон прыгает с одной платформы на другую, которые соединены между собой натянутой невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через идеальные блоки. Платформы могут скользить без трения вдоль вертикальных направляющих. Масса каждой платформы M. Известно, что Фотон умеет перепрыгивать пятикратное расстояние между платформами прыгая с твердой горизонтальной поверхности земли. Какую максимальную массу может иметь Фотон, чтобы допрыгнуть до второй платформы? Под каким углом к горизонту в этом случае ему надо прыгнуть? Перед прыжком платформы покоятся и удерживаются на одном уровне. Смещением платформы в процессе отталкивания пренебречь.



Возможное решение

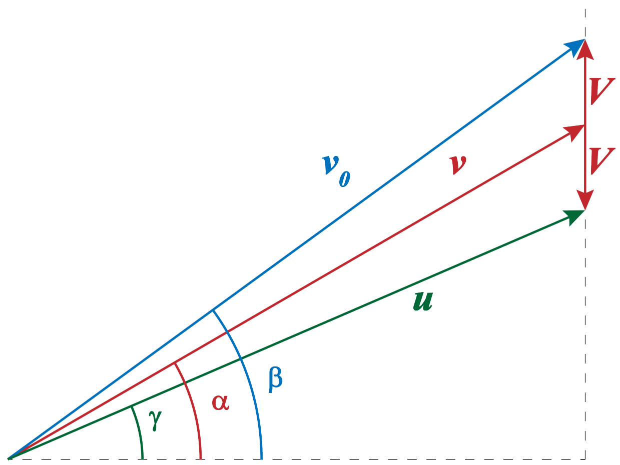
В процессе отталкивания кота Фотона от платформы (далее будем называть эту платформу первой, а платформу на которую кот приземляется — второй) выполняется закон сохранения импульса по вертикали

$$mv\sin\alpha - MV = P_T,$$

где P_T — импульс силы натяжения нити. Для второй платформы, учитывая невесомость и нерастяжимость нити:

$$P_T = MV.$$

Исключая импульсы сил из уравнений, получим $V = \frac{m}{2M}v\sin\alpha = \lambda v\sin\alpha$. Пока кот летит с первой платформы на вторую, платформы двигаются вертикально с постоянными скоростями, и могут быть рассмотрены как инерциальные системы отсчета. Красным на рисунке обозначены величины в



лабораторной системе отсчета, синим — в системе первого блока, зеленым — второго. Для проекций скоростей можем записать следующие соотношения:

$$\begin{cases} v_0\cos\beta = v\cos\alpha = u\cos\gamma & \text{(по горизонтали)} \\ v_0\sin\beta - V = v\sin\alpha = u\sin\gamma + V & \text{(по вертикали)} \end{cases}$$

Сформулируем требования задачи в терминах скоростей. Для того, чтобы кот Фотон (в случае максимальной массы) смог допрыгнуть до второй платформы, должно выполняться $\frac{2u^2}{g}\sin\gamma\cos\gamma = L$. Умение перепрыгивать пятикратное расстояние ($k = 5$) выразится в величине скорости прыжка относительно первой платформы $\frac{v_0^2}{g} = kL$.

Выразим все величины через v и α и решим эту систему уравнений относительно λ. Получим

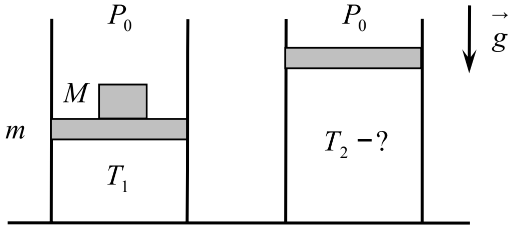
$$\lambda = -1 - \frac{5}{tg\alpha} + 2\sqrt{\frac{1}{tg\alpha}(\frac{6}{tg\alpha} + 5)}$$

Это выражение достигает максимума при искомом угле прыжка $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$, а $\lambda = \frac{2}{3}$. Отсюда максимальная масса кота Фотона равна $m = \frac{4}{3}M$.

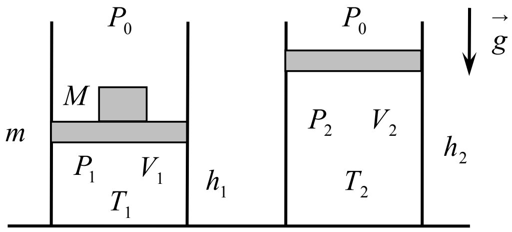
Критерии

1. Верно написаны законы сохранения импульса для платформ и кота Фотона (+ 1 балл).
2. Верно написано выражение для максимальной скорости кота Фотона в инерциальной системе отсчета (+ 1 балл).
3. Верно написаны соотношения проекций скоростей в разных системах отсчета (+ 2 балла).
4. Получена зависимость отношения масс кота Фотона и двух платформ от угла прыжка (+ 4 балла).
5. Найден угол прыжка в одной из систем отсчета (+ 1 балл).
6. Найдена максимальная масса кота Фотона (+ 1 балл).

Задача 3. Вакуумная камера большого объёма заполнена воздухом при давлении $P_0 = 1$ кПа. В камере расположен высокий вертикальный цилиндр площадью поперечного сечения $S = 100$ см^2. Сверху цилиндр закрыт поршнем массой $m = 1$ кг, на котором стоит груз массой $M = 2$ кг. Под поршнем находится гелий при температуре $T_1 = 300$ К. В начальном состоянии давление гелия уравновешивает внешнее давление. Груз убирают, и через некоторое время система переходит в конечное равновесное состояние. Найдите температуру T_2 гелия в этом состоянии. Числовой ответ выразите в кельвинах и округлите до целого значения. Стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, поршень движется без трения, давление воздуха в камере постоянно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



Пусть P_1 и P_2 — начальное и конечное давления гелия, V_1 и V_2 — начальный и конечный объёмы, h_1 и h_2 — высоты поршня над дном цилиндра:

$$V_1 = Sh_1\,, \quad V_2 = Sh_2\,.$$

Запишем первое начало термодинамики для гелия:

$$0 = \frac{3}{2}\,\nu RT_2 - \frac{3}{2}\,\nu RT_1 + A\,,$$

ν — число молей, A — работа силы давления гелия на поршень. Рассмотрим баланс энергии для поршня:

$$mg\,(h_2 - h_1) = A + A_0\,.$$

В левой части этого уравнения стоит приращение механической энергии поршня, в правой части — сумма работ сил давления. A_0 — работа постоянной силы внешнего давления P_0S. Учитывая, что поршень перемещается вверх на расстояние $(h_2 - h_1)$, получаем:

$$A_0 = -P_0S\,(h_2 - h_1)\,, \quad A = mg\,(h_2 - h_1) - A_0 = (h_2 - h_1)\,(P_0S + mg)\,.$$

Подставим выражение для A в уравнение первого начала термодинамики:

$$0 = \frac{3}{2}\,\nu RT_2 - \frac{3}{2}\,\nu RT_1 + (h_2 - h_1)\,(P_0S + mg)\,.$$

Соберём в левой части уравнения слагаемые, относящиеся к конечному состоянию, в правой части — к начальному:

$$\frac{3}{2}\,\nu RT_2 + (P_0S + mg)\,h_2 = \frac{3}{2}\,\nu RT_1 + (P_0S + mg)\,h_1\,.$$

Запишем условия равновесия поршня:

$$P_1 S = P_0 S + (m+M)\,g\,, \quad P_2 S = P_0 S + mg\,.$$

Из уравнения состояния гелия имеем:

$$P_1 V_1 = P_1 S h_1 = \nu R T_1 \quad \longrightarrow \quad h_1 = \frac{\nu R T_1}{P_1 S} = \frac{\nu R T_1}{P_0 S + (m+M)\,g}\,,$$

$$(P_0 S + mg)\,h_2 = P_2 S h_2 = P_2 V_2 = \nu R T_2\,.$$

Получаем:

$$\frac{3}{2}\nu R T_2 + \nu R T_2 = \frac{3}{2}\nu R T_1 + \frac{(P_0 S + mg)\,\nu R T_1}{P_0 S + (m+M)\,g} \quad \longrightarrow \quad \frac{5}{2}T_2 = \frac{3}{2}T_1 + T_1\left(1 - \frac{Mg}{P_0 S + (m+M)\,g}\right)\,,$$

$$\frac{5}{2}T_2 = \frac{5}{2}T_1 - T_1\frac{Mg}{P_0 S + (m+M)\,g} \quad \longrightarrow \quad T_2 = T_1\left(1 - \frac{2}{5}\cdot\frac{Mg}{P_0 S + (m+M)\,g}\right)\,.$$

Подставим числовые значения в системе СИ:

$$T = 300\left(1 - \frac{2}{5}\cdot\frac{2\cdot 10}{10^3\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10}\right) = 300\cdot\frac{4}{5} = 240\text{ K}$$

Следует отметить, что в данной задаче нельзя пользоваться уравнением адиабаты, поскольку рассматриваемый процесс является необратимым. При этом значение температуры T_2, найденное из этого уравнения, не очень сильно отличается от значения, полученного выше. Учитывая, что для гелия показатель адиабаты $\gamma = 5/3$, имеем:

$$PV^{\gamma} = \text{const} \quad \longrightarrow \quad \frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = \text{const}\,,$$

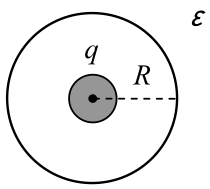
$$\frac{T_2^{\gamma}}{P_2^{\gamma-1}} = \frac{T_1^{\gamma}}{P_1^{\gamma-1}} \quad \longrightarrow \quad T_2 = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\,,$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_0 S + mg}{P_0 S + (m+M)\,g} = \frac{1}{2}\,, \quad \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{2}{5} \quad \longrightarrow \quad T_2 = \frac{300}{2^{2/5}} = 227\text{ K}$$

Критерии

1. Верно написано первое начало термодинамики для гелия (+ 2 балл).
2. Верно написана работа силы давления гелия на поршень (+2 балл).
3. Верно написаны условия равновесия поршня (+ 2 балла).
4. Верно написано уравнение состояния гелия (+ 2 балла).
5. Найдена температура гелия в конечном состоянии (+ 1 балл).
6. Получен численный ответ (+ 1 балл).

Задача 4. Твердый однородный диэлектрик с проницаемостью $\varepsilon = 3$ заполняет всё пространство за исключением сферической полости радиуса $R = 5$ см. В полости находится металлический шар, несущий заряд $q = 10$ нКл. Радиус шара меньше радиуса полости, центры шара и полости совпадают. Найдите электрическое давление P на поверхность полости (силу, действующую на единицу площади поверхности со стороны электрического поля). Ответ выразите в миллипаскалях и округлите до десятых. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



Возможное решение

Мысленно увеличим радиус полости на малую величину ΔR, подействовав изнутри на её поверхность силами давления P. Работа этих сил определяется "газовой" формулой

$$A = P\Delta V\,,$$

где ΔV — приращение объёма полости:

$$\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R\,.$$

С другой стороны, работа A равна приращению энергии электрического поля:

$$A = \Delta W\,.$$

Представим шар с диэлектриком как сферический конденсатор, обкладками которого являются сам шар и проводяшая сфера бесконечно большого радиуса. Если принять потенциал сферы за нуль, то напряжение на конденсаторе равно потенциалу шара φ. Тогда энергия поля равна:

$$W = \frac{q\varphi}{2}\,.$$

Обозначим через Q поляризационный заряд, индуцированный электрическим полем шара на поверхности полости. Для того чтобы найти его, рассмотрим в диэлектрике некоторую точку, лежащую на расстоянии r от центра шара. Напряжённость электрического поля в этой точке равна:

$$E = \frac{k\,q}{\varepsilon\, r^2}\,, \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,.$$

Физической причиной ослабления поля в диэлектрике является наличие заряда Q , действие которого частично компенсирует электрическое поле шара. Поэтому заменим диэлектрик сферой радиуса R, несущей заряд Q. Тогда для напряжённости поля в диэлектрике имеем:

$$E = \frac{k\,q}{r^2} + \frac{k\,Q}{r^2} = \frac{k\,(q+Q)}{r^2}\,.$$

Приравнивая два выражения для E, находим заряд Q:

$$\frac{k\,q}{\varepsilon\, r^2} = \frac{k\,(q+Q)}{r^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{q}{\varepsilon} = q + Q \quad \longrightarrow \quad Q = \frac{q}{\varepsilon} - q = -q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = -\frac{q\,(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}\,.$$

Обозначим через ρ радиус шара. Тогда потенциал шара равен:

$$\varphi = \frac{k\,q}{\rho} + \frac{k\,Q}{R} = k\,q\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon\, R}\right)\,.$$

Энергия поля равна:

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{k\,q^2}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon\,R}\right).$$

Считая энергию поля функцией радиуса полости R, получаем:

$$\Delta\,W = W\left(R + \Delta\,R\right) - W\left(R\right) = \frac{k\,q^2\left(\varepsilon - 1\right)}{2\,\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + \Delta\,R}\right) = \frac{k\,q^2\left(\varepsilon - 1\right)\Delta\,R}{2\,\varepsilon\,R\left(R + \Delta\,R\right)} \approx \frac{k\,q^2\left(\varepsilon - 1\right)\Delta\,R}{2\,\varepsilon\,R^2}.$$

Радиус шара в этом выражении выпадает. Приравнивая два выражения для работы A, находим электрическое давление:

$$P \cdot 4\pi R^2 \Delta\,R = \frac{k\,q^2\left(\varepsilon - 1\right)\Delta\,R}{2\,\varepsilon\,R^2} \quad \longrightarrow \quad P = \frac{k\,q^2\left(\varepsilon - 1\right)}{8\,\pi\,\varepsilon\,R^4} = \frac{q^2\left(\varepsilon - 1\right)}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,\varepsilon\,R^4}$$

Подставим числовые значения в системе СИ:

$$P = \frac{10^{-16} \cdot 2}{32\,\pi^2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 10^{-8}} = 3{,}8 \text{ мПа}$$

Приращение энергии поля можно вычислить по–другому, воспользовавшись формулой для плотности энергии:

$$u = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon\,E^2}{2}.$$

При увеличении радиуса полости напряжённость и плотность энергии меняются только в слое объёма $\Delta\,V$. Если радиус полости равен R, то слой заполнен диэлектриком и плотность энергии равна:

$$u_1 = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,\varepsilon\,R^2}\right)^2 = \frac{q^2}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,\varepsilon\,R^4}.$$

После того как радиус полости увеличился на $\Delta\,R$, диэлектрика в слое уже нет и плотность энергии равна:

$$u_2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,R^2}\right)^2 = \frac{q^2}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,R^4}.$$

Для приращения энергии поля получаем:

$$\Delta\,W = u_2\,\Delta\,V - u_1\,\Delta\,V = \left(u_2 - u_1\right)\Delta\,V.$$

Теперь находим электрическое давление:

$$A = \Delta\,W \quad \longrightarrow \quad P\Delta\,V = \left(u_2 - u_1\right)\Delta\,V,$$

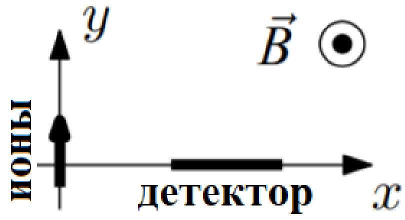
$$P = u_2 - u_1 = \frac{q^2}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,R^4}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{q^2\left(\varepsilon - 1\right)}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,\varepsilon\,R^4}$$

Получился тот же ответ.

Критерии

1. Представлена идея нахождения работы силы, действующей со стороны электрического поля, по термодинамической аналогии. (+ 2 балла).
2. Верно написано выражение для работы через приращение энергии (+1 балл).
3. Представлена идея, о том что в условиях задачи шар с диэлектриком можно рассматривать как сферический конденсатор (+ 2 балла).
4. Верно найден потенциал шара (+ 4 балла).
5. Физически верными рассуждениями получен верный формульный и численный ответ (+ 1 балл).

Задача 5. Методом масс-спектрометрии в лаборатории был проведен эксперимент по исследованию некоторого вещества. Измеренная молярная масса вещества составила $\mu_1 = 86,1$ г/моль. Вещество было ионизировано (каждый атом потерял один электрон) затем ускорено в электрическом поле с разностью потенциалов $U = 4$ кВ и направлено в магнитное поле с индукцией $B = 0{,}89$ Тл. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости движения ионов и действует в области $y > 0$. Начальная скорость ионов направлена по оси y. Вещество попало под действие магнитного поля в начале координат. Было замечено, что небольшое количество вещества попало на детектор на расстояние $d = 0{,}1$ см дальше по оси x, относительно попадания остального количества вещества. Исходя из этого, было сделано предположение, что некоторое количество атомов-изотопов в исследуемом веществе имеет другую молярную массу. Найдите молярную массу μ_2 этого изотопа. Число Авогадро $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, а заряд электрона равен $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.



Возможное решение

В процессе ионизации каждый атом теряет один электрон и, при последующем ускорении в потенциале U и соответствующим изменении кинетической энергии, ионизированный атом приобретает скорость v:

$$\frac{mv^2}{2} = eU \Rightarrow v = \frac{\sqrt{2eU}}{m}$$

Поскольку скорость ионизированного атома v перпендикулярна магнитному полю B, под действием силы Лоренца он будет двигаться по окружности постоянного радиуса R:

$$eBv = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{eB}$$

К тому времени, когда ионизированный атом достигает детектора, он покрывает половину круга. Пусть m_2 - масса более тяжелого изотопа, а m_1 - масса более легкого изотопа. В таком случае можно найти связь между массами атомов разного типа:

$$2(R_2 - R_1) = 2\left(\frac{m_2 v_2}{eB} - \frac{m_1 v_1}{eB}\right) = d \Rightarrow m_2 v_2 = m_1 v_1 + \frac{eBd}{2}$$

Поскольку $v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m_1}}, v_2 = \sqrt{\frac{2eU}{m_2}}$, можно переписать полученное выражение:

$$\sqrt{m_2} = \sqrt{m_1} + \frac{Bd}{2}\sqrt{\frac{e}{2U}}$$

Переходя от обычных масс к молярным и возводя выражение в квадрат, получим ответ:

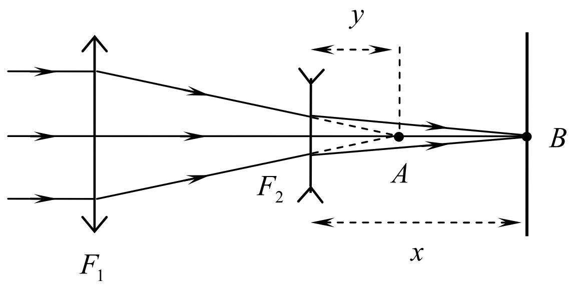
$$\mu_2 = N_A\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{N_A}} + \frac{Bd}{2}\sqrt{\frac{e}{2U}}\right)^2 = 87 \text{ г/моль}$$

Критерии

1. Верно найдена скорость атома в момент его вхождения в магнитное поле (+ 2 балла).
2. Верно найден радиус окружности, по которой в магнитном поле будет двигаться ионизированный атом (+2 балла).
3. Верно найдено соотношение между массами разных изотопов (+ 3 балла).
4. Получено верное выражение для молярной массы тяжелого изотопа (+ 2 балл).
5. Получен верный численный ответ (+ 1 балл).

Задача 6. Телескоп, собранный по схеме Галилея, состоит из объектива — собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 2$ м, и окуляра — рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = 4$ см. Главные оптические оси линз совпадают. За окуляром, перпендикулярно главной оптической оси линз, расположен экран, на котором получено изображение Солнца в виде круга диаметром $d = 20$ см. Найдите расстояние x между экраном и окуляром. Угловой диаметр Солнца $\alpha = 0{,}5°$ (угловой диаметр — угол, под которым наблюдатель видит диаметр солнечного диска). Числовой ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.

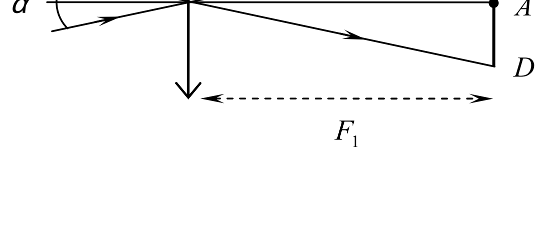
Возможное решение



Выясним сначала, в каком месте нужно расположить окуляр для того, чтобы получить изображение Солнца на экране. Так как Солнце является протяжённым источником, мысленно разобьём его видимую поверхность на малые элементы, каждый из которых будем считать светящейся точкой. Поскольку Солнце расположено на расстоянии, много большем диаметра объектива телескопа, можно считать, что от каждой точки поверхности Солнца в объектив попадает параллельный пучок лучей. Рассмотрим пучок, идущий от центра видимого солнечного диска параллельно главной оптической оси телескопа. Объектив сводит все лучи этого пучка в главный фокус (точка A). Здесь получается первичное изображение центра солнечного диска. Если расположить окуляр справа от этой точки, то на него будет падать пучок лучей, расходящихся из точки A. После преломления в рассеивающем окуляре пучок станет ещё более расходящимся и изображение центра солнечного диска будет мнимым. Поэтому окуляр следует расположить слева от точки A. В этом случае на окуляр падает сходящийся пучок лучей, продолжения которых пересекаются в точке A. Можно подобрать положение окуляра так, чтобы после преломления пучок остался сходящимся и лучи пересеклись в точке B. Тогда эта точка будет действительным изображением центра солнечного диска, которое можно получить на экране.

Искомое расстояние x есть расстояние от окуляра до точки B. Обозначим через y расстояние от окуляра до точки A. Выразим y через x, воспользовавшись формулой линзы. Удобно обратить ход лучей, то есть считать, что в точке B находится действительный источник света, а в точке A его мнимое изображение, построенное окуляром. Тогда

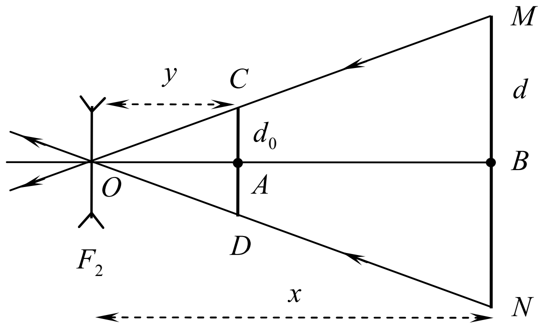
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{F_2} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{F_2}\,.$$



Рассмотрим теперь вопрос о размерах изображения. Будем считать, что от каждой точки, лежащей на границе солнечного диска, в объектив телескопа попадает параллельный пучок лучей. Объектив собирает каждый такой пучок в точку, лежащую в фокальной плоскости. Эти точки образуют первичное изображение границы солнечного диска в виде окружности диаметра d_0. Для каждого пучка достаточно рассмотреть один луч, идущий без преломления через оптический центр объектива. На рисунке показаны два таких луча, идущие от верхнего и нижнего краёв солнечного диска. Угол между этими лучами равен угловому диаметру Солнца α. Изображения краёв получаются в точках C и D, в которых лучи пересекают фокальную плоскость объектива. Точка C — изображение нижнего края солнечного диска, точка D — верхнего. Таким образом, объектив строит действительное перевёрнутое изображение Солнца. Найдём его диаметр d_0, равный длине отрезка CD. Используя малость угла α, получаем:

$$d_0 = 2F_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx 2F_1 \cdot \frac{\alpha}{2} = F_1\,\alpha\,.$$

Если теперь расположить окуляр слева от точки A, то первичное изображение Солнца будет играть



роль мнимого источника, а действительное изображение получится на экране. Снова обратим ход лучей, считая источниками точки экрана. Проведём луч через точку C и оптический центр окуляра O. Этот луч пересечёт экран в точке M. В этой точке будет источник, мнимое изображение которого в окуляре расположено в точке C. В итоге точка M является изображением нижнего края солнечного диска на экране. Точно также изображением верхнего края будет точка N, в которой экран пересекает луч DO. Таким образом, изображение Солнца на экране будет перевёрнутым. Его диаметр d равен длине отрезка MN. Из подобия треугольников OCD и OMN получаем:

$$\frac{d}{d_0} = \frac{x}{y}$$

Отсюда, используя полученные ранее выражения для $1/y$ и d_0, находим расстояние x:

$$\frac{d}{d_0} = x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{F_2}\right) \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{d_0} = 1 + \frac{x}{F_2}\,,$$

$$x = F_2\left(\frac{d}{d_0} - 1\right) = F_2\left(\frac{d}{F_1\,\alpha} - 1\right)$$

Подставим числовые значения:

$$\alpha = 0{,}5^\circ = 0{,}5 \cdot \frac{\pi}{180}\ \text{рад} = 8{,}73 \cdot 10^{-3}\ \text{рад}\,,$$

$$x = 4\ \text{см} \cdot \left(\frac{0{,}2\ \text{м}}{2\ \text{м} \cdot 8{,}73 \cdot 10^{-3}} - 1\right) = 41,8\ \text{см}$$

Критерии

1. Верно найдено положение точки мнимого изображения источника света, и верно написана формула рассеивающей тонкой линзы. (+ 2 балла).
2. Верно найден диаметр мнимого изображения (+3 балла).
3. Верно найдено отношение диаметра изображения источника на экране к диаметру мнимого изображения (+ 3 балла).
4. Найдено расстояние между экраном и окуляром (+ 1 балл).
5. Получен верный численный ответ (+ 1 балл).