Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2021

Онлайн-этап. 7 класс

Задача 1/1. В велосипеде две зубчатые шестеренки соединены натянутой цепью, передающей движение с ведущей передней шестеренки на заднюю шестеренку. Задняя шестреренка имеет общую ось с задним колесом. Если скорость острия зубца на передней шестеренке составляет 10 в системе отсчета велосипеда, то какая будет скорость точки, расположенной на шине заднего колеса, в системе отсчета велосипеда? Радиус задней шестеренки в два раза меньше радиуса передней шестеренки и в 10 раз меньше радиуса колеса. Предполагать, что велосипед едет по прямой дорожке и никуда не сворачивает. Ответ выразите в сантиметрах в секунду и округлите до целых.

Возможное решение

Цепь передает на зубчики задней шестеренки скорость зубчиков передней шестеренки, таким образом, скорость зубчиков задней шестеренки равна $10\frac{cm}{cek}$. Далее, используя равенство угловых скоростей для дисков с общей осью, получаем, что скорость точек на шине колеса равна скорости зубчиков шестеренки заднего колеса, умноженной на отношение радиусов заднего колеса и задней шестеренки:

$$v = 10 \cdot 10\frac{\text{см}}{\text{сек}} = 100\frac{\text{см}}{\text{сек}}\,.$$

Ответ: $100\frac{\text{см}}{\text{сек}}$

Задача 1/2. В велосипеде две зубчатые шестеренки соединены натянутой цепью, передающей движение с ведущей передней шестеренки на заднюю шестеренку. Задняя шестреренка имеет общую ось с задним колесом. Если скорость точки на шине заднего колеса составляет 90 в системе отсчета велосипеда, то какая скорость будет у зубца передней ведущей шестеренки в системе отсчета велосипеда? Радиус задней шестеренки в два раза меньше радиуса передней шестеренки и в 10 раз меньше радиуса колеса. Предполагать, что велосипед едет по прямой дорожке и никуда не сворачивает. Ответ выразите в сантиметрах в секунду и округлите до целых.

Ответ: $9\frac{\text{см}}{\text{сек}}$

Задача 2/1. Используемые в лазерных установках диэлектрические зеркала обладают отражающими свойствами, которые формируются благодаря покрытию из нескольких чередующихся тонких слоёв из различных диэлектрических материалов: тонкие слои материала с более высоким показателем преломления чередуются с более толстыми слоями с меньшим показателем преломления. Плотность более толстых слоев меньше плотности тонких на 15%, а толщина толстого слоя в свою очередь превышает толщину тонкого слоя на 22,5%. На сколько средняя плотность целого диэлектрического зеркала больше плотности слоев с меньшим показателем преломления, если число слоев разной толщины одинаково? Ответ выразите в процентах и округлите до десятых долей процента.

Возможное решение

Пусть число слоев разной толщины равно N и площадь боковой части слоя равна S. Пусть плотность слоя с меньшим показателем преломления (более толстый слой) равна ρ, тогда плотность слоя с большим показателем преломления (более тонкий слой) равна $1{,}225\rho$. Аналогично, если толщину слоя с большим показателем преломления обозначить за d, то толщина слоя с меньшим показателем преломления будет равна $1{,}15d$. Тогда общий объем диэлектрического зеркала будет равен

$$V = SdN + 1{,}225d \cdot SN = 2{,}225Sd\,.$$

Масса равна

$$M = SdN \cdot 1{,}15\rho + SdN \cdot 1{,}225\rho = 2{,}375SdN\rho\,.$$

Соответсвенно средняя плотность равна

$$\frac{M}{V} = \frac{2{,}375SdN\rho}{2{,}225SdN} \approx 1{,}067\rho\,.$$

Тогда искомое отношение плотностей равно

$$\left(\frac{1{,}067\rho}{\rho} - 1\right) \cdot 100\% = 6{,}7\%$$

Ответ: 6,7%

Задача 2/2. Используемые в лазерных установках диэлектрические зеркала обладают отражающими свойствами, которые формируются благодаря покрытию из нескольких чередующихся тонких слоёв из различных диэлектрических материалов: тонкие слои материала с более высоким показателем преломления чередуются с более толстыми слоями с меньшим показателем преломления. Плотность более толстых слоев меньше плотности тонких на 15%, а толщина толстого слоя в свою очередь превышает толщину тонкого слоя на 22,5%. На сколько средняя плотность целого диэлектрического зеркала меньше плотности слоев с большим показателем преломления, если число слоев разной толщины одинаково? Ответ выразите в процентах и округлите до десятых долей процента.

Ответ: 12,9%

Задача 3/1. Петя карабкается по очень скользкому склону заледеневшего холма: 3 минуты он продвигается со скоростью 0,5 м/с, затем останавливается на отдых на 55 секунд. После этого он поскальзывается и катится по склону вниз со скоростью 0,2 м/с в течение 45 секунд. По прошествии этого времени Петя успевает остановиться и медленно карабкается вверх со скоростью 0,3 м/с в течение 40 секунд. После этого ситуация повторяется - он вновь 3 минуты поднимается со своей нормальной скоростью 0,5 м/с, повторяет остановку на отдых, затем поскальзывается, медленно карабкается вверх, и так далее. За какое время он доберется до вершины холма, если длина склона составляет 950 м, а движение Пети происходит по вышеописанному циклу (бежит, отдыхает, поскальзывается и скатывается, медленно карабкается)? Ответ выразите в минутах и округлите до целых.

Возможное решение

Чтобы узнать необходимое время для подъема, посчитаем время, затрачиваемое на один цикл, общее количество циклов и возможный остаток пути, который мог не войти в целый цикл. Найдем расстояние, которое Петя проходит за однин цикл:

$$S = 0{,}5 \text{ м/с} \cdot 180 \text{ с} - 0{,}2 \text{ м/с} \cdot 45 \text{ с} + 0{,}3 \text{ м/с} \cdot 40 \text{ с} = 93 \text{ м}\,.$$

Время одного цикла T равно

$$T = 180 + 55 + 45 + 40 = 320 \text{ с}\,.$$

Всего получается 10 полных циклов, и после остается еще 20 м, которые Петя пройдет со скоростью 0,5 м/с за время T'. Значит общее затраченное время t равно

$$t = T + T' = 320 \cdot 10 + \frac{20}{0{,}5} = 3240 \text{ с} = 54 \text{ мин}\,.$$

Ответ: 54 мин

Задача 3/2. Петя карабкается по очень скользкому склону заледеневшего холма: 3,5 минуты он продвигается со скоростью $\frac{2}{3}$ м/с, затем останавливается на отдых на 45 секунд. После этого он поскальзывается и катится по склону вниз со скоростью 1 м/с в течение 25 секунд. По прошествии этого времени Петя успевает остановиться и медленно карабкается вверх со скоростью 0,3 м/с в течение 40 секунд. После этого ситуация повторяется - он вновь 3,5 минуты поднимается со своей нормальной скоростью $\frac{2}{3}$ м/с, повторяет остановку на отдых, затем поскальзывается, медленно карабкается вверх, и так далее. Сколько метров составляет длина склона, если Петя потратил на подъем ровно 44 минуты и 19 секунд, а его движение происходит по вышеописанному циклу (бежит, отдыхает, поскальзывается и скатывается, медленно карабкается)? Ответ выразите в метрах и округлите до целых.

Ответ: 1082 м

Задача 4/1. Экспериментатор Глюк проводит эксперимент с неизвестными науке инопланетными жидкостями A и B, заполняющих одинаковый объем в двух идентичных аквариумах. Для этого он с помощью пружинного динамометра взвешивает небольшой обломок метеорита неизвестной плотности тремя разными способами: в воздухе, при полном погружении в первый аквариум с жидкостью A и при полном погружении во второй аквариум с жидкостью B. При первом взвешивании пружина динамометра растянулась на $x_1 = 2{,}4$ см, при втором в $\frac{7}{8}$ раз меньше, чем в первом, а при третьем $\frac{5}{6}$ раз меньше, чем при первом. Найдите во сколько раз плотность первой жидкости больше, чем плотность второй. Ускорение свободного падения можно считать равным 10 м/с^2, ответ округлите до сотых.

Возможное решение

Сила упругости пружины динамометра во всех случаях одинакова. Напишем равенство сил действующих на метеорит при первом и втором взвешиваниях:

$$kx_1 = kx_2 + \rho_A V g \Rightarrow k(x_1 - x_2) = \rho_A V g\,.$$

Напишем равенство сил, действующих на метеорит при первом и третьем взвешиваниях:

$$kx_1 = kx_3 + \rho_B V g \Rightarrow k(x_1 - x_3) = \rho_B V g\,.$$

Выразив коэффициент k из одного уравнения и подставив его в другое, получим отношение плотностей жидкостей:

$$\frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2} = \frac{1 - x_3/x_1}{1 - x_2/x_1} = \frac{1 - 5/6}{1 - 7/8} = 1{,}33\,.$$

Ответ: 1,33

Примечание: верное решение задачи в котором было найдено обратное отношение плотностей жидкостей оценивалось в полный балл.

Задача 4/2. Экспериментатор Глюк проводит эксперимент с неизвестными науке инопланетными жидкостями A и B, заполняющих одинаковый объем в двух идентичных аквариумах. Для этого он с помощью пружинного динамометра взвешивает небольшой обломок метеорита неизвестной плотности тремя разными способами: в воздухе, при полном погружении в первый аквариум с жидкостью A и при полном погружении во второй аквариум с жидкостью B. Оказалось, что отношение растяжений пружины в этих трех случаях соответственно равно $12 : 9 : 8$, а разность плотностей жидкостей B и A равна $\rho_B - \rho_A = 0{,}15\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Найдите плотность куска метеорита, если жесткость пружины динамометра равна 300 Н/м. Ускорение свободного падения можно считать равным 10 м/с^2, ответ дайте в $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ округлите до десятых.

Ответ: $1.8\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$

Задача 5/1. Экспериментатор Глюк хочет доехать на грузовом автомобиле из города A в город B, расстояние между которыми составляет 150 км. Однако сразу после выезда Глюк обнаружил, что забыл заправить бензобак и не может доехать напрямую до города B, поэтому решает добраться до него через удаленный на 90 км от города A поселок городского типа C, где он сможет дозаправиться и поехать дальше. На момент отъезда из пункта A Глюк отметил, что бензина оставалось 18,5 л, через 14 км на участке между городами A и C бензина осталось уже 16,26 л. Найдите расстояние между пунктами и C, если суммарное количество бензина, затрачиваемое в пути из пункта A в пункт B через пункт C на 2,4 л больше, чем если ехать из пункта A в пункт B напрямую. Ответ выразите в километрах и округлите до целых.

Возможное решение

Найдем расход бензина грузового автомобиля:

$$v = \frac{18{,}5 - 16{,}26}{14} = 0{,}16\text{л/км}\,.$$

Тогда во время пути из A в B будет израсходовано бензина

$$150 \cdot 0{,}16 = 24 \text{ л},$$

а во время пути из A в C

$$90 \cdot 0{,}16 = 14{,}4 \text{ л}\,.$$

Соответственно на путь из C в B будет израсходовано бензина

$$24 + 2{,}4 - 14{,}4 = 12 \text{ л}\,.$$

Тогда расстояние между пунктами B и C равно

$$12/0{,}16 = 75 \text{ км}\,.$$

Ответ: 75 км

Задача 5/2. Экспериментатор Глюк хочет доехать на грузовом автомобиле из города X в город Y. Однако сразу после выезда Глюк обнаружил, что забыл заправить бензобак и не может доехать напрямую до города Y, поэтому решает добраться до него через удаленный на 72 км от города X поселок городского типа Z, где он сможет дозаправиться и поехать дальше. На момент отъезда из пункта X Глюк отметил, что бензина оставалось 16,4 л, а через 14 км на участке между городами X и Z бензина осталось уже 14,16 л. Найдите расстояние между пунктами X и Y, если суммарное количество бензина, затрачиваемое в пути из пункта X в пункт Y через пункт Z на 1,92 л больше, чем если ехать из пункта X в пункт Y напрямую, а расстояние между пунктами Y и Z равно 60 км. Ответ выразите в километрах и округлите до целых.

Ответ: 120 км

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2021

Онлайн-этап. 8 класс

Задача 1/1. В велосипеде две зубчатые шестеренки соединены натянутой цепью, передающей движение с ведущей передней шестеренки на заднюю шестеренку. Задняя шестреренка имеет общую ось с задним колесом. Велосипед едет по прямой дорожке и никуда не сворачивает, скорость его равна 1,5 м/с, колеса велосипеда при движении не проскальзывают. Найдите скорость зубца передней ведущей шестеренки в системе отсчета велосипеда? Радиус задней шестеренки в два раза меньше радиуса передней шестеренки и в 8 раз меньше радиуса колеса. Ответ выразите в сантиметрах в секунду, округлив до сотых.

Возможное решение

Используя равенство угловых скоростей для дисков с общей осью, получаем, что скорость зубцов задней шестеренки равна скорости точки на шине, деленной на отношение радиуса колеса к радиусу задней шестеренки. Эта скорость передается цепью зубцам передней шестеренки:

$$v = 150 \cdot \frac{1}{8} \frac{\text{см}}{\text{сек}} = 18{,}75 \frac{\text{см}}{\text{сек}}\,.$$

Ответ: $18{,}75 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$

Задача 1/2. В велосипеде две зубчатые шестеренки соединены натянутой цепью, передающей движение с ведущей передней шестеренки на заднюю шестеренку. Задняя шестреренка имеет общую ось с задним колесом. Велосипед едет по прямой дорожке и никуда не сворачивает, колеса велосипеда при движении не проскальзывают. Скорость, с которой движутся педали составляет 30 см/с. С какой скоростью движется велосипедист? Радиус задней шестеренки в 14 раз меньше радиуса колеса, а радиус передней шестеренки в 2,5 раз меньше длины крепления педали. Ответ выразите в сантиметрах в секунду и округлите до целых.

Ответ: $168 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$

Задача 2/1. Петя карабкается по очень скользкому склону заледеневшего холма: 4 минуты он продвигается со скоростью 0,6 м/с, затем останавливается на отдых на 30 секунд. После этого он поскальзывается и катится по склону вниз со скоростью 0,3 м/с в течение 30 секунд. По прошествии этого времени Петя успевает остановиться и медленно карабкается вверх со скоростью 0,1 м/с в течение 1 минуты. После этого ситуация повторяется - он вновь 4 минуты поднимается со своей нормальной скоростью 0,6 м/с, повторяет остановку на отдых, затем поскальзывается, медленно карабкается вверх, и так далее. За какое время он доберется до вершины холма, если длина склона составляет 1800 м, а движение Пети происходит по вышеописанному циклу (бежит, отдыхает, поскальзывается и скатывается, медленно карабкается)? Ответ выразите в минутах и округлите до целых.

Возможное решение

Чтобы узнать необходимое время для подъема, посчитаем время, затрачиваемое на один цикл, общее количество циклов и возможный остаток пути, который мог не войти в целый цикл. Найдем расстояние, которое Петя проходит за однин цикл:

$$S = 0{,}6 \text{ м/с} \cdot 240 \text{ с} - 0{,}3 \text{ м/с} \cdot 30 \text{ с} + 0{,}1 \text{ м/с} \cdot 60 \text{ с} = 141 \text{ м}\,.$$

Время одного цикла T равно

$$T = 240 + 30 + 60 + 30 = 360 \text{ с}\,.$$

Всего получается 12 полных циклов, и после остается еще 108 м, которые Петя пройдет со скоростью 0,6 м/с за время T'. Значит общее затраченное время t равно

$$t = T + T' = 360 \cdot 12 + \frac{108}{0{,}6} = 4320 \text{ с} = 75 \text{ мин}\,.$$

Ответ: 75 мин

Задача 2/2. Петя карабкается по очень скользкому склону заледеневшего холма: 2,5 минуты он продвигается со скоростью 0,8 м/с, затем останавливается на отдых на 40 секунд. После этого он поскальзывается и катится по склону вниз со скоростью 0,4 м/с в течение 35 секунд. По прошествии этого времени Петя успевает остановиться и медленно карабкается вверх со скоростью 0,2 м/с в течение 45 секунд. После этого ситуация повторяется - он вновь 2,5 минуты поднимается со своей нормальной скоростью 0,8 м/с, повторяет остановку на отдых, затем поскальзывается, медленно карабкается вверх и так далее. Сколько метров составляет длина склона, если Петя потратил на подъем ровно 55 минуты 40 секунд, а его движение происходит по вышеописанному циклу (бежит, отдыхает, поскальзывается и скатывается, медленно карабкается)? Ответ выразите в метрах и округлите до целых.

Ответ: 1460 м

Задача 3/1. В кастрюлю с водой погружают кипятильник, через нагревательный элемент которого проходит постоянный ток $J = 10A$, сопротивление нагревательного элемента $R = 2$ Ом. Температура воды непосредственно перед погружением в нее кипятильника составляет $50°C$. Через час работы кипятильника масса воды в кастрюле уменьшилась вдвое. Найти исходную массу воды в кастрюле. Теплообменом кастрюли с окружающей средой пренебречь. Удельную теплоемкость воды считать равной 4,2 кДж/(кг $\cdot°$ C), удельную теплоту парообразования считать равной 2260 кДж/кг. Ответ выразите в килограммах, округлите до тысячных.

Возможное решение

Напишем закон Джоуля-Ленца. Получим количество теплоты, которое передается за час от кипятильника воде:

$$Q_1 = J^2Rt = 100\ \text{А}^2 \cdot 2\ \text{Ом} \cdot 3600\ \text{с} = 720\ \text{кДж}\,.$$

Во время нагревания воды до температуры $100°C$ и последующего кипения воды расходуется на количество теплоты

$$Q_2 = Cm(\Delta T) + L\frac{m}{2}\,.$$

Из сохранения энергии следует, что $Q_1 = Q_2$. Тогда найдем исходную массу воды:

$$m = \frac{J^2Rt}{C(\Delta T) + \frac{L}{2}} = 0{,}537\ \text{кг}\,.$$

Ответ: 0,537 кг

Задача 3/2. В кастрюлю налито 1 кг воды, имеющей температуру $50°C$. В начальный момент времени в кастрюлю погружают кипятильник, через нагревательный элемент которого проходит постоянный ток $J = 10A$, сопротивление нагревательного элемента $R = 2$ Ом. Найдите время, через которое масса воды в кастрюле уменьшится вдвое. Теплообменом кастрюли с окружающей средой пренебречь. Удельную теплоемкость воды считать равной 4,2 кДж/(кг $\cdot°$ C), удельную теплоту парообразования считать равной 2260 кДж/кг. Ответ выразите в часах, округлите до сотых.

Ответ: 1,86 ч

Задача 4/1. Саша налил в $k = 16$ одинаковых стеклянных стаканов разное количество воды с разной температурой. Оказалось, что и температура воды, и масса воды в каждом последующем стакане отличаются от предыдущего на одинаковые величины, соответственно равные температуре и массе воды в самом первом стакане. То есть, если принять массу воды в первом стакане за m, то во втором стакане налито $2m, \ldots$, в третьем $3m$, в k-том стакане $k \cdot m$ (с температурой аналогично - $t, 2t, \ldots k \cdot t$). Найдите температуру в самом первом стакане, если после смешивания воды из всех стаканов в одной емкости, установившаяся температура оказалась равна $t_k = 22°C$, масса воды в первом стакане равна 18 г. Ответ выразите в градусах и округлите до целых.

Возможное решение

Чтобы найти связь между начальными и конечной температурами воды в емкостях, сначала посчитаем количество теплоты, необходимое для остывания всей смеси до $0°$:

$$Q_1 = cm(t-0) + c \cdot 2m \cdot (2t-0) + \ldots + c \cdot 16m \cdot (16t-0) = 1496cmt\,.$$

Данное тепло идет на нагревания смеси до температуры t_1:

$$Q_1 = (m + 2m + \ldots + 16m)t_1 = 136cmt_1\,.$$

Тогда получим выражение для искомой температуры в первом стакане t через температуру t_1:

$$t_1 = \frac{Q_1}{136cm} = \frac{1496t}{136} = 11t = 22°C \Rightarrow t = 2°C\,.$$

Ответ: $2°C$

Задача 4/2. Саша налил в $k = 13$ одинаковых стеклянных стаканов разное количество керосина с разной температурой. Оказалось, что и температура керосина, и его масса в каждом последующем стакане отличаются от предыдущего на одинаковые величины, соответственно равные температуре и массе керосина в самом первом стакане. То есть, если принять массу керосина в первом стакане за m, то во втором стакане налито $2m, \ldots$, в третьем $3m$, в k-том стакане $k \cdot m$ (с температурой аналогично - $t, 2t, \ldots k \cdot t$). Вовочка смешал керосин из всех стаканов в одной емкости. Найдите температуру после установление теплового равновесия, если температура керосина в первом стакане равна $t = 3°C$, масса керосина в первом стакане равна 12 г. Ответ выразите в градусах и округлите до целых.

Ответ: $27°C$

Задача 5/1. Напряжение U, которое создается батареей $\mathcal{E}$, подключают к схеме, изображенной на рисунке 1. При этом считается, что напряжение создается между точками справа и слева от батареи. Сопротивление состоит из трех резисторов - резистора с сопротивлением r и двух последовательно соединенных резисторов с сопротивлениями R_1. При этом оказалось, что через сопротивление r проходит постоянный ток I_1 (рисунок 1). Затем ту же батарею подключили к схеме как показано на рисунке 2. Сопротивление состоит из того же резистора с сопротивлением r и из параллельно подключенных резисторов с сопротивлениями R_2. При этом оказалось, что ток через сопротивление r не изменился: $I_2 = I_1$(рисунок 2). Найдите значение R_2/R_1, округлив до целых.

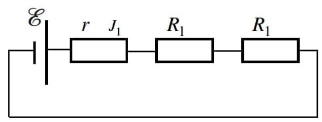


Рис. 1

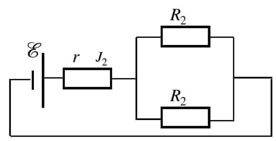


Рис. 2

Возможное решение

Напишем выражение для тока I_1 из закона Ома:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + 2R_1}\,.$$

Напишем выражение для тока I_2 из закона Ома:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R_2}{2}}\,.$$

Поскольку ток через сопротивление r не изменился, то токи I_1 и I_2 равны. Тогда получим, что:

$$r + 2R_1 = r + \frac{R_2}{2}\,.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{R_2}{R_1} = 4\,.$$

Ответ: 4

Задача 5/2. Напряжение U , которое создается батареей $\mathcal{E}$, подключают к схеме, изображенной на рисунке 1. При этом считается, что напряжение создается между точками справа и слева от батареи. Сопротивление состоит из трех резисторов — резистора с сопротивлением r и двух последовательно соединенных резисторов с сопротивлениями R_1. При этом оказалось, что через сопротивление r проходит постоянный ток I_1 (рисунок 1). Затем ту же батарею подключили к схеме как показано на рисунке 2. Сопротивление состоит из того же резистора с сопротивлением r и из параллельно подключенных резисторов с сопротивлениями R_2. При этом оказалось, что ток через сопротивление r стал в 2 раза больше: $I_2 = 2I_1$(рисунок 2). Известно, что $R_1/R_2 = 4$. Во сколько раз сопротивление r превосходит сопротивление R_2? Ответ округлите до целых.

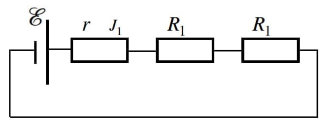


Рис. 1

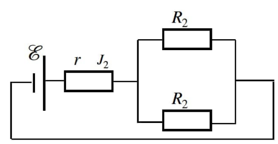


Рис. 2

Ответ: 7

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2021

Онлайн-этап. 9 класс

Задача 1/1. Форма некоторого холма задается уравнением $y = H - \alpha x^2$, где высота $H = 10$ м, а коэффициент $\alpha = 0{,}05$ м$^{-1}$. Найдите скорость, с которой нужно бросить тело с вершины холма, чтобы оно летело вдоль поверхности этого холма. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ выразите в м/с, округлив до целых.

Возможное решение

Очевидно, что касательная к траектории в начальной точке должна быть горизонтальна. С учетом этого, получим уравнение траектории:

$$y(x) = H - \frac{gt^2}{2} = H - \frac{x}{V_0}\,,$$

где V_0 – начальная скорость в момент броска. Для того, чтобы форма траектории совпала с формой холма, коэффициент α должен быть равен

$$\alpha = \frac{g}{2V_0^2}\,.$$

Отсюда выражаем начальную скорость:

$$V_0 = \sqrt{\frac{g}{2\alpha}} = 10 \text{ м/с}\,.$$

Ответ:

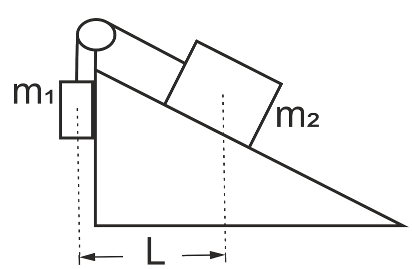
$$v = 10 \text{ м/с}$$

Задача 1/2. Форма некоторого холма задается уравнением $y = H - \alpha x^2$, где высота $H = 20$ м, а коэффициент $\alpha = 0{,}025$ м$^{-1}$. Найдите скорость, с которой нужно бросить тело с вершины холма, чтобы оно летело вдоль поверхности этого холма. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ выразите в м/с, округлив до целых.

Ответ:

$$v = 14 \text{ м/с}$$

Задача 2/1. На тяжелом гладком клине с углом наклона к горизонту $\alpha = 30°$ закреплен блок в верхнем углу, через него перекинута нить. Нить привязана к брускам массы $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг (см.рис). Первоначально бруски располагаются на одной высоте на расстоянии $L = 2{,}5$ м друг от друга. Найдите расстояние между брусками через время $t = 1$ с после начала движения. Клин покоится на покоится на горизонтальной поверхности. Нить считать легкой и нерастяжимой, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Ответ выразите в метрах, округлив до десятых.



Возможное решение

Напишем второй закон Ньютона для брусков с массами m_1 и m_2 в проекциях на ось Y_1, сонаправленную ускорению свободного падения $\overrightarrow{g}$, и ось X_1, направленную вдоль наклонной части клина:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ m_2 a = T - m_2 g sin\alpha \end{cases}$$

Просуммировав уравнения, получим выражение для ускорения системы брусков:

$$a = \frac{g(m_1 - m_2 sin\alpha)}{m_1 + m_2}\,.$$

Найдем расстояние между брусками l через время $t = 1$с. Для удобства выберем другую систему координат, такую что ось X_2 направлена горизонтально вдоль нижней части бруска вправо, а ось Y_2 направлена противоположно ускорению свободного падения $\overrightarrow{g}$. Определим координаты брусков по горизонтали и по вертикали через время $t = 1$:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = -at^2/2;$$

$$x_2 = L - acos\alpha t^2/2, \quad y_2 = asin\alpha t^2/2\,.$$

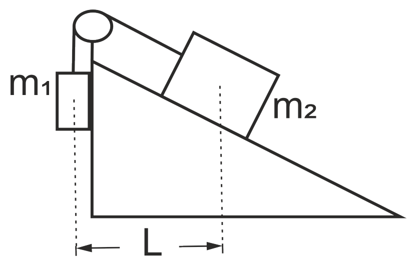
Тогда расстояние между брусками будет равно

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{at^2}{2}\sqrt{(1 + sin\alpha)^2 + (\frac{2L}{at^2} - cos\alpha)^2} \approx 3{,}8 \text{ м}\,.$$

Ответ:

$$l = 3{,}8$$

Задача 2/2. На тяжелом гладком клине с углом наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$ закреплен блок в верхнем углу, через него перекинута нить. Нить привязана к брускам массы $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 1$ кг (см.рис). Первоначально бруски располагаются на одной высоте на расстоянии $L = 2{,}5$ м друг от друга. Найдите расстояние между брусками через время $t = 1$ с после начала движения. Клин покоится на покоится на горизонтальной поверхности. Нить считать легкой и нерастяжимой, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Ответ выразите в метрах, округлив до десятых.



Ответ:

$$l = 2{,}4$$

Задача 3/1. В калориметр, содержащий лёд массой $m_1 = 80$ г при температуре $t_1 = -10\,^\circ$C, добавили мокрый снег массой $m_2 = 30$ г. После установления теплового равновесия температура в калориметре повысилась до значения $t_2 = -2\,^\circ$C. Найдите массу M воды в мокром снеге. Удельная теплоёмкость льда $C = 2{,}1$ кДж/(кг °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг. Теплоёмкость калориметра не учитывайте. Ответ выразите в граммах и округлите до десятых.

Возможное решение

Имевшийся в калориметре лёд массой m_1 нагрелся от температуры t_1 до температуры t_2. Необходимое для этого количество теплоты равно:

$$Q_1 = m_1 C\,(t_2 - t_1)\,.$$

Мокрый снег представляет собой смесь воды и льда, находящихся при температуре $0\,^\circ$C. Количество теплоты, выделившееся при охлаждении снега до конечной температуры t_2, равно

$$Q_2 = M\lambda + m_2 C\,(0^\circ - t_2) = M\lambda - m_2 C t_2\,.$$

Здесь первое слагаемое есть количество теплоты, выделившееся при замерзании воды массой M при температуре $0\,^\circ$C, второе слагаемое — количество теплоты, выделившееся при охлаждении льда массой m_2 от $0\,^\circ$C до конечной температуры t_2. Приравнивая Q_1 и Q_2, находим массу M воды в мокром снеге:

$$Q_1 = Q_2 \quad \longrightarrow \quad m_1 C\,(t_2 - t_1) = M\lambda - m_2 C t_2\,,$$

$$M = \frac{C}{\lambda}\,(m_1(t_2 - t_1) + m_2 t_2)\,.$$

Подставим числовые значения:

$$M = \frac{2{,}1 \text{ кДж/(кг °C)}}{330 \text{ кДж/кг}}\,(80 \text{ г}\cdot(-2\,^\circ\text{C} + 10\,^\circ\text{C}) + 30 \text{ г}\cdot(-2\,^\circ\text{C}) = 3{,}7 \text{ г}\,.$$

Ответ:

$$M = \frac{C}{\lambda}\,(\,m_1\,(\,t_2 - t_1\,) + m_2\,t_2\,) = 3{,}7\text{ г}$$

Задача 3/2. В калориметр, содержащий переохлаждённую воду массой $m_1 = 50$ г при температуре $t = -5\,°\text{C}$, добавили мокрый снег массой $m_2 = 60$ г. После установления теплового равновесия в калориметре оказались равные по массе количества воды и льда. Найдите массу M воды в мокром снеге. Удельная теплоёмкость воды $C = 4{,}2$ кДж/(кг °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг. Теплоёмкость калориметра не учитывайте. Ответ выразите в граммах и округлите до десятых.

Ответ:

$$M = \frac{m_2 - m_1}{2} - \frac{m_1\,C\,t}{\lambda} = 8{,}2\text{ г}$$

Задача 3/3.

В калориметр, содержащий переохлаждённую воду массой $m_1 = 100$ г при температуре $t_1 = -4\,°\text{C}$, долили воду массой $m_2 = 130$ г при температуре $t_2 = +2\,°\text{C}$. Найдите массу M льда, образовавшегося в калориметре после установления теплового равновесия. Удельная теплоёмкость воды $C = 4{,}2$ кДж/(кг °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг. Теплоёмкость калориметра не учитывайте. Ответ выразите в граммах и округлите до десятых.

Ответ:

$$M = \frac{C\,(\,m_1\,|\,t_1\,| - m_2\,t_2\,)}{\lambda} = 1{,}8\text{ г}$$

Задача 3/4. В калориметр, содержащий переохлаждённую воду массой $m_1 = 90$ г при температуре $t_1 = -3\,°\text{C}$, бросили латунные опилки массой $m_2 = 130$ г при температуре $t_1 = -20\,°\text{C}$. Найдите массу M льда, образовавшегося в калориметре после установления теплового равновесия. Удельная теплоёмкость воды $C_1 = 4{,}2$ кДж/(кг °C), удельная теплоёмкость латуни $C_2 = 0{,}38$ кДж/(кг °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг. Теплоёмкость калориметра не учитывайте. Ответ выразите в граммах и округлите до десятых.

Ответ:

$$M = \frac{C_1\,m_1\,|\,t_1\,| + C_2\,m_2\,|\,t_2\,|}{\lambda} = 6{,}4\text{ г}$$

Задача 4/1. Воздух в комнате находится при постоянной температуре $t_{\text{в}} = 25\,°\text{C}$. В комнату внесли открытый сосуд Дьюара и поместили в него массу $m_1 = 20$ г обычного льда, находящегося при температуре $t_1 = 0\,°\text{C}$. За время $\tau_1 = 9$ часов лёд полностью растаял. После этого в тот же сосуд Дьюара поместили массу $m_2 = 30$ г твёрдой углекислоты (сухого льда) при температуре $t_2 = -78\,°\text{C}$. При этой температуре углекислота испаряется, минуя жидкую фазу. Такой процесс называется возгонкой. Найдите время τ_2, за которое углекислота полностью испарится. Считайте, что скорость подвода тепла внутрь сосуда Дьюара пропорциональна разности температур снаружи и внутри сосуда. Удельная теплота плавления льда $\lambda_1 = 0{,}33$ МДж/кг, удельная теплота возгонки углекислоты $\lambda_2 = 0{,}38$ МДж/кг. Время τ_2 выразите в часах и округлите до десятых.

Возможное решение

Количество теплоты, которое необходимо затратить для того, чтобы растопить лёд массой m_1 при температуре $t_1 = 0\,°\text{C}$, равно $m_1\,\lambda_1$. Скорость подвода тепла внутрь сосуда Дьюара запишем в виде $k\,(\,t_{\text{в}} - t_1\,)$, где коэффициент пропорциональности k определяется конструкцией сосуда. Так как температуры $t_{\text{в}}$ и t_1 постоянны, скорость подвода тепла также постоянна. В этом случае имеем:

$$m_1\,\lambda_1 = k\,(\,t_{\text{в}} - t_1\,)\,\tau_1\,.$$

Для испарения углекислоты справедливо аналогичное равенство

$$m_2\,\lambda_2 = k\,(\,t_{\text{в}} - t_2\,)\,\tau_2\,.$$

Поделив второе уравнение на первое, находим время τ_2:

$$\frac{m_2\,\lambda_2}{m_1\,\lambda_1} = \frac{(\,t_{\text{в}} - t_2\,)\,\tau_2}{(\,t_{\text{в}} - t_1\,)\,\tau_1} \quad\longrightarrow\quad \tau_2 = \tau_1\,\frac{m_2\,\lambda_2\,(\,t_{\text{в}} - t_1\,)}{m_1\,\lambda_1\,(\,t_{\text{в}} - t_2\,)}\,.$$

Подставим числовые значения:

$$\tau_2 = 9\text{ ч}\cdot\frac{30\text{ г}}{20\text{ г}}\cdot\frac{0{,}38\text{ МДж/кг}}{0{,}33\text{ МДж/кг}}\cdot\frac{25°}{103°} = 3{,}8\text{ ч}.$$

Ответ:

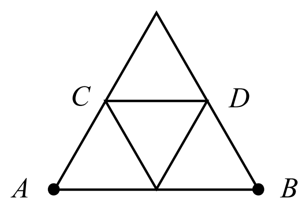
$$\tau_2 = \tau_1\,\frac{m_2\,\lambda_2\,(\,t_{\text{в}} - t_1\,)}{m_1\,\lambda_1\,(\,t_{\text{в}} - t_2\,)} = 3{,}8\text{ ч}$$

Задача 4/2. Воздух в комнате находится при постоянной температуре $t_{\text{в}} = 20\,°\text{C}$. В комнату внесли открытый сосуд Дьюара и налили в него массу $m_1 = 150$ г жидкого азота, находящегося при температуре кипения $t_1 = -196\,°\text{C}$. За время $\tau_1 = 4{,}5$ часа азот полностью испарился. После этого в тот же сосуд Дьюара поместили массу $m_2 = 60$ г твёрдой углекислоты (сухого льда) при температуре $t_2 = -78\,°\text{C}$. При этой температуре углекислота испаряется, минуя жидкую фазу. Такой процесс называется возгонкой. Найдите время τ_2, за которое углекислота полностью испарится. Считайте, что скорость подвода тепла внутрь сосуда Дьюара пропорциональна разности температур снаружи и внутри сосуда. Удельная теплота испарения жидкого азота $\lambda_1 = 0{,}19$ МДж/кг, удельная теплота возгонки углекислоты $\lambda_2 = 0{,}38$ МДж/кг. Время τ_2 выразите в часах и округлите до десятых.

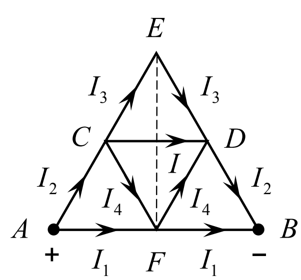
Ответ:

$$\tau_2 = \tau_1 \frac{m_2 \lambda_2 (t_{\text{в}} - t_1)}{m_1 \lambda_1 (t_{\text{в}} - t_2)} = 7{,}9 \text{ ч}$$

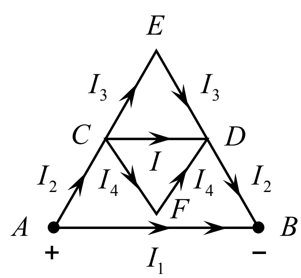
Задача 5/1. Из девяти одинаковых проволочных отрезков сопротивлением $R = 0{,}26$ Ом каждый собран плоский каркас, состоящий из правильных треугольников. Каркас подключён к источнику постоянного напряжения $V = 45$ мВ за точки A и B. Найдите силу тока I, текущего по отрезку CD. Ответ выразите в миллиамперах и округлите до десятых.



Возможное решение



Пусть положительный полюс батареи подключён к точке A, а отрицательный к точке B. Рассмотрим распределение токов в ветвях каркаса. Так как при подключении батареи к точкам A и B каркас зеркально симметричен относительно прямой EF, распределение токов также обладает зеркальной симметрией. В частности, по отрезкам CF и FD течёт один и тот же ток I_4. Поэтому точку F можно отсоединить от отрезка AB без изменения распределения токов.



Сопротивления участков CED и CFD одинаковы и равны $2R$. Поэтому токи I_3 и I_4 совпадают:

$$I_3 = I_4\,.$$

Закон сохранения заряда в узле C даёт:

$$I_2 = I_3 + I_4 + I = 2I_3 + I\,.$$

Приравнивая напряжения на участках CD и CED, получаем:

$$IR = 2I_3R \quad \longrightarrow \quad I = 2I_3\,.$$

Двигаясь по пути $ACDB$, запишем напряжение V так:

$$V = I_2 R + IR + I_2 R = 2I_2 R + IR\,.$$

Исключая из полученных уравнений токи I_3 и I_2, находим ток I:

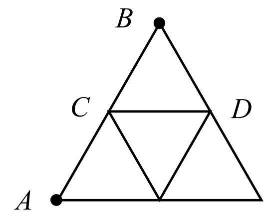
$$I_2 = 2I_3 + I = 2I\,,$$

$$V = 2I_2 R + IR = 5IR \quad \longrightarrow \quad I = \frac{V}{5\,R} = 34{,}6 \text{ мА}\,.$$

Ответ:

$$I = \frac{V}{5\,R} = 34{,}6 \text{ мА}$$

Задача 5/2. Из девяти одинаковых проволочных отрезков сопротивлением $R = 0{,}38$ Ом каждый собран плоский каркас, состоящий из правильных треугольников. Каркас подключён к источнику постоянного напряжения $V = 90$ мВ за точки A и B. Найдите силу тока I, текущего по отрезку CD. Ответ выразите в миллиамперах и округлите до десятых.

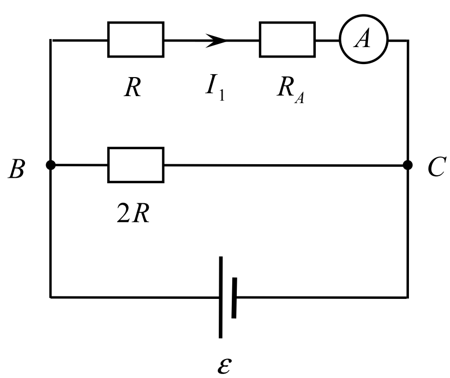


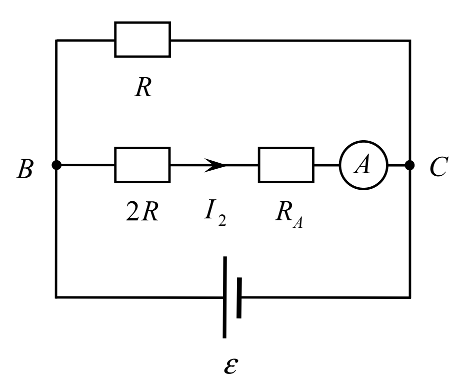
Ответ:

$$I = \frac{V}{10\,R} = 23{,}7 \text{ мА}$$

Задача 6/1. Два сопротивления, одно из которых в 2 раза больше другого, соединены параллельно и подключены к батарее. Измеряя с помощью одного и того же амперметра силу тока, текущего через сопротивления, получили значения $I_1 = 30$ мА для меньшего сопротивления и $I_2 = 20$ мА для большего. Найдите показание амперметра I, если в той же цепи использовать его для измерения силы тока, текущего через батарею. Ответ выразите в миллиамперах. Внутреннее сопротивление батареи не учитывайте.

Возможное решение



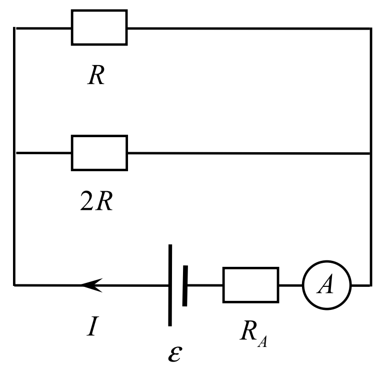


Пусть R и $2\,R$ — параллельно соединённые сопротивления. Неравенство $I_1 \neq 2I_2$ означает, что сопротивление амперметра отлично от нуля. Обозначим его через R_A. Учитывая, что при измерении токов I_1 и I_2 напряжение между точками B и C равно эдс батареи ε, получаем два уравнения:

$$R + R_A = \frac{\varepsilon}{I_1}\,, \quad 2\,R + R_A = \frac{\varepsilon}{I_2}\,.$$

Выразим отсюда R и R_A:

$$R = \frac{\varepsilon}{I_2} - \frac{\varepsilon}{I_1} = \frac{\varepsilon\,(\,I_1 - I_2\,)}{I_1 I_2}\,, \quad R_A = \frac{2\,\varepsilon}{I_1} - \frac{\varepsilon}{I_2} = \frac{\varepsilon\,(\,2\,I_2 - I_1\,)}{I_1 I_2}\,.$$



При измерении силы тока, текущего через батарею, амперметр соединяется последовательно с парой сопротивлений R и $2\,R$. Общее сопротивление цепи в этом случае равно:

$$R_0 = \frac{2\,R}{3} + R_A = \frac{2\,R + 3\,R_A}{3}\,.$$

Здесь $2\,R/3$ — общее сопротивление пары R и $2\,R$. Используя выражения для R и R_A, получаем:

$$R_0 = \frac{\varepsilon}{3\,I_1 I_2}\,(\,2\,I_1 - 2\,I_2 + 6\,I_2 - 3\,I_1\,) = \frac{\varepsilon\,(\,4\,I_2 - I_1\,)}{3\,I_1 I_2}\,.$$

Ток I, текущий через батарею, равен

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0} = \frac{3\,I_1 I_2}{4\,I_2 - I_1}\,.$$

Подставим числовые значения токов в миллиамперах:

$$I = \frac{3 \cdot 30 \cdot 20}{80 - 30} = \frac{180}{5} = 36 \text{ мА}\,.$$

Ответ:

$$I = \frac{3I_1 I_2}{4I_2 - I_1} = 36 \text{ мА}\,.$$

Задача 6/2. К батарее последовательно подключены два одинаковых сопротивления. Измеряя с помощью одного и того же вольтметра напряжение на одном из сопротивлений и на обоих сопротивлениях получили значения $V_1 = 40$ В и $V_2 = 100$ В. Найдите, какое напряжение V покажет вольтметр, если включить его последовательно с сопротивлениями. Ответ выразите в вольтах. Внутреннее сопротивление батареи не учитывайте.

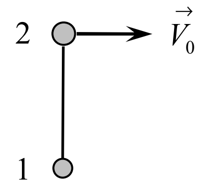
Ответ:

$$V = \frac{V_1 V_2}{2V_2 - 3V_1} = 50 \text{ В}\,.$$

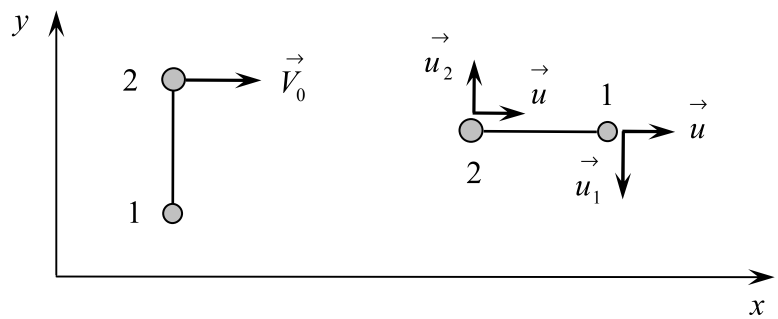
Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2021

Онлайн-этап. 10 класс

Задача 1/1. По гладкой горизонтальной поверхности скользят две маленькие шайбы 1 и 2, соединённые жёстким невесомым стержнем. Известно отношение масс шайб: $m_2/m_1 = 2$. В некоторый момент времени, принятый за начальный, скорость шайбы 1 равна нулю, а скорость $\vec{V_0}$ шайбы 2 направлена перпендикулярно стержню. Найдите угол α, который образует со стержнем вектор скорости шайбы 2 в момент, когда стержень повернулся на угол $270°$ относительно начального положения. Ответ выразите в градусах и округлите до целого значения.



Возможное решение



Разложим скорости шайб на составляющие, параллельные и перпендикулярные стержню в конечном положении:

$$\vec{V_1} = \vec{u} + \vec{u_1},$$

$$\vec{V_2} = \vec{u} + \vec{u_2}.$$

Вектор $\vec{u}$ направлен вдоль стержня. Так как длина стержня не меняется при движении, эта составляющая одинакова для обеих шайб. Векторы $\vec{u_1}$ и $\vec{u_2}$ перпендикулярны стержню. Поскольку шайбы движутся без трения, их суммарный импульс сохраняется:

$$m_2\vec{V_0} = m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2} \quad \rightarrow \quad 2\,m_1\vec{V_0} = m_1(\,\vec{u} + \vec{u_1}\,) + 2\,m_1(\,\vec{u} + \vec{u_2}\,) \quad \rightarrow \quad 2\vec{V_0} = 3\vec{u} + \vec{u_1} + 2\,\vec{u_2}\,.$$

Направим оси неподвижной системы координат вдоль начального и конечного положений стержня. В проекциях имеем:

$$2\,V_0 = 3\,u \quad \rightarrow \quad u = \frac{2\,V_0}{3}\,,$$

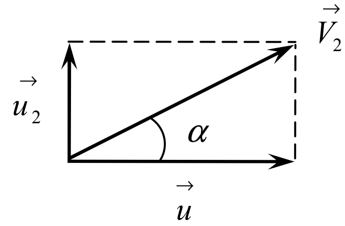
$$0 = -u_1 + 2\,u_2 \quad \rightarrow \quad u_1 = 2\,u_2\,.$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{m_2V_0^2}{2} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad 2\,m_1V_0^2 = m_1(\,u^2 + u_1^2\,) + 2\,m_1(\,u^2 + u_2^2\,) \quad \rightarrow \quad 2\,V_0^2 = 3\,u^2 + u_1^2 + 2\,u_2^2\,.$$

Подставляя сюда полученные выше выражения для u и u_1, находим составляющую скорости u_2:

$$2\,V_0^2 = 3\cdot\frac{4V_0^2}{9} + 4\,u_2^2 + 2\,u_2^2 \quad \rightarrow \quad 6\,u_2^2 = \frac{2\,V_0^2}{3} \quad \rightarrow \quad u_2^2 = \frac{V_0^2}{9} \quad \rightarrow \quad u_2 = \frac{V_0}{3}\,.$$



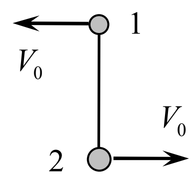
Так как вектор $\vec{u}$ направлен вдоль стержня, искомый угол α есть угол между векторами $\vec{u}$ и $\vec{V_2}$. Получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{u_2}{u} = \frac{1}{2} \quad \to \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 27^\circ.$$

Ответ:

$$\alpha = 27^\circ$$

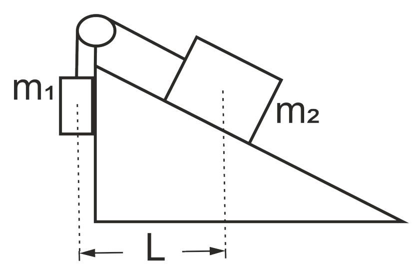
Задача 1/2. По гладкой горизонтальной поверхности скользят две маленькие шайбы 1 и 2, соединённые жёстким невесомым стержнем. Известно отношение масс шайб: $m_2/m_1 = 4$. В некоторый момент времени, принятый за начальный, скорости шайб равны по абсолютной величине и направлены перпендикулярно стержню в противоположные стороны. Найдите угол α, который образует со стержнем вектор скорости шайбы 2 в момент, когда стержень повернулся на угол 270° относительно начального положения. Ответ выразите в градусах и округлите до целого значения.



Ответ:

$$\alpha = 34^\circ$$

Задача 2/1. На тяжелом гладком клине с углом наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$ закреплен блок в верхнем углу, через него перекинута нить. Нить привязана к брускам массы $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг (см.рис). Первоначально тела располагаются на одной высоте на расстоянии $L = 2{,}5$ м друг от друга. Найдите расстояние между брусками через время $t = 1$ с после начала движения. Клин покоится на покоится на горизонтальной поверхности. Нить считать легкой и нерастяжимой, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Ответ выразите в метрах, округлив до десятых.



Возможное решение

Напишем второй закон Ньютона для брусков с массами m_1 и m_2 в проекциях на ось Y_1, сонаправленную ускорению свободного падения $\vec{g}$, и ось X_1, направленную вдоль наклонной части клина:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ m_2 a = T - m_2 g sin\alpha \end{cases}$$

Просуммировав уравнения, получим выражение для ускорения системы брусков:

$$a = \frac{g(m_1 - m_2 sin\alpha)}{m_1 + m_2}.$$

Найдем расстояние между брусками l через время $t = 1$с. Для удобства выберем другую систему координат, такую что ось X_2 направлена горизонтально вдоль нижней части бруска вправо, а ось Y_2 направлена противоположно ускорению свободного падения $\overrightarrow{g}$. Определим координаты брусков по горизонтали и по вертикали через время $t = 1$:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = -at^2/2;$$

$$x_2 = L - acos\alpha t^2/2, \quad y_2 = asin\alpha t^2/2.$$

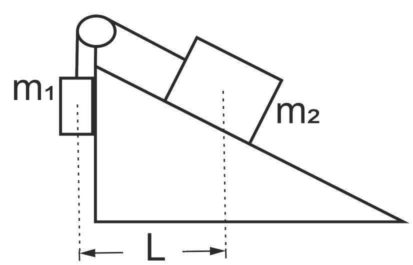
Тогда расстояние между брусками будет равно

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{at^2}{2}\sqrt{(1 + sin\alpha)^2 + (\frac{2L}{at^2} - cos\alpha)^2} \approx 3{,}8 \text{ м.}$$

Ответ:

$$l = 3{,}8$$

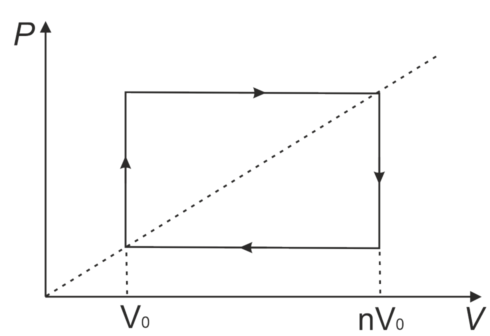
Задача 2/2. На тяжелом гладком клине с углом наклона к горизонту $\alpha = 30°$ закреплен блок в верхнем углу, через него перекинута нить. Нить привязана к телам массы $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 1$ кг (см.рис). Первоначально тела располагаются на одной высоте, на расстоянии $L = 2{,}5$ м друг от друга. Найдите расстояние между телами через время t = 1 с после начала движения. Нить считать легкой и нерастяжимой, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Ответ выразите в метрах, округлив до десятых.



Ответ:

$$l = 2{,}4$$

Задача 3/1. Цикл работы тепловой машины (рабочее тело – идеальный газ с молярной теплоемкостью при постоянном объеме $c_v = 20\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$) состоит из двух изохор и двух изобар (см. рис.). Найдите отношение тепла, полученного газом, к работе газа за цикл. Отношение максимального объема газа к минимальному $n = 2$. Ответ приведите в процентах, округлив до целых.



Возможное решение

Обозначим минимальное давление в цикле как P_0, а максимальное P_{max}. Пронумеруем точки цикла по часовой стрелке следующим образом: изохорический процесс с увеличением давления от P_0 до P_{max} – процесс $1-2$, изобарический процесс с увеличением объема от V_0 до nV_0 – процесс $2-3$, изохорический процесс с уменьшением давления от P_{max} до P_0 – процесс $3-4$, изобарический процесс с уменьшением объема от V_0 до nV_0 – процесс $4-1$. Найдем максимальное давление P_{max} в цикле из подобия прямоугольных треугольников:

$$P_0/V_0 = P_{max}/nV_0 \quad \rightarrow \quad P_{max} = nP_0$$

Найдем работу над газом за цикл, как площадь прямоугольника $1-2-3-4$:

$$A = P_0V_0(n-1)^2\,.$$

Молярная теплоемкость при постоянном объеме равна $c_v = \frac{i}{2}R$. Напишем уравнение Майера: $c_p - c_v = R$, где c_p – молярная теплоемкость при постоянном давлении. Количество теплоты Q будет подводится к циклу в процессах $1-2$ и $2-3$, тогда:

$$Q = \frac{c_v}{R}P_2V_2 - \frac{c_v}{R}P_1V_1 + \frac{c_v+R}{R}P_3V_3 - \frac{c_v+R}{R}P_2V_2 = \frac{c_v}{R}P_0V_0(n-1) + \frac{c_v+R}{R}P_0V_0n(n-1).$$

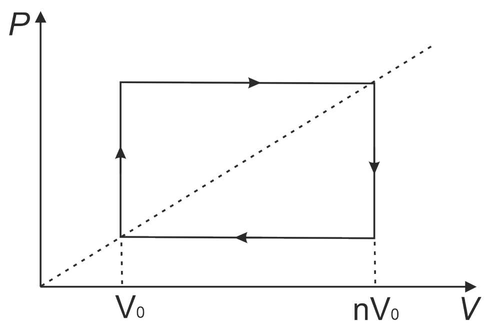
Отсюда получаем:

$$k = Q/A = \frac{\frac{c_v}{R}P_0V_0(n-1) + \frac{c_v+R}{R}P_0V_0n(n-1)}{P_0V_0(n-1)^2} = \frac{c_v}{R}\frac{1}{n-1} + \frac{c_v+R}{R}\frac{n}{n-1} = \frac{c_v(n+1)+nR}{R(n-1)} \approx 9,22 \quad \to \quad k \approx 922\%\,.$$

Ответ:

$$k = 922\%$$

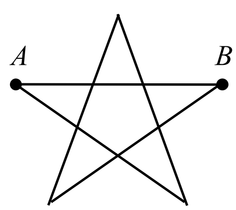
Задача 3/2. Цикл работы тепловой машины (рабочее тело – идеальный газ с молярной теплоемкостью при постоянном объеме $c_v = 15\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$) состоит из двух изохор и двух изобар (см. рис.). Найдите отношение тепла, полученного газом, к работе газа за цикл. Отношение максимального объема газа к минимальному $n = 3$. Ответ приведите в процентах, округлив до целых.



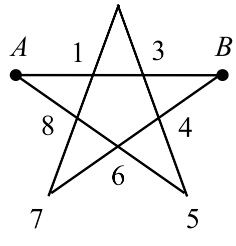
Ответ:

$$k = 511\%$$

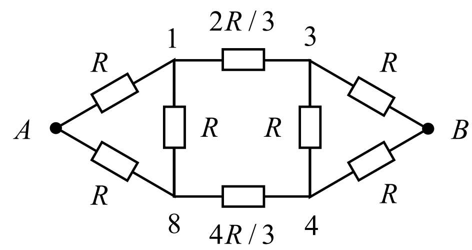
Задача 4/1. Из пятнадцати проволочных отрезков сопротивлением $R = 0{,}32$ Ом каждый собрана пятиконечная звезда. Найдите общее сопротивлеие звезды R_0 при её подключении к источнику постоянного тока за точки A и B. Ответ выразите в омах и округлите до сотых.

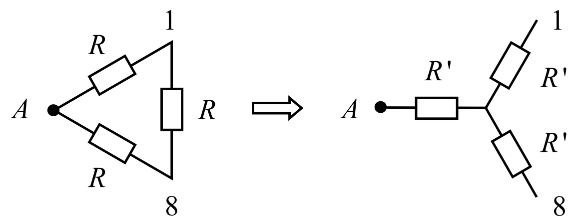


Возможное решение



Обозначим узлы звезды цифрами от 1 до 8. Треугольники 123, 456 и 678 состоят из сопротивлений R и $2R$, соединённых параллельно. Эквивалентное сопротивление каждого такого треугольника равно $2R/3$. Кроме того, треугольники 456 и 678 соединены последовательно, поэтому их можно заменить одним сопротивлением $4R/3$. В результате получаем упрощённую схему. Для того чтобы продвинуться дальше, преобразуем треугольник $A18$ в звезду. Так как сопротивления всех сторон

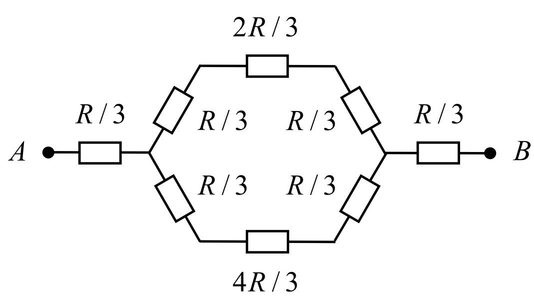




треугольника одинаковы, то звезда также состоит из одинаковых сопротивлений R'. Значение R' найдём, потребовав, чтобы при подключении источника тока за точки A и 1 сопротивления треугольника и звезды совпадали. Получаем:

$$\frac{2R}{3} = 2R' \quad \longrightarrow \quad R' = \frac{R}{3}\,.$$

Заменяя треугольник $B43$ на такую же звезду, приходим к схеме, общее сопротиление которой легко вычисляется по обычным правилам сложения сопротивлений при параллельном и последовательном соединениях.



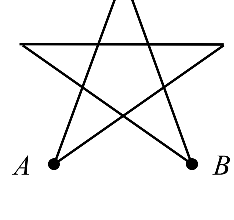
Окончательно получаем:

$$R_0 = \frac{22\,R}{15} = 0{,}47\ \text{Ом}$$

Ответ:

$$R_0 = \frac{22\,R}{15} = 0{,}47\ \text{Ом}$$

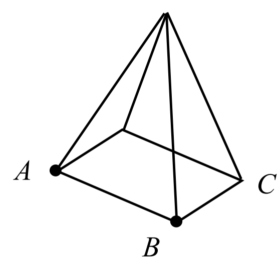
Задача 4/2. Из пятнадцати проволочных отрезков сопротивлением $R = 0{,}24$ Ом каждый собрана пятиконечная звезда. Найдите общее сопротивлеие звезды R_0 при её подключении к источнику постоянного тока за точки A и B. Ответ выразите в омах и округлите до сотых.



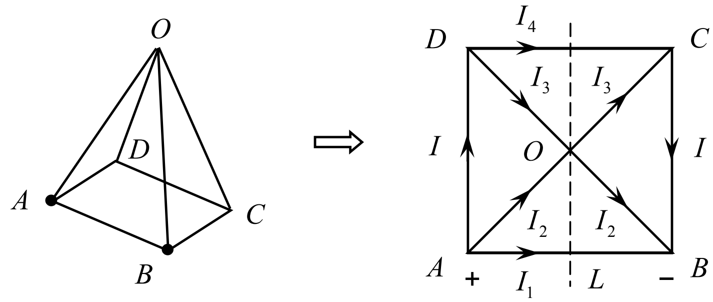
Ответ:

$$R_0 = \frac{6\,R}{5} = 0{,}29\ \text{Ом}$$

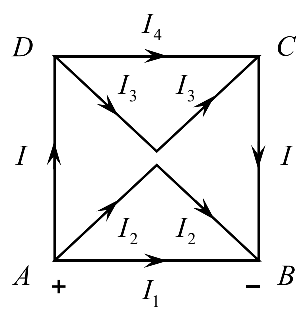
Задача 5/1. Из восьми проволочных отрезков сопротивлением $R = 0{,}2$ Ом каждый собрана четырёхугольная пирамида. Пирамида подключёна к источнику постоянного напряжения $V = 15$ мВ за точки A и B. Найдите силу тока I, текущего по стороне основания BC. Ответ выразите в миллиамперах и округлите до десятых.



Возможное решение



Пусть положительный полюс батареи подключён к точке A, а отрицательный к точке B. Перерисуем пирамиду в виде плоской схемы и рассмотрим распределение токов в ветвях. Так как при подключении батареи к точкам A и B схема зеркально симметрична относительно прямой L, продящей через точку O и середины отрезков AB и DC, распределение токов также обладает зеркальной симметрией. В частности, по отрезкам AO и OB течёт один и тот же ток I_2, а по отрезкам DO и OC один и тот же ток I_3. Поэтому точку O можно разорвать без изменения распределения токов. В результате получаем простую схему, в которой можно легко найти ток I.



Верхний треугольник, по которому текут токи I_3 и I_4, состоит из двух сопротивлений R и $2R$, соединённых параллельно. Этот треугольник можно заменить одним эквивалентным сопротивлением $2R/3$. Тогда полное сопротивление R' участка $ADCB$ равно:

$$R' = R + \frac{2R}{3} + R = \frac{8R}{3}.$$

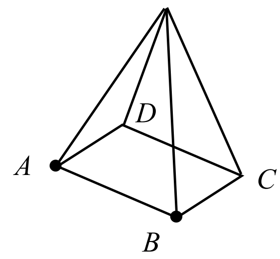
Для тока I получаем:

$$I = \frac{V}{R'} = \frac{3\,V}{8\,R} = 28{,}1 \text{ мА}.$$

Ответ:

$$I = \frac{3\,V}{8\,R} = 28{,}1 \text{ мА}$$

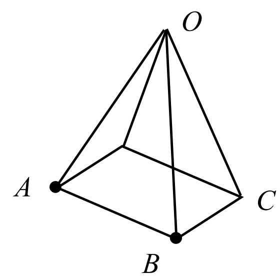
Задача 5/2. Из восьми проволочных отрезков сопротивлением $R = 0{,}43$ Ом каждый собрана четырёхугольная пирамида. Пирамида подключёна к источнику постоянного напряжения $V = 75$ мВ за точки A и B. Найдите силу тока I, текущего по стороне основания CD. Ответ выразите в миллиамперах и округлите до десятых.



Ответ:

$$I = \frac{V}{4\,R} = 43{,}6 \text{ мА}$$

Задача 5/3. Из восьми проволочных отрезков сопротивлением $R = 0{,}11$ Ом каждый собрана четырёхугольная пирамида. Пирамида подключёна к источнику постоянного напряжения $V = 30$ мВ за точки A и B. Найдите силу тока I, текущего по боковому ребру OC. Ответ выразите в миллиамперах и округлите до десятых.

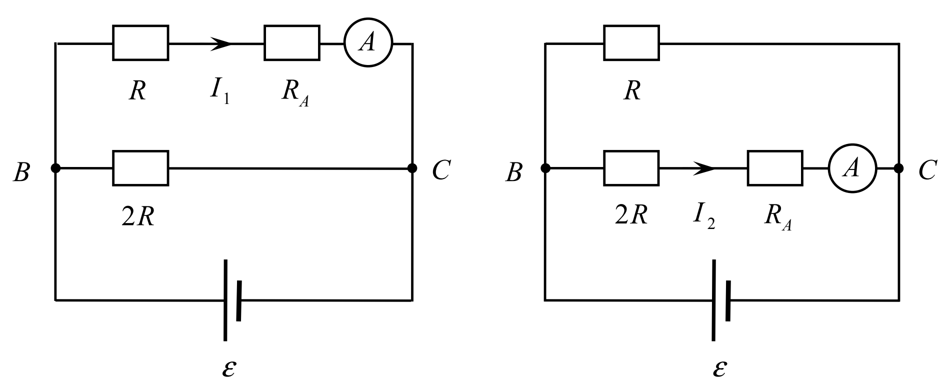


Ответ:

$$I = \frac{V}{8\,R} = 34{,}1 \text{ мА}$$

Задача 6/1. Два сопротивления, одно из которых в 2 раза больше другого, соединены параллельно и подключены к батарее. Измеряя с помощью одного и того же амперметра силу тока, текущего через сопротивления, получили значения $I_1 = 30$ мА для меньшего сопротивления и $I_2 = 20$ мА для большего. Найдите показание амперметра I, если в той же цепи использовать его для измерения силы тока, текущего через батарею. Ответ выразите в миллиамперах. Внутреннее сопротивление батареи не учитывайте.

Возможное решение



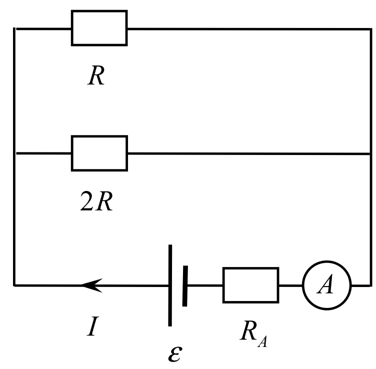
Пусть R и $2\,R$ — параллельно соединённые сопротивления. Неравенство $I_1 \neq 2I_2$ означает, что сопротивление амперметра отлично от нуля. Обозначим его через R_A. Учитывая, что при измерении токов I_1 и I_2 напряжение между точками B и C равно эдс батареи ε, получаем два уравнения:

$$R + R_A = \frac{\varepsilon}{I_1}, \quad 2\,R + R_A = \frac{\varepsilon}{I_2}$$

Выразим отсюда R и R_A :

$$R = \frac{\varepsilon}{I_2} - \frac{\varepsilon}{I_1} = \frac{\varepsilon\,(\,I_1 - I_2\,)}{I_1 I_2}\,, \quad R_A = \frac{2\,\varepsilon}{I_1} - \frac{\varepsilon}{I_2} = \frac{\varepsilon\,(\,2\,I_2 - I_1\,)}{I_1 I_2}.$$

При измерении силы тока, текущего через батарею, амперметр соединяется последовательно с парой сопротивлений R и



$2\,R$. Общее сопротивление цепи в этом случае равно:

$$R_0 = \frac{2\,R}{3} + R_A = \frac{2\,R + 3\,R_A}{3}.$$

Здесь $2\,R/3$ — общее сопротивление пары R и $2\,R$. Используя выражения для R и R_A , получаем:

$$R_0 = \frac{\varepsilon}{3\,I_1 I_2}\,(\,2\,I_1 - 2\,I_2 + 6\,I_2 - 3\,I_1\,) = \frac{\varepsilon\,(\,4\,I_2 - I_1\,)}{3\,I_1 I_2}.$$

Ток I, текущий через батарею, равен

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0} = \frac{3\,I_1 I_2}{4\,I_2 - I_1}.$$

Подставим числовые значения токов в миллиамперах:

$$I = \frac{3 \cdot 30 \cdot 20}{80 - 30} = \frac{180}{5} = 36 \text{ мА}.$$

Ответ :

$$I = \frac{3I_1 I_2}{4I_2 - I_1} = 36 \text{ мА}\,.$$

Задача 6/2. К батарее последовательно подключены два одинаковых сопротивления. Измеряя с помощью одного и того же вольтметра напряжение на одном из сопротивлений и на обоих сопротивлениях получили, значения $V_1 = 40$ В и $V_2 = 100$ В . Найдите, какое напряжение V покажет вольтметр, если включить его последовательно с сопротивлениями. Ответ выразите в вольтах. Внутреннее сопротивление батареи не учитывайте.

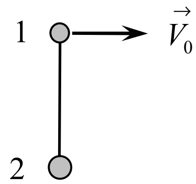
Ответ :

$$V = \frac{V_1 V_2}{2V_2 - 3V_1} = 50 \text{ В}\,.$$

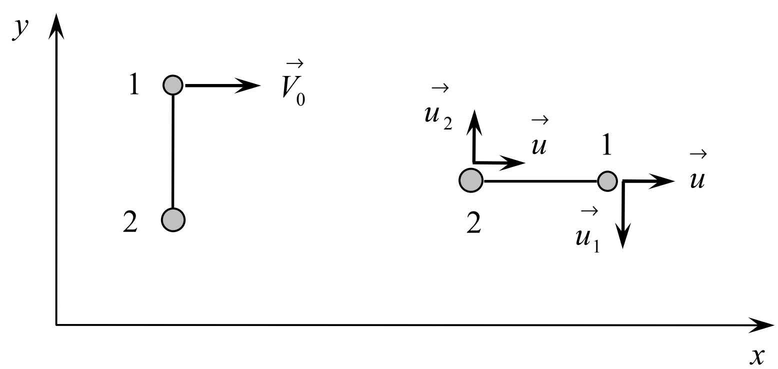
Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2021

Онлайн-этап. 11 класс

Задача 1/1. По гладкой горизонтальной поверхности скользят две маленькие шайбы 1 и 2, соединённые жёстким невесомым стержнем. Известно отношение масс шайб: $m_2/m_1 = 3$. В некоторый момент времени, принятый за начальный, скорость $\overrightarrow{V_0}$ шайбы 1 направлена перпендикулярно стержню, а скорость шайбы 2 равна нулю. Найдите отношение $x = V_1/V_2$, где V_1 и V_2 — скорости шайб 1 и 2 в момент, когда стержень повернулся на угол 90° относительно начального положения. Ответ округлите до сотых.



Возможное решение



Разложим скорости шайб на составляющие, параллельные и перпендикулярные стержню в конечном положении:

$$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u_1},$$

$$\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u_2}.$$

Вектор $\overrightarrow{u}$ направлен вдоль стержня. Так как длина стержня не меняется при движении, эта составляющая одинакова для обеих шайб. Векторы $\overrightarrow{u_1}$ и $\overrightarrow{u_2}$ перпендикулярны стержню. Поскольку шайбы движутся без трения, их суммарный импульс сохраняется:

$$m_1\overrightarrow{V_0} = m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2} \quad \to \quad m_1\overrightarrow{V_0} = m_1(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u_1}) + 3\,m_1(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u_2}) \quad \to \quad \overrightarrow{V_0} = 4\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u_1} + 3\,\overrightarrow{u_2}.$$

Направим оси неподвижной системы координат вдоль начального и конечного положений стержня. В проекциях имеем:

$$V_0 = 4\,u \quad \to \quad u = \frac{V_0}{4},$$

$$0 = -u_1 + 3\,u_2 \quad \to \quad u_1 = 3\,u_2.$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} \quad \to \quad m_1 V_0^2 = m_1(u^2 + u_1^2) + 3\,m_1(u^2 + u_2^2) \quad \to \quad V_0^2 = 4\,u^2 + u_1^2 + 3\,u_2^2.$$

Подставляя сюда полученные выше выражения для u и u_1, последовательно находим все скорости:

$$V_0^2 = 4\cdot\frac{V_0^2}{16} + 9\,u_2^2 + 3\,u_2^2 \quad \to \quad 12\,u_2^2 = \frac{3\,V_0^2}{4} \quad \to \quad u_2^2 = \frac{V_0^2}{16} \quad \to \quad u_2 = \frac{V_0}{4},$$

$$u_1 = 3\,u_2 = \frac{3\,V_0}{4}.$$

$$V_1 = \sqrt{u^2 + u_1^2} = \sqrt{\left(\frac{V_0}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\,V_0}{4}\right)^2} = \frac{V_0\,\sqrt{10}}{4}\,,$$

$$V_2 = \sqrt{u^2 + u_2^2} = \sqrt{\left(\frac{V_0}{4}\right)^2 + \left(\frac{V_0}{4}\right)^2} = \frac{V_0\,\sqrt{2}}{4}\,.$$

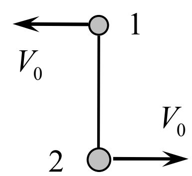
Отношение скоростей равно:

$$x = \frac{V_1}{V_2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24.$$

Ответ:

$$x = \sqrt{5} = 2{,}24$$

Задача 1/2. По гладкой горизонтальной поверхности скользят две маленькие шайбы 1 и 2, соединённые жёстким невесомым стержнем. Известно отношение масс шайб: $m_2/m_1 = 2$. В некоторый момент времени, принятый за начальный, скорости шайб равны по абсолютной величине и направлены перпендикулярно стержню в противоположные стороны. Найдите отношение $x = V_1/V_2$, где V_1 и V_2 — скорости шайб 1 и 2 в момент, когда стержень повернулся на угол $90°$ относительно начального положения. Ответ округлите до сотых.

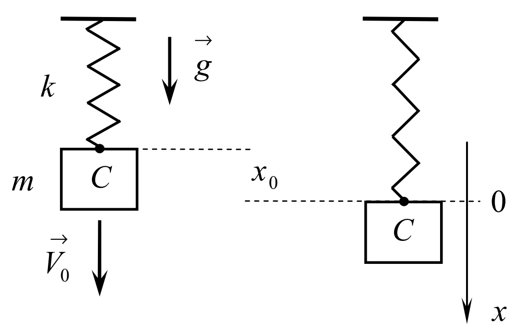


Ответ:

$$x = 1,84$$

Задача 2/1. Груз, подвешенный к потолку на невесомой пружине, может совершать вертикальные гармонические колебания с периодом T. Колебания возбудили, поместив груз в положение, в котором пружина не деформирована, и сообщив ему направленную вниз скорость $V_0 = 2g/\omega$, где g — ускорение свободного падения, $\omega = 2\pi/T$ — круговая частота колебаний. Найдите время τ, прошедшее от начала движения до момента, когда скорость груза стала максимальной. Ответ выразите в виде отношения $x = \tau/T$, округлённого до тысячных.

Возможное решение



Найдём сначала величину x_0 удлинения пружины в положении равновесия:

$$mg = k\,x_0 \quad \to \quad x_0 = \frac{mg}{k}\,,$$

m — масса груза, k — жёсткость пружины. При вертикальных колебаниях все точки груза движутся с одним и тем же ускорением. Поэтому в качестве координаты груза можно использовать координату любой его точки. Удобно выбрать точку C, в которой пружина прикреплена к грузу. Направим ось x вертикально вниз и будем отсчитывать координату точки C от её равновесного положения. Запишем второй закон Ньютона:

$$m\,a_x = -k\,(\,x_0 + x\,) + mg\,.$$

Здесь a_x — проекция ускорения груза на ось x, x — координата точки C, $(\,x_0 + x\,)$ — удлинение пружины. Учитывая равенство $mg = k\,x_0$, получаем:

$$m\,a_x = -k\,x \quad \to \quad a_x + \frac{k}{m}\,x = 0 \quad \to \quad a_x + \omega^2 x = 0\,.$$

Это уравнение гармонических колебаний с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

и периодом $T = 2\pi/\omega$. Зависимости от времени координаты и проекции скорости груза на ось x определяются следующими формулами:

$$x\,(\,t\,) = A\sin\,(\,\omega\,t + \alpha\,)\,, \quad V_x\,(\,t\,) = A\,\omega\cos\,(\,\omega\,t + \alpha\,)\,,$$

A — амплитуда колебаний, α — начальная фаза. Для того чтобы найти эти величины, нужно задать начальные значения координаты и скорости при $t = 0$. В нашем случае:

$$x\,(\,0\,) = -x_0 \quad \to \quad A\sin\alpha = -\frac{mg}{k} = -\frac{g}{\omega^2}$$

$$V_x\,(\,0\,) = V_0 \quad \to \quad A\,\omega\cos\alpha = V_0\,.$$

В дальнейшем нам потребуется только значение начальной фазы α. Так как амплитуда колебаний считается положительной величиной, то $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha > 0$. Поэтому угол α лежит в четвёртой четверти. Выразим его через арктангенс:

$$\sin\alpha = -\frac{g}{A\,\omega^2}\,, \quad \cos\alpha = \frac{V_0}{A\,\omega} \quad \to \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{g}{\omega\,V_0} \quad \to \quad \alpha = -\operatorname{arctg}\left(\frac{g}{\omega\,V_0}\right)\,.$$

Скорость груза достигает максимального значения в положении равновесия:

$$\cos\,(\,\omega\,\tau + \alpha\,) = 1 \quad \to \quad \omega\,\tau + \alpha = 2\,\pi\,n \quad \to \quad \tau = \frac{-\alpha + 2\,\pi\,n}{\omega}\,,$$

n — целое число. Минимальное положительное значение τ получается при $n = 0$:

$$\tau = -\frac{\alpha}{\omega} = \frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\left(\frac{g}{\omega\,V_0}\right) \quad \to \quad X = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2\,\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{g}{\omega\,V_0}\right)$$

При $V_0 = 2g\,/\omega$ получаем:

$$X = \frac{1}{2\,\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = 0,074\,.$$

Ответ:

$$X = \frac{1}{2\,\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{g}{\omega\,V_0}\right) = \frac{1}{2\,\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = 0,074$$

Задача 2/2. Груз, подвешенный к потолку на невесомой пружине, может совершать вертикальные гармонические колебания с периодом T. Колебания возбудили, поместив груз в положение, в котором пружина не деформирована, и сообщив ему направленную вверх скорость $V_0 = g\,/(2\,\omega)$, где g — ускорение свободного падения, $\omega = 2\pi/T$ — круговая частота колебаний. Найдите время τ, прошедшее от начала движения до момента, когда абсолютная величина скорости груза стала максимальной. Ответ выразите в виде отношения $X = \tau/T$, округлённого до тысячных.

Ответ:

$$X = \frac{1}{2\,\pi}\left(\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{g}{\omega V_0}\right)\right) = 0,324$$

Задача 2/3. Груз, подвешенный к потолку на невесомой пружине, может совершать вертикальные гармонические колебания с периодом T. Колебания возбудили, поместив груз в положение, в котором удлинение пружины в два раза больше, чем в положении равновесия, и сообщив ему направленную вниз скорость $V_0 = 2\,g/\omega$, где g — ускорение свободного падения, $\omega = 2\pi/T$ — круговая частота колебаний. Найдите время τ, прошедшее от начала движения до момента, когда длина пружины стала максимальной. Ответ выразите в виде отношения $X = \tau/T$, округлённого до тысячных.

Ответ:

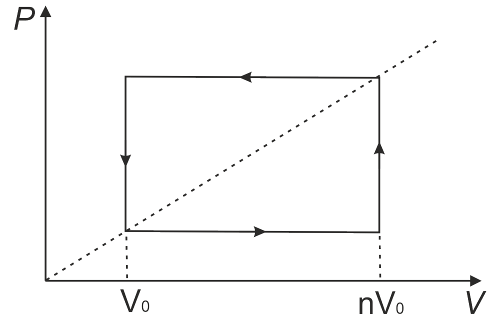
$$X = \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{g}{\omega V_0}\right)\right) = 0,176$$

Задача 2/4. Груз, подвешенный к потолку на невесомой пружине, может совершать вертикальные гармонические колебания с периодом T. Колебания возбудили, поместив груз в положение, в котором удлинение пружины в полтора раза больше, чем в положении равновесия, и сообщив ему направленную вверх скорость $V_0 = g/(3\,\omega)$, где g — ускорение свободного падения, $\omega = 2\pi/T$ — круговая частота колебаний. Найдите время τ, прошедшее от начала движения до момента, когда длина пружины стала минимальной. Ответ выразите в виде отношения $X = \tau/T$, округлённого до тысячных.

Ответ:

$$X = \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{g}{2\,\omega V_0}\right)\right) = 0,406$$

Задача 3/1. Цикл работы холодильной машины (рабочее тело – идеальный газ с молярной теплоемкостью при постоянном объеме $c_v = 20\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$) состоит из двух изохор и двух изобар (см. рисунок). Найдите отношение тепла, полученного газом, к работе над ним за цикл. Отношение максимального объема газа к минимальному $n = 2$. Ответ приведите в процентах, округлив до целых.



Возможное решение

Обозначим минимальное давление в цикле как P_0, а максимальное P_{max}. Пронумеруем точки цикла против часовой стрелки следующим образом: изобарический процесс с увеличением объема от V_0 до nV_0 – процесс $1-2$, изохорический процесс с увеличением давления от P_0 до P_{max} – процесс $2-3$, изобарический процесс с уменьшением объема от nV_0 до V_0 – процесс $3-4$, изохорический процесс с уменьшением давления от P_{max} до P_0 – процесс $4-1$. Найдем максимальное давление P_{max} в цикле из подобия прямоугольных треугольников:

$$P_0/V_0 = P_{max}/nV_0 \quad \to \quad P_{max} = nP_0\,.$$

Найдем работу над газом за цикл, как площадь прямоугольника $1-2-3-4$:

$$A = P_0V_0(n-1)^2\,.$$

Молярная теплоемкость при постоянном объеме равна $c_v = \frac{i}{2}R$. Напишем уравнение Майера: $c_p - c_v = R$, где c_p – молярная теплоемкость при постоянном давлении. Количество теплоты Q будет подводится к циклу в процессах $1-2$ и $2-3$, тогда:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \frac{c_v+R}{R}P_2V_2 - \frac{c_v+R}{R}P_1V_1 + \frac{c_v}{R}P_3V_3 - \frac{c_v}{R}P_2V_2 = \frac{c_v+R}{R}P_0V_0(n-1) + \frac{c_v}{R}P_0V_0n(n-1)\,.$$

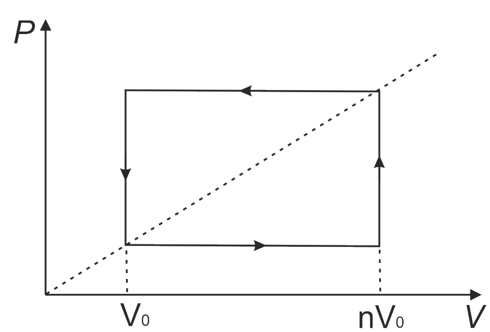
Отсюда получаем:

$$k = Q/A = \frac{\frac{c_v+R}{R}P_0V_0(n-1) + \frac{c_v}{R}P_0V_0n(n-1)}{P_0V_0(n-1)^2} = \frac{c_v+R}{R}\frac{1}{n-1} + \frac{c_v}{R}\frac{n}{n-1} = \frac{c_v(n+1)+R}{R(n-1)} \approx 8{,}22 \quad \to \quad k \approx 822\%\,.$$

Ответ:

$$k = 822\%$$

Задача 3/2. Цикл работы холодильной машины (рабочее тело – идеальный газ с молярной теплоемкостью при постоянном объеме $c_v = 15\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$) состоит из двух изохор и двух изобар (см. рисунок). Найдите отношение тепла, полученного газом, к работе над ним за цикл. Отношение максимального объема газа к минимальному $n = 3$. Ответ приведите в процентах, округлив до целых.

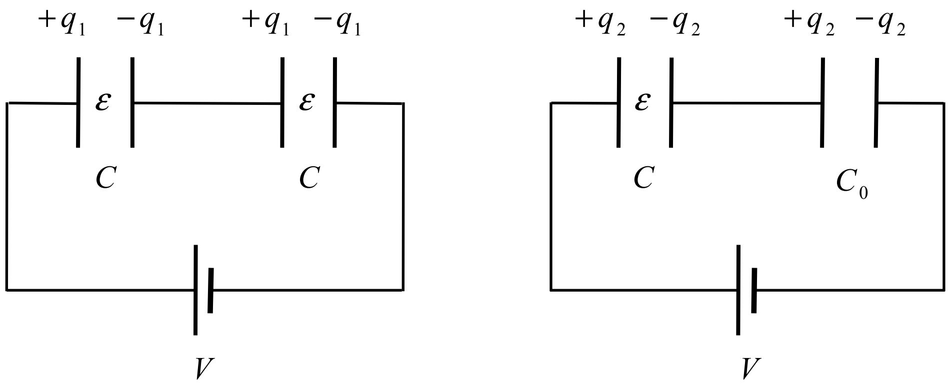


Ответ:

$$k = 411\%$$

Задача 4/1. В плоский конденсатор введена пластина из диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 3$. Пластина заполняет всё пространство между обкладками. Ёмкость конденсатора с пластиной $C = 1,5$ мкФ. Два таких конденсатора соединены последовательно и подключены к батарее с эдс $V = 12$ В. Найдите минимальную работу A, необходимую для удаления пластины из одного конденсатора. Ответ выразите в микроджоулях. Силу тяжести и трение не учитывайте.

Возможное решение



До удаления пластины напряжение на каждом конденсаторе равно $V/2$. Начальный заряд конденсаторов равен:

$$q_1 = \frac{C\,V}{2}\,.$$

После удаления пластины из одного конденсатора его ёмкость уменьшается в ε раз:

$$C_0 = \frac{C}{\varepsilon}\,.$$

Найдём конечный заряд конденсаторов q_2:

$$V = \frac{q_2}{C} + \frac{q_2}{C_0} = \frac{q_2\,(\,\varepsilon+1\,)}{C} \quad\to\quad q_2 = \frac{C\,V}{\varepsilon+1}\,.$$

Будем считать, что пластина выдвигается очень медленно. В этом случае искомая работа внешних сил A будет минимальной, поскольку можно пренебречь потерями энергии на выделение тепла и излучение. Запишем уравнение баланса энергии в цепи для этого случая:

$$W_2 - W_1 = A + A'\,.$$

Здесь W_1 и W_2 — начальная и конечная энергии конденсаторов, A' — работа батареи. Для энергий имеем:

$$W_1 = 2\cdot\frac{C\,(\,V/2\,)^2}{2} = \frac{C\,V^2}{4}\,,$$

$$W_2 = \frac{q_2^2}{2\,C} + \frac{q_2^2}{2\,C_0} = \frac{q_2^2\,(\,\varepsilon+1\,)}{2\,C} = \frac{C\,V^2}{2\,(\,\varepsilon+1\,)}\,,$$

$$W_2 - W_1 = \frac{C\,V^2}{2\,(\,\varepsilon+1\,)} - \frac{C\,V^2}{4} = -\frac{C\,V^2}{4}\left(1-\frac{2}{\varepsilon+1}\right) = -\frac{C\,V^2\,(\,\varepsilon-1\,)}{4\,(\,\varepsilon+1\,)}\,.$$

Работа батареи равна:

$$A' = (\,q_2 - q_1\,)\,V = \left(\frac{C\,V}{\varepsilon+1} - \frac{C\,V}{2}\right)V = -\frac{C\,V^2}{2}\left(1-\frac{2}{\varepsilon+1}\right) = -\frac{C\,V^2\,(\,\varepsilon-1\,)}{2\,(\,\varepsilon+1\,)}\,.$$

Окончательно получаем:

$$A = W_2 - W_1 - A' = -\frac{C\,V^2\,(\,\varepsilon-1\,)}{4\,(\,\varepsilon+1\,)} + \frac{C\,V^2\,(\,\varepsilon-1\,)}{2\,(\,\varepsilon+1\,)} = \frac{C\,V^2\,(\,\varepsilon-1\,)}{4\,(\,\varepsilon+1\,)}\,.$$

Подставим числовые значения:

$$A = \frac{1,5\cdot10^{-6}\cdot144\cdot2}{4\cdot4} = 27\cdot10^{-6}\ \text{Дж} = 27\ \text{мкДж}\,.$$

Ответ:

$$A = \frac{C\,V^2\,(\,\varepsilon-1\,)}{4\,(\,\varepsilon+1\,)} = 27\ \text{мкДж}$$

Задача 4/2. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора емкостью $C = 0,25$ мкФ каждый соединены последовательно и подключены к батарее с эдс $\varepsilon = 24$ В. Найдите минимальную работу A, необходимую для увеличения расстояния между пластинами одного конденсатора в $k = 3$ раза. Ответ выразите в микроджоулях.

Ответ:

$$A = \frac{C\,\varepsilon^2\,(\,k-1\,)}{4\,(\,k+1\,)} = 18 \ \text{мкДж}$$

Задача 5/1. Металлические «часы» представляют собой окружность радиуса $R = 10$ см с металлическими стрелками A и B, которые касаются окружности и имеют общую металлическую ось вращения. Стрелки A и B имеют равную длину R и вращаются с угловыми скоростями $\omega_1 = 1$ с$^{-1}$ и $\omega_2 = 10$ с$^{-1}$ соответственно. «Часы» находятся в магнитном поле $B = 0{,}1$ Тл, перпендикулярном плоскости вращения. Найти модуль разности потенциалов между серединами стрелок A и B. Ответ выразить в мВ, округлив до десятых.

Возможное решение

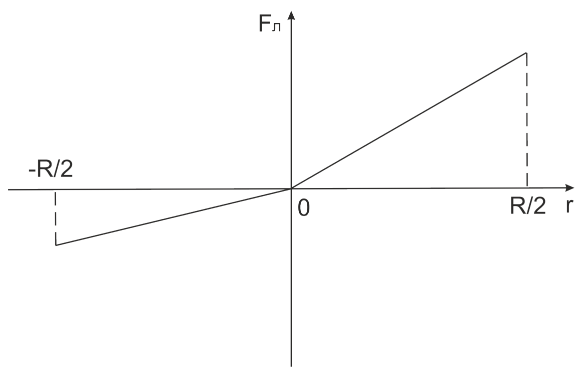
Напишем проекцию вдоль стрелки силы Лоренца действующую на произвольный заряд на стрелке:

$$F_л = qvB\,,$$

где v – скорость заряда q. Скорость заряда выразим через угловую скорость и подставим в выражение для проекции силы Лоренца:

$$F_л = q\omega rB\,,$$

где r – расстояние от оси вращения до зарядов на стрелках. Найдем суммарную работу проекции силы Лоренца по перемещению заряда из середины стрелки A до оси вращения A_{AO} и от оси вращения до середины стрелки B – A_{OB}. Работа проекции силы Лоренца будет меняться линейно при движении заряда по стрелкам и при переходе со стрелки A на стрелку B поменяет знак. Изменение проекции силы Лоренца изобразим в виде графика. Тогда работа по перемещению



заряда будет равна площади под графиком:

$$A = A_{AO} + A_{OB} = -q\omega_1 B\frac{R^2}{8} + q\omega_2 B\frac{R^2}{8} = q(\omega_2 - \omega_1)B\frac{R^2}{8}\,.$$

Отсюда находим разность потенциалов между между серединами стрелок A и B:

$$\Delta\phi = \frac{A}{q} = (\omega_2 - \omega_1)B\frac{R^2}{8} \approx 1{,}1 \text{ мВ}\,.$$

Ответ:

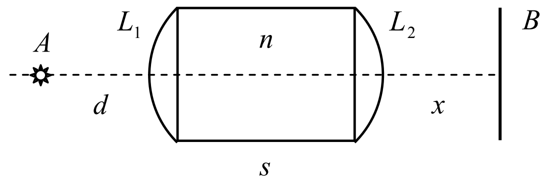
$$\Delta\phi = 1{,}1 \text{ мВ}$$

Задача 5/2. Металлические «часы» представляют собой окружность радиуса $R = 10$ см с металлическими стрелками A и B, которые касаются окружности и имеют общую металлическую ось вращения. Стрелки A и B имеют равную длину R и вращаются с угловыми скоростями $\omega_1 = 1$ с$^{-1}$ и $\omega_2 = 5$ с$^{-1}$ соответственно. «Часы» находятся в магнитном поле $B = 0{,}2$ Тл, перпендикулярном плоскости вращения. Найти модуль разности потенциалов между серединами стрелок A и B. Ответ выразить в мВ, округлив до десятых.

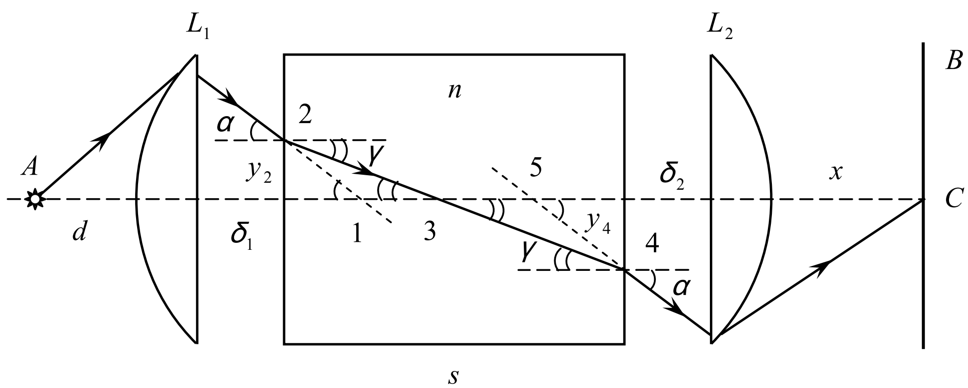
Ответ:

$$\Delta\phi = 1{,}0 \text{ мВ}$$

Задача 6/1. Круговой цилиндр длиной $s = 65$ см закрыт с торцов тонкими плосковыпуклыми линзами L_1 и L_2, обращёнными плоскими сторонами внутрь цилиндра. Главные оптические оси линз совпадают с осью цилиндра, фокусные расстояния линз в воздухе $F_1 = 16$ см и $F_2 = 10$ см. Внутри цилиндр заполнен водой. Показатель преломления воды относительно воздуха $n = 1{,}33$. На оси цилиндра, на расстоянии $d = 40$ см от линзы L_1, расположен точечный источник света A, изображение которого получено на экране B. Найдите расстояние x между линзой L_2 и экраном. Ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.



Возможное решение



Пусть луч света, испущенный источником A вдоль главной оптической оси линз, попадает в точку C экрана. Рассмотрим произвольный луч, испущенный источником под малым углом к оптической оси. Требуется подобрать расстояние x между экраном и линзой L_2 так, чтобы этот луч также попал в точку C. Тогда точка C будет изображением источника. Будем считать, что плоские стороны линз и торцы цилиндра с водой разделены узкими воздушными промежутками, ширины которых равны δ_1 и δ_2. В конечных результатах эти величины следует положить равными нулю. Рассмотрим прохождение луча через линзу L_1. Если бы за линзой не было воды, то луч пересёк бы главную оптическую ось в точке 1. Из-за дополнительного преломления в точке 2, лежащей на левой границе раздела воздуха и воды, луч пересечёт ось в точке 3. Обозначим через f_1 и f_3 расстояния от плоской поверхности линзы L_1 до точек 1 и 3. Расстояния от этих точек до левой границы раздела воздуха и воды равны $f_1 - \delta_1$ и $f_3 - \delta_1$. Запишем формулу линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1}\,.$$

Рассмотрим преломление в точке 2. Обозначим через α и γ углы падения и преломления. По закону преломления имеем:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n\,.$$

Угол α следует считать малым, поскольку только в этом случае справедлива стандартная формула линзы. Из закона преломления следует, что угол γ также мал. Заменяя синусы на углы, получаем:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = n\,.$$

Обозначим через y_2 расстояние от оптической оси до точки 2. Тогда

$$\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha = \frac{y_2}{f_1 - \delta_1}\,, \quad \gamma \approx \mathrm{tg}\gamma = \frac{y_2}{f_3 - \delta_1} \quad \longrightarrow \quad \frac{f_3 - \delta_1}{f_1 - \delta_1} = n\,.$$

Положим здесь $\delta_1 = 0$, выразим f_1 через f_3, подставим в формулу линзы и найдём f_3:

$$\frac{f_3}{f_1} = n \quad \longrightarrow \quad f_1 = \frac{f_3}{n}\,,$$

$$\frac{1}{d} + \frac{n}{f_3} = \frac{1}{F_1} \quad \longrightarrow \quad f_3 = \frac{n\,d\,F_1}{d - F_1} = \frac{1{,}33 \cdot 40\ \text{см} \cdot 16\ \text{см}}{24\ \text{см}} = 35{,}5\ \text{см}\,.$$

Положение точки 3 одинаково для всех лучей, испущенных источником под малыми углами к оптической оси. Поэтому в этой точке будет первое изображение. Неравенство $f_3 < s$ означает, что точка 3 расположена внутри цилиндра с водой. Расстояние от этой точки до правой границы раздела воздуха и воды равно $s - f_3$.

После прохождения точки 3 луч попадает в точку 4, лежащую на правой границе раздела воздуха и воды. Угол падения на эту границу равен γ, поэтому угол преломления будет α. Луч, вышедший в воздушный промежуток шириной δ_2, падает на линзу L_2 и, преломившись в ней, попадает в точку C. Продолжение падающего луча пересекает оптическую ось в точке 5. Обозначим через f_5 расстояние от этой точки до плоской поверхности линзы L_2. Тогда расстояние до правой границы раздела воздуха и воды равно $f_5 - \delta_2$. Запишем формулу линзы, считая, что источник света находится в точке 5, а изображение в точке C:

$$\frac{1}{f_5} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F_2}\,.$$

Обозначим через y_4 расстояние от оптической оси до точки 4. Тогда

$$\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha = \frac{y_4}{f_5 - \delta_2}\,, \quad \gamma \approx \mathrm{tg}\gamma = \frac{y_4}{s - f_3}\,,$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} = n \quad \longrightarrow \quad \frac{s - f_3}{f_5 - \delta_2} = n\,.$$

Положим здесь $\delta_2 = 0$, выразим f_5 через f_3, подставим в формулу линзы и найдём x:

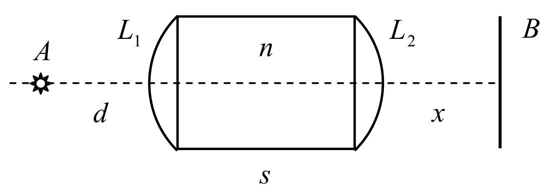
$$f_5 = \frac{s - f_3}{n}\,, \quad \frac{n}{s - f_3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F_2}\,,$$

$$x = \frac{F_2\,(\,s - f_3\,)}{s - f_3 - n\,F_2} = \frac{10\ \text{см} \cdot 29{,}5\ \text{см}}{29{,}5\ \text{см} - 1{,}33 \cdot 10\ \text{см}} = 18{,}2\ \text{см}\,.$$

Ответ:

$$x = 18{,}2\ \text{см}$$

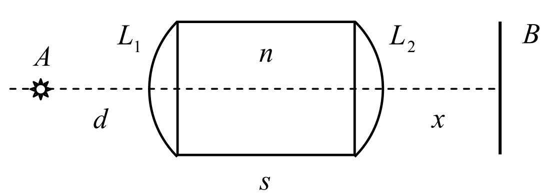
Задача 6/2. Круговой цилиндр длиной $s = 40$ см закрыт с торцов тонкими плосковыпуклыми линзами L_1 и L_2, обращёнными плоскими сторонами внутрь цилиндра. Главные оптические оси линз совпадают с осью цилиндра, фокусные расстояния линз в воздухе $F_1 = 20$ см и $F_2 = 30$ см. Внутри цилиндр заполнен водой. Показатель преломления воды относительно воздуха $n = 1{,}33$. На оси цилиндра, на расстоянии $d = 32$ см от линзы L_1, расположен точечный источник света A, изображение которого получено на экране B. Найдите расстояние x между линзой L_2 и экраном. Ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.



Ответ:

$$x = 13{,}1\ \text{см}$$

Задача 6/3. Круговой цилиндр длиной $s = 20$ см закрыт с торцов тонкими плосковыпуклыми линзами L_1 и L_2, обращёнными плоскими сторонами внутрь цилиндра. Главные оптические оси линз совпадают с осью цилиндра, фокусные расстояния линз в воздухе $F_1 = 40$ см и $F_2 = 12$ см. Внутри цилиндр заполнен водой. Показатель преломления воды относительно воздуха $n = 1{,}33$. На оси цилиндра, на расстоянии $d = 10$ см от линзы L_1, расположен точечный источник света A, изображение которого получено на экране B. Найдите расстояние x между линзой L_2 и экраном. Ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.

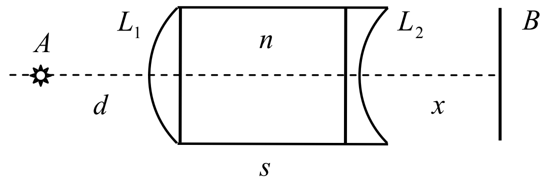


Ответ:

$$x = 20{,}8\ \text{см}$$

Задача 6/4.

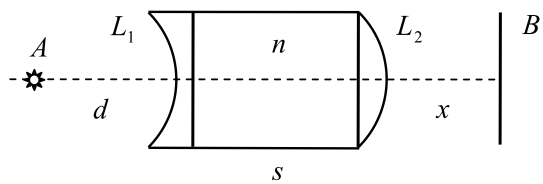
Круговой цилиндр длиной $s = 62$ см закрыт с торцов плосковыпуклой линзой L_1 и плосковогнутой линзой L_2. Плоские стороны линз обращены внутрь цилиндра, главные оптические оси совпадают с осью цилиндра, фокусные расстояния линз в воздухе $F_1 = 25$ см и $F_2 = 15$ см. Внутри цилиндр заполнен водой. Показатель преломления воды относительно воздуха $n = 1{,}33$. На оси цилиндра, на расстоянии $d = 45$ см от линзы L_1, расположен точечный источник света A, изображение которого получено на экране B. Найдите расстояние x между линзой L_2 и экраном. Ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.



Ответ:

$$x = 26{,}9 \text{ см}$$

Задача 6/5. Круговой цилиндр длиной $s = 26$ см закрыт с торцов плосковогнутой линзой L_1 и плосковыпуклой линзой L_2. Плоские стороны линз обращены внутрь цилиндра, главные оптические оси совпадают с осью цилиндра, фокусные расстояния линз в воздухе $F_1 = 30$ см и $F_2 = 10$ см. Внутри цилиндр заполнен водой. Показатель преломления воды относительно воздуха $n = 1{,}33$. На оси цилиндра, на расстоянии $d = 15$ см от линзы L_1, расположен точечный источник света A, изображение которого получено на экране B. Найдите расстояние x между линзой L_2 и экраном. Ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.



Ответ:

$$x = 15{,}1 \text{ см}$$