1. В ряд выписаны цифры 987654321. Поставьте между ними ровно два знака минус так, чтобы значение полученного выражения было минимальным. (Например, при расстановке $9876-54-321$ получается 9501.)

Ответ: $9-8765432-1$.

2. Существует ли четырехугольник, который можно разрезать на три равных треугольника двумя разными способами? Если не существует – докажите, если существует – постройте пример.

Решение: Трапеция с основаниями BC и AD длины 1 и 2 соответственно и боковой стороной CD длины $\sqrt{3}$, перпендикулярной основаниями. Разрезания $\Delta ABM, \Delta BCM, \Delta CDM$ и $\Delta ABM, \Delta BDM, \Delta BCD$ где M – середина AD.

3. Болельщики Спартака говорят правду, когда Спартак выигрывает, и лгут, когда он проигрывает. Аналогично ведут себя болельщики Динамо, Зенита и Локомотива. После двух матчей с участием этих четырех команд, каждая из которых закончилась победой одной из команд, а не ничьей, из болельщиков, смотревших трансляцию, на вопрос "болеете ли вы за Спартак?" положительно ответили 200 человек, на вопрос "болеете ли вы за Динамо?" положительно ответили 300 человек, на вопрос "болеете ли вы за Зенит?" положительно ответили 500 человек, на вопрос "болеете ли вы за Локомотив?" положительно ответили 600 человек. Сколько человек болело за каждую из команд?

Решение: Пусть за победившие команды болеют x и y человек, за проигравшие z и t. Тогда на вопросы про эти команды ответило $x+z+t, y+z+t, t, z$ человек соответственно. Значит, за Зенит болеет 200 человек, за Локомотив 300, за Спартак никто, а за Динамо 100 человек.
Критерии: $\mp$ – правильный ответ без обоснования,
$\pm$ – арифметическая ошибка, или небольшие пробелы в обосновании.

4. Найдите наименьшее целое положительное число, представимое в виде $20x^2+80xy+95y^2$ для некоторых целых чисел x и y. Строго обоснуйте ответ.

Решение: Поделим на 5. $4x^2+16xy+19y^2$. По модулю 4 или 0 или 3. 3 может быть:$x=2, y=-1$. Ответ – 15.
Критерии: $\mp$ – получен ответ без обоснования.

5. На доске написаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них $a+b+ab$. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно?

Ответ: $(1+1)(1+1/2)\ldots(1+1/100)-1=101-1=100$.
Решение: Необходимо показать ассоциативность операции для трёх произвольных a, b, c, а затем провести вычисление, заметив, что на каждом шаге получается выражение вида $(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_{k-1})-1$.
Критерии: $\mp$ – ответ без доказательства независимости от порядка операций.

6. Слова языка роботов планеты Шелезяка — последовательности стрелочек “вверх”, “вниз”, “влево” и “вправо”, причём две противонаправленные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000 слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая следующие изменения: ученик U приписывает перед словом стрелочку вверх, а если это запрещено (слово начинается с “вниз”), то убирает это первое “вниз”, ученики D, L, R делают всё то же самое, только приписывают соответственно стрелку вниз, влево или вправо, и вычёркивают первый символ, если он оказался “вверх”, “вправо”, “влево”. Докажите, что в одной из четырёх тетрадей минимум половина (500000) слов не будет встречаться среди слов на доске.

Решение: Разобьём слова, написанные на доске на 4 класса U, D, L, R согласно первой букве (будем маленькими буквами u, d, l, r обозначать число элементов в них, $u+d+l+r = 1000000$). Тогда в тетради ученика U будет написано $u+l+r$ слов, начинающихся на "вверх" (ибо к любому слову не из класса D он припишет "вверх"). Значит, если у него в тетради содержится N_u новых слов, то $u + l + r \leq u + N_u$. Написав три аналогичных неравенства и сложив их вместе, получим, что $3(u + d + l + r) \leq (u + d + l + r) + (N_u + N_d + N_l + N_r)$, то есть $N_u + N_d + N_l + N_r$ не меньше 2000000.

1. В ряд выписаны цифры 987654321. Поставьте между ними ровно два знака минус так, чтобы значение полученного выражения было минимальным. (Например, при расстановке $9876 - 54 - 321$ получается 9501.)

Ответ: $9 - 8765432 - 1$

2. Найдите наименьшее целое положительное число, представимое в виде $20x^2+80xy+95y^2$ для некоторых целых чисел x и y. Строго обоснуйте ответ.

Решение: Поделим на 5. $4x^2 + 16xy + 19y^2$. По модулю 4 или 0 или 3. 3 может быть:$x = 2, y = -1$. Ответ – 15.
Критерии: $\mp$ – получен ответ без обоснования.

3. Болельщики Спартака говорят правду, когда Спартак выигрывает, и лгут, когда он проигрывает. Аналогично ведут себя болельщики Динамо, Зенита и Локомотива. После двух матчей с участием этих четырех команд, каждая из которых закончилась победой одной из команд, а не ничьей, из болельщиков, смотревших трансляцию, на вопрос "болеете ли вы за Спартак?" положительно ответили 200 человек, на вопрос "болеете ли вы за Динамо?" положительно ответили 300 человек, на вопрос "болеете ли вы за Зенит?" положительно ответили 500 человек, на вопрос "болеете ли вы за Локомотив?" положительно ответили 600 человек. Сколько человек болело за каждую из команд?

Решение: Пусть за победившие команды болеют x и y человек, за проигравшие z и t. Тогда на вопросы про эти команды ответило $x+z+t, y+z+t, t, z$ человек соответственно. Значит, за Зенит болеет 0 человек, за Локомотив 100, за Спартак 300, а за Динамо 200 человек. Критерии: $\mp$ – правильный ответ без обоснования,
$\pm$ – арифметическая ошибка, или небольшие пробелы в обосновании.

4. Треугольник со сторонами 2, 3 и 3 разрезали на четыре подобных ему треугольника. Каковы могут быть коэффициенты подобия?

Ответ: 1/2 и 6/13, 4/13, 9/13, 6/13.
Решение: Заметим, что единственное расположение четырёх треугольников, так чтобы они были подобны большому (а, значит, и друг другу) – так чтобы у каждого треугольника разбиения одна вершина была вершиной треугольника и две другие на его сторонах, причем на каждой стороне большого треугольника отмечено по одной точке (A' на BC, B' на AC, C' на AC). Тогда есть ровно два варианта – $\angle CA'B' = \angle CAB$ и $\angle CA'B' = \angle CBA$. Остальные углы восстанавливаются однозначно. Оба варианта дают набор из четырёх подобных треугольников.
Критерии: $\mp$ – рассмотрен только первые вариант.

5. На доске написаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них $a + b + ab$. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно?

Ответ: $2^{99}(1+1)(1+1/2)\ldots(1+1/100)-1 = 2^{99}101-1$. Решение: Необходимо показать ассоциативность операции для трёх произвольных a, b, c, а затем провести вычисление, заметив, что на каждом шаге получается выражение вида $2^k(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_{k-1})-1$.
Критерии: $\mp$ – ответ без доказательства независимости от порядка операций.

6. Слова языка роботов планеты Шелезяка — последовательности стрелочек “вверх”, “вниз”, “влево” и “вправо”, причём две противонаправленные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000 слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая следующие изменения: ученик U приписывает перед словом стрелочку вверх, а если это запрещено (слово начинается с “вниз”), то

убирает это первое “вниз”, ученики D, L, R делают всё то же самое, только приписывают соответственно стрелку вниз, влево или вправо, и вычёркивают первый символ, если он оказался “вверх”, “вправо”, “влево”. Докажите, что в одной из четырёх тетрадей минимум половина (500000) слов не будет встречаться среди слов на доске.

Решение: Разобьём слова, написанные на доске на 4 класса U, D, L, R согласно первой букве (будем маленькими буквами u, d, l, r обозначать число элементов в них, $u+d+l+r = 1000000$). Тогда в тетради ученика U будет написано $u+l+r$ слов, начинающихся на “вверх” (ибо к любому слову не из класса D он припишет “вверх”). Значит, если у него в тетради содержится N_u новых слов, то $u + l + r \leq u + N_u$. Написав три аналогичных неравенства и сложив их вместе, получим, что $3(u + d + l + r) \leq (u + d + l + r) + (N_u + N_d + N_l + N_r)$, то есть $N_u + N_d + N_l + N_r$ не меньше 2000000.

1. Дан куб, каждая грань которого – это клетчатое поле размером 2015 на 2015
клеток. В центре одной из граней стоит пешка. Данил и Максим передвигают пешку по клеткам куба. Данил может ходить только на соседнюю по стороне клетку (разрешается переходить на другую грань, если клетки соседние по стороне), а Максим может поставить пешку в любую клетку. Пешка красит за собой клетки. На закрашенную клетку пешку двигать нельзя. Изначальная клетка (центр грани) закрашена. Данил ходит первым. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре обоих?

Решение. Ответ: Данил выигрывает.
Приведём выигрышную стратегию для Данилы.
Число клеток на поверхности чётно (равно 2015*2015*6).
Разобьём всю поверхность куба на доминошки; доминошки не пересекаются и покрывают весь куб. Пример разбиения приводить не будем. Легко видеть, что такие примеры есть. Школьники, которые написали такое решение должны приводить пример.
В начале хода Данилы пешка стоит в какой-то доминошке. Данила ходит во вторую клетку доминошки. Если Данила до этого действовал в соответствии с этой стратегией, то вторая клетка доминошки не закрашена и сделать в неё ход можно.
Очевидно, что последний ход сделает Данила - хотя бы потому, что он всегда может сделать ход.

Критерии
+- - предъявлена верная стратегия без примера разбиения куба на домношки.

2. Дан треугольник ABC, точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно. Докажите, что три прямые, проходящие через эти точки и параллельные биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть эти прямые - a,b,c соответственно.
Рассмотрим четырёхугольник $A\,C\_1\,A\_1\,B\_1$. Он является параллелограммом, т.к. $C\_1\,A\_1$ и $A\_1\,B\_1$ - средние линии в

треугольнике ABC. Проведём биссектрису угла A и прямую a. Из параллельности этих двух прямых и того факта, что $A C_1 A_1 B_1$ - параллелограмм, следует, что a - биссектриса угла $C_1 A_1 B_1$. Аналогично, b и c так же являются биссектрисами треугольника $A_1 B_1 C_1$,
а биссектрисы пересекаются в одной точке.

Критерии
-+ - написано, что $A C_1 A_1 B_1$ - параллелограмм (или один из двух аналогичных четырёхугольников).
-+ - указано без доказательства, что *a* - биссектриса угла C_1 A_1 B_1, при этом есть верные рассуждение про гомотетию.

3. В гномьем клане некоторые знакомы между собой. Каждый гном владеет
некоторым количеством монет. Днём каждый гном узнаёт, сколько монет у каждого из его знакомых. Вечером он отдаёт по монете каждому из знакомых, кто днём был богаче него. Гном не может отдать больше, чем у него есть (например, нищий гном ничего не отдаёт). Если у гнома днём было меньше монет, чем количество знакомых богаче, чем он, то он сам решает, кому отдавать монеты. Докажите, что, начиная с какого-то дня, гномы прекратят передавать друг другу монеты.

Решение. Докажем требуемое утверждение индукцией по количеству гномов.
База - один гном; утверждение очевидно.
Шаг - пусть утверждение верно для любого клана из n гномов, докажем его для любого клана из $n+1$ гномов.
Рассмотрим произвольный клан из $n+1$ гномов и то, как они менялись монетами. Пусть a_{ij} - число монет у гнома номер i на в день номер j. Среди всех чисел a_{ij} есть макимальное - так как все a_{ij} натуральны и ограничены сверху суммарным количеством монет в клане. Пусть a_{kp} - одно из максимальных чисел.
Тогда, начиная с дня номер p, гном номер k не будет никому давать монеты и ни у кого получать монеты. Действительно: гном номер k может отдать монеты, только если найдётся гном, у которого больше монет. А такого гнома никогда не найдётся из максимальноси a_{kp}. Гном номер k не может получить монеты,

потому что если ему кто-то отдаст монеты, то число монет у гнома номер k станет больше a_{kp}, что так же противоречит максимальности a_{kp}.
Начиная со дня номер p, будем рассматривать всех гномов, кроме гнома с номером k, как клан из n гномов. Это корректно, так как они не получают и не отдают монеты гному с номером k. По предположению индукции, начиная с каого-то дня, гномы в этом новом клане перестанут передавать друг другу монеты.

Критерии
-+ - рассмотрен гном с максимальным a_{kp}.
+/2 - доказано, что гном с максимальным a_{kp} не участвует в обменах начиная с дня номер p.

4. На доске написаны числа 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, ... 1/100.
Разрешается стереть любые два числа a, b и написать вместо них ab+a+b ,
затем поступить так же с какими-то двумя из оставшихся, и так далее. Какое число может остаться последним?

Решение. Если бы вначале на доске было написано не сто, а три числа: a,b,c, то в конце на доске было бы написано число $abc+ab+bc+ac+a+b+c$. То есть сумма всех возможных мономов, составленных из чисел a,b,c, взятых не больше, чем по одному разу.
В случае, когда на доске написано сто чисел. Легко видеть, что последним на доске останется число, представимое в виде суммы $(2^{100})-1$ различных мономов вида $(1/a_1)*(1/a_2)*....(1/a_k)$ для всевозможных натуральных чисел $k \in [1,100]$ и $a_i \in [1,100]$, при этом $a_i<a_{i+1}$ для всех i. Школьники должны будут это доказывать.

Теперь заметим, что эта сумма представима в виде $(1+1/1)*(1+1/2)*(1+1/3)*...*(1+1/100) - 1$.
Преобразуем её: $(1+1/1)*(1+1/2)*(1+1/3)*...*(1+1/100) - 1 = (2/1)*(3/2)*(3/4)*...*(101/100) - 1 = 101-1 = 100$.

Критерии
+/2 или -+ - доказано, что последнее оставшееся число представимо в виде правильной суммы мономов.
+- - замечено, что эта сумма равна $(1+1/1)*(1+1/2)*(1+1/3)*...*(1+1/100)$ -

1.

5. На сколько частей могут делить плоскость 7 различных касательных к данной
окружности? Приведите примеры для всех ответов и докажите, что других не существует.
Решение. 26,27,28,29. Чтобы получить правильный ответ, следует заметить, что можно рассмотреть случаи попарной параллельности нескольких прямых. Например, нет параллельных, одна пара параллельных, две пары паралллельных, три пары параллельных.
Критерии. -+ - неполный перебор, получен частично-правильный ответ.
± - верный ответ, но присутствует ошибка при разборе случаев

6. Слова языка роботов планеты Шелезяка — последователь-ности стрелочек “вверх”, “вниз”, “влево” и “вправо”, причём две противонаправ-
ленные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000
слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая
следующие изменения: ученик U приписывает перед словом стрелочку вверх,
а если это запрещено (слово начинается с “вниз”), то убирает это первое “вниз”,
ученики D, L, R делают всё то же самое, только приписывают соответственно
1 стрелку вниз, влево или вправо, и вычёркивают первый символ, если он ока-
зался “вверх”, “вправо”, “влево”. Докажите, что в одной из четырёх тетрадей
минимум половина (500000) слов не будет встречаться среди слов на доске.

Решение. Разобьём слова, написанные на доске на 4 класса U, D, L, R согласно
первой букве (будем маленькими буквами u, d, l, r обозначать число элементов
в них, $u + d + l + r = 1000000$). Тогда в тетради ученика U будет

написано
$u + l + r$ слов, начинающихся на “вверх” (ибо к любому слову не из класса D он
припишет “вверх”). Значит, если у него в тетради содержится N_u новых слов, то
$u + l + r \le u + N_u$. Написав три аналогичных неравенства и сложив их вместе,
получим, что $3(u + d + l + r) \le (u + d + l + r) + (N_u + N_d + N_l + N_r)$, то есть
$N_u + N_d + N_l + N_r$ не меньше 2000000.
Комментарий. Речь, конечно, идёт о несократимых словах в свободной группе
с двумя образующими. Тогда утверждается, что какое бы (конечное) подмно-
жество в этой группе мы не взяли, при его умножении на a, b, a^{-1}, b^{-1} хотя бы раз мы получим сильно другое множество.
Критерии.

1. Три различных положительных числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Могут ли эти же три числа оказаться тремя (не обязательно последовательными) членами геометрической прогрессии?

Ответ. Могут.

Решение. Рассмотрим геометрическую прогрессию $1, q, q^2, q^3$. Выберем q так, чтобы числа $1, q, q^3$ образовывали арифметическую прогрессию. Для этого нужно, чтобы выполнялось равенство $1 + q^3 = 2q \Leftrightarrow (q^2 + q - 1)(q - 1) = 0$. Один из корней этого уравнения равен $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. При таком значении q числа $1, q, q^3$ удовлетворяют условию задачи.

Критерии оценивания решений.

(−) решение не соответствует ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−.) доказательство невозможности в случае рациональных чисел или последовательных членов геометрической прогрессии.

(+/2) задача явно сведена к решению полиномиального уравнения третьей степени или выше от знаменателя геометрической прогрессии, но не доказано или доказано неверно существование решения, отличного от 1.

(+/−) верное решение с небольшими недочетами (например, арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения)

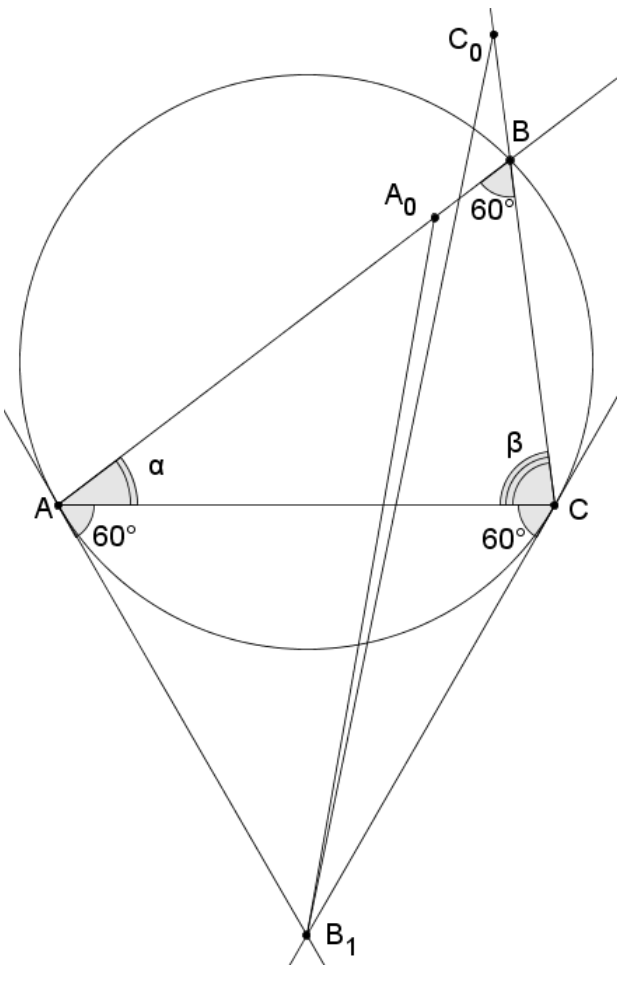
(+) Верное решение.

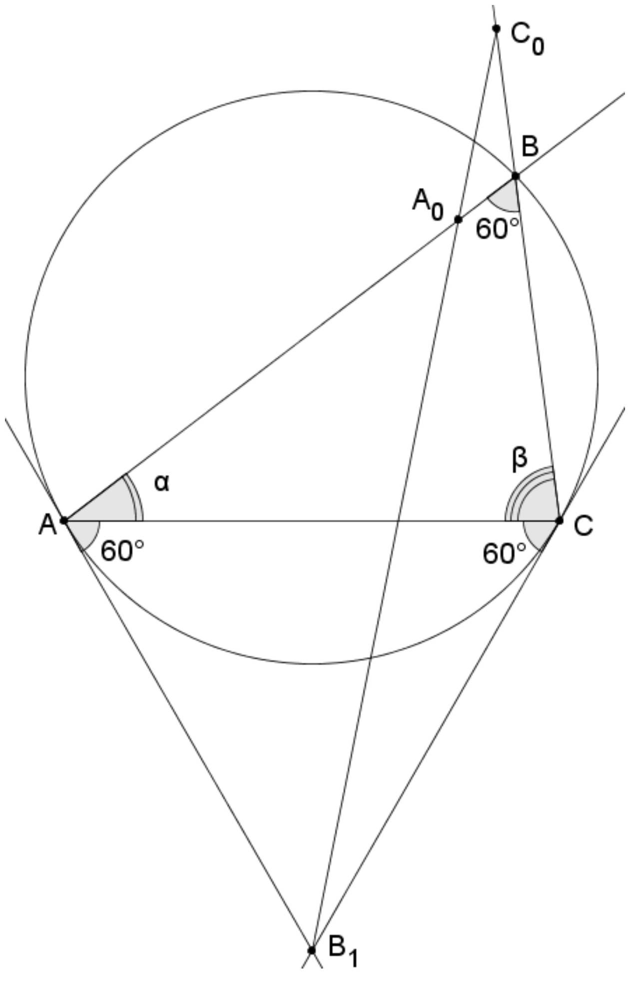
2. Вокруг треугольника ABC с углом $\angle B = 60^\circ$ описана окружность. Касательные к окружности, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке B_1. На лучах AB и CB отметили точки A_0 и C_0 соответственно так, что $AA_0 = AC = CC_0$. Докажите, что точки A_0, C_0, B_1 лежат на одной прямой.

Решение. По теореме об угле между касательной и хордой имеем $\angle ACB_1 = \angle CAB_1 = \angle ABC = 60^\circ$, т.е. треугольник AB_1C — равносторонний. Тогда $AA_0 = AC = AB_1$, т.е. треугольник A_0AB_1 равнобедренный. Если обозначить $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, то получим $\angle AB_1A_0 = \frac{180-(60+\alpha)}{2} = \frac{120-\alpha}{2}$. Отсюда в частности следует, что $\angle AB_1A_0 < 60^\circ$, т.е. точка A_0 расположена внутри угла $\angle AB_1C$, см. рисунок слева. Аналогично $\triangle C_0CB_1$ равнобедренный, и $\angle CB_1C_0 = \frac{120-\beta}{2}$. Сумма этих углов равна

$$\angle AB_1A_0 + \angle CB_1C_0 = \frac{240-(\alpha+\beta)}{2}.$$

Учитывая, что $\alpha + \beta = 120^\circ$, получаем $\angle AB_1A_0 + \angle CB_1C_0 = 60^\circ = \angle AB_1C$, следовательно лучи B_1A_0 и B_1C_0 совпадают (рисунок справа), что и требовалось.





Критерии оценивания решений.

(−) Любое решение, не соответствующее ни одному из перечисленных ниже критериев.

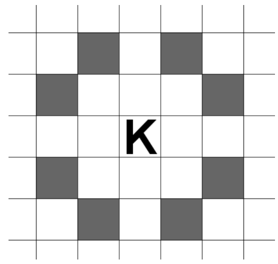
(−.) Рисунок, не соответствующий условию: точки A_0 и C_0 выбраны не на лучах AB и CB, а на их продолжениях. Для такого рисунка доказана равнобедренность треугольников $\triangle C_0CB_1$ и $\triangle A_0AB_1$.

(−/+) Доказана равнобедренность треугольников $\triangle C_0CB_1$ и $\triangle A_0AB_1$.

(+/−) Рисунок, не соответствующий условию: точки A_0 и C_0 выбраны не на лучах AB и CB, а на их продолжениях. Для такого рисунка приведено правильное решение.

(+) Правильное решение

3. Каждый ход шахматного коня — перемещение на одну клетку по горизонтали и две по вертикали, либо наоборот — одну по вертикали и две по горизонтали. (На рисунке справа конь, отмеченный буквой К, может за один ход переместиться в любую из затемнённых клеток.)



В произвольной клетке прямоугольной доски размером 2×2016 клеток стоит шахматный конь. Перемещаясь по описанному правилу (и не выходя при этом за края доски), он может из этой клетки попасть в некоторые другие клетки доски, но не во все. Какое наименьшее количество клеток нужно добавить к доске, чтобы конь мог из любой клетки доски попасть во все остальные? (Добавление клетки происходит так, чтобы она имела общую сторону с одной из уже имеющихся. Добавлять можно любое количество клеток, получившаяся при этом доска не обязательно должна иметь прямоугольную форму).

Ответ. 2

Решение. Занумеруем клетки как показано на рисунке 1. Конь может из любой клетки попасть в любую клетку с таким же номером, и не может попасть в другие.

2	3	1	4	2	3	1	4	2	3	...
1	4	2	3	1	4	2	3	1	4	...

Рис. 1

Таким образом, все клетки разбились на 4 множества, так что конь не может перескочить из одного множества в другое, но может свободно перемещаться внутри одного множества.

Добавим две клетки как на рисунке 2. Докажем, что теперь конь может попасть из любой клетки в любую другую. Клетка А "соединяет" клетки, отмеченные розовым цветом, т.е. через неё можно из множества 1 перескочить в множество 4. (Находясь в любой клетке с номером 1, можно прийти в розовую клетку с номером 1, затем через А попасть в розовую клетку с номером 4, и из неё — в любую клетку с номером 4. В итоге из любой клетки с номером 1 можно с помощью А попасть в любую клетку с номером 4.)

Клетка В соединяет клетки, отмеченные зелёным, т.е. через неё можно из любого из множеств 2, 3, 4 перескочить так же в любое из этих множеств.

В итоге, сочетая клетки А,В, можно из любого множества попасть в любое другое. Например чтобы попасть из множества 1 в множество 2, вначале с помощью А попадаем из 1 в 4, затем с помощью В попадаем из 4 в 2.

A		B								
2	3	1	4	2	3	1	4	2	3	...
1	4	2	3	1	4	2	3	1	4	...

Рис.2

Осталось убедиться, что одной клетки не хватит. Из рисунка 3 видно, что все добавляемые клетки разбиваются на два вида: в клетки A можно попасть не больше чем из 3 клеток доски, в клетки B можно попасть из 4-х клеток, но среди них всегда есть две из одного множества (отмеченные одинаковой цифрой). Т.е. клетки, в которую можно попасть из всех 4-х множеств, не существует.

	A	A	B	B	...					...	B	B	A	A	
A	**2**	**3**	**1**	**4**	**2**	**3**	**1**	**4**	**2**	**3**	...		**1**	**4**	A
A	**1**	**4**	**2**	**3**	**1**	**4**	**2**	**3**	**1**	**4**	...		**2**	**3**	A
	A	A	B	B	...					...	B	B	A	A	

Рис. 3

Критерии оценивания решений. Оценивается наличие в решении трёх составляющих:
а) Показан правильный способ добавления двух клеток,
б) Доказано, что при таком способе добавления двух клеток конь действительно может обойти всю доску,
в) Доказано, что одной клетки не хватит.

(−) Решение не соответствует ни одному из перечисленны ниже критериев.

(−/+) В решении присутствует только а).

(+/2) Присутствует а)б), отсутствует или ошибочно в).

(+/−) Присутствует а)в), отсутствует или ошибочно б).

(+) Присутствует а)б)в).

4. Функция $f(x)$, определённая при всех действительных x, является чётной. Кроме того, при любом действительном x выполняется равенство

$$f(x) + f(10 - x) = 4.$$

а) Приведите пример такой функции, отличной от константы.
б) Докажите, что любая такая функция является периодической.

Решение.

а) Например $f(x) = 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right)$. Чётность очевидна, проверим второе условие:

$$f(x) + f(10 - x) = 4 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi(10 - x)}{10}\right) = 4 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi x}{10}\right) = 0,$$

т.к. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

б) Из чётности получаем $f(10 - x) = f(x - 10)$, т.е.

$$f(x) + f(x - 10) = 4$$

при любом x. Подставив сюда $x + 10$ и $x + 20$ вместо x, получим

$$f(x + 10) + f(x) = 4,$$

$$f(x + 20) + f(x + 10) = 4.$$

Вычитая из второго первое, получаем $f(x + 20) - f(x) = 0$ при любом x, т.е. функция периодична с периодом 20.

Критерии оценивания решений.

(−) любое решение, не соответствующее ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−.) правильный пример функции без проверки выполнения условий. Допускается пример в виде графика, если в решении дано исчерпывающее и подробное описание графика с указанием всех ключевых точек.

(−/+) правильный пример функции с проверкой выполнения всех условий.

(+/2) правильный пример функции без проверки и нестрогое решение пункта б, основанное на симметриях
ИЛИ
правильный пример функции без проверки и решение пункта б с пропущенным шагом

(+/−) Полное решение пункта б)
ИЛИ
пример функции с проверкой и нестрогое решение пункта б, основанное на симметриях
ИЛИ
пример функции с проверкой и решение пункта б с пропущенным шагом

(+.) Пример функции без проверки и полное решение пункта б).

(+) Пункт а: верный пример с проверкой всех условий и полное решение пункта б)

5. Петя хочет проверить знания своего брата Коли — победителя олимпиады "Высшая проба" по математике. Для этого Петя задумал три натуральных числа a, b, c, и вычислил $x =$НОД(a, b), $y =$НОД(b, c), $z =$НОД(c, a). Затем он написал на доске три ряда по пять чисел в каждом:

$$6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24$$

$$14,\ 20,\ 28,\ 44,\ 56$$

$$5,\ 15,\ 18,\ 27,\ 42$$

Петя сообщил Коле, что одно из чисел в первом ряду равно x, одно из чисел во втором ряду равно y, одно из чисел в третьем ряду равно z, и попросил угадать числа x, y, z. Подумав несколько минут, Коля справился с задачей, правильно назвав все три числа. Назовите их и вы. Докажите, что существует единственная такая тройка (x, y, z).

Ответ. $x = 8,\ y = 14,\ z = 18$.

Решение. Мы будем использовать следующее утверждение: *Если два из чисел x, y, z делятся на некоторое натуральное число m, то и третье делится на m.*

Доказательство. Пусть например x и y делятся на m.

$$\begin{cases} x \vdots m \Rightarrow a \vdots m,\ b \vdots m \\ y \vdots m \Rightarrow b \vdots m,\ c \vdots m. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots m \\ c \vdots m \end{cases} \Rightarrow z \vdots m.$$

□

Следствие: *если одно из чисел x, y, z не делится на m, то из оставшихся двух хотя бы одно тоже не делится на m.*

Рассмотрим теперь данные в задаче числа:

$$6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24$$

$$14,\ 20,\ 28,\ 44,\ 56$$

$$5,\ 15,\ 18,\ 27,\ 42$$

Заметим, что в первых двух строках все числа чётные, т.е. $x \vdots 2,\ y \vdots 2 \Rightarrow z \vdots 2 \Rightarrow z = 18$ или $z = 42$. Далее, оба числа 18 и 42 делятся на 3, т.е. $z \vdots 3$. Во второй строке нет чисел, делящихся на 3, т.е. $y \not\vdots 3 \Rightarrow x \not\vdots 3 \Rightarrow x = 8$. Далее, $x \vdots 4,\ z \not\vdots 4 \Rightarrow y \not\vdots 4 \Rightarrow y = 14$. Наконец $y \vdots 7,\ x \not\vdots 7 \Rightarrow z \not\vdots 7 \Rightarrow z = 18$.

Значения $x = 8,\ y = 14,\ z = 18$ возможны, например, при $a = 72,\ b = 56,\ c = 126$.

Критерии оценивания решений.

(−)

(−.) Рассмотрена делимость на одно число.

(−/+) Рассмотрена делимость на два числа
ИЛИ
сформулирована и доказана лемма, аналогичная или равносильная лемме из приведённого выше решения.

(+/2) Рассмотрена делимость на три числа.

(+.) Лемма, аналогичная или равносильная лемме из приведённого выше решения, используется в рассуждениях, но никак не доказана.

(+)

6. Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 10 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ - количество таких расстановок. Например $f(1) = 10,\ f(11) = 0$.

а) Что больше, $f(9)$ или $f(10)$?

б) Что больше, $f(5)$ или $f(6)$?

Ответ. а) $f(9) > f(10)$, б) $f(6) > f(5)$.

Решение. Обозначим через S_n множество всех требуемых расстановок для таблицы $n \times n$. Тогда $f(n)$ по определению равно количеству элементов в множестве S_n.

Введём операцию g над таблицей, заключающуюся в удалении последнего (крайнего правого) столбца и последней (крайней нижней) строки таблицы. Пример:

$$t = \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 9 & 7 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 6 & 2 \end{array}} \qquad g(t) = \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 10 \end{array}}.$$

Очевидно, если $t \in S_n$, то $g(t) \in S_{n-1}$.

а) Мы докажем, что отображение $g: \ S_{10} \to S_9$ является инъективным (смысл термина будет разъяснён далее), и при этом его образ не покрывает всего множества S_9. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 1. *Пусть дана таблица $y \in S_9$. Тогда существует не более одной таблицы $x \in S_{10}$ такой, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Будем восстанавливать таблицу x по известной таблице $y = g(x)$. Для наглядности изобразим обе таблицы следующим образом:

$$x = \begin{array}{|c|c|} \hline & a_1 \\ & a_2 \\ & a_3 \\ y & \vdots \\ & \vdots \\ & a_9 \\ \hline b_1\ b_2\ b_3\ \cdots\ \cdots\ b_9 & c \\ \hline \end{array}$$

Т.е. пусть последний столбец таблицы x содержит неизвестные числа $a_1, \ldots, a_9, c$, а последняя строка содержит неизвестные числа $b_1, \ldots, b_9, c$.

Число a_i должно отличаться от всех чисел в строке с номером i таблицы y. Но в любой строке таблицы y стоят 9 различных чисел из множества $\{1,\ 2,\ \ldots 10\}$, т.е. для

a_i остаётся единственное возможное значение. Следовательно все числа $a_1, \ldots, a_9$ однозначно определяются по таблице y. Аналогично, рассматривая столбцы, однозначно восстанавливаем числа b_j.

Если среди восстановленных чисел $a_1, \ldots, a_9$ есть одинаковые, получаем противоречие с условием, и следовательно таблицы x, удовлетворяющей равнеству $g(x) = y$, не существует. Если же все a_i различны, и все b_j различны, то число c должно отличаться от них всех, и такое число тоже единственно.

Итак, если таблица x существует, то она единственна, что и требовалось. $\square$

Следствие: если $x_1,\ x_2 \in S_{10}$ и $x_1 \neq x_2$, то $g(x_1) \neq g(x_2)$. (Отображение g с таким свойством в математике называется *инъективным*).

Утверждение 2. *Существует таблица $y \in S_9$ такая, что $\forall x \in S_{10}:\ g(x) \neq y$.*

Доказательство. Рассмотрим таблицу $y \in S_9$, в первой строке которой написаны подряд числа $1, 2, \ldots, 9$, а в следующих строках — те же числа, сдвигаемые по циклу каждый раз на 1:

$$y = \boxed{\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 & 2105 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 \\ 2014 & 9 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \end{array}}.$$

Восстанавливая по ней таблицу x так же, как это сделано выше, мы получаем $a_1 = a_2 = \cdots = a_9 = 10$, что противоречит условию. Следовательно искомой таблицы x не существует. $\square$

Из доказанных утверждений следует, что в множестве S_9 больше элементов, чем в S_{10}, т.е. $f(9) > f(10)$.

Проиллюстрируем наглядно последний шаг рассуждения. Предположим, что мы выписали в ряд все возможные таблицы $x_1, \ldots, x_K$ из множества S_{10}. Рассмотрим следующую диаграмму отображения g:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_K & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ g(x_1) & g(x_2) & g(x_3) & \ldots & g(x_K) & y \end{array}$$

В множестве S_{10} ровно K элементов, и все они выписаны в верхнем ряду. В нижнем ряду для каждой таблицы x выписана соответствующая таблица $g(x)$, а также построенная в утверждении 2 таблица y. Все таблицы в нижнем ряду принадлежат множеству S_9, и все они по доказанному различны. Следовательно количество таблиц в множестве S_9 больше, чем в S_{10}.

б) Докажем, что при отображении $g:\ S_6 \to S_5$ в каждую таблицу множества S_5 отображается более одной таблицы множества S_6. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 3. *Пусть дана таблица $y \in S_5$. Тогда существует не менее 4 различных таблиц $x \in S_6$ таких, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Так же, как в п. а), изобразим наглядно равенство $g(x) = y$:

$$x = \begin{array}{|c|c|}\hline y & \begin{matrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{matrix} \\ \hline b_1\quad b_2\quad b_3\quad b_4\quad b_5 & c \\ \hline\end{array}$$

Покажем, как для заданной таблицы $y \in S_5$ построить не менее 4 различных таблиц x, удовлетворяющих равенству $g(x) = y$.

В объединении первой строки и первого столбца таблицы y написано 9 чисел (не обязательно все различные), поэтому существует число из множества $\{1, 2, \ldots, 10\}$, которого нет ни в первой строке, ни в первом столбце таблицы y. Положим a_1 и b_1 равными этому числу. Т.е. согласно нашему выбору $a_1 = b_1$.

Для $i = 2, 3, \ldots 5$ будем последовательно выбирать числа a_i так, чтобы число a_i не равнялось ни одному из чисел в i-й строке таблицы y, а также не равнялось уже выбранным числам $a_1, \ldots, a_{i-1}$. Такой выбор всегда существует, т.к. "запрещёнными" оказываются всегда не более $5 + 4 = 9$ чисел.

Аналогично для $j = 2, 3, \ldots 5$ будем последовательно выбирать числа b_j так, чтобы число b_j не равнялось ни одному из чисел в j-м столбце таблицы y, а также не равнялось числам $b_1, \ldots, b_{j-1}$.

Мы изначально выбрали $a_1 = b_1$, поэтому среди чисел $a_i, b_j,\ i, j = 1 \ldots 5$, не более 9 различных. Поэтому можно выбрать число c отличным от них всех, и тем самым завершить построение таблицы x. Построенная таблица x удовлетворяет всем условиям задачи и принадлежит множеству S_6, при этом $g(x) = y$.

Заметим, что при выборе числа a_2 запрещёнными были не более 6 чисел (числа во второй строке таблицы y и число a_1). Поэтому имелось не менее 4 способов выбрать число a_2, и все они привели бы к различным таблицам x. Следовательно таких таблиц x, для которых $g(x) = y$, не менее 4, что и требовалось доказать. □

Критерии оценивания решений.

(−) Решение не соответствует ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−/+) В пункте а) доказано, что $f(9) \geq f(10)$ (нестрогое неравенство).

(+/2) Полностью решён один из пунктов.

(+/−) В обоих пунктах доказано нестрогое неравенство.

(+) Верное решение обоих пунктов.

1. Три различных положительных числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Могут ли эти же три числа оказаться тремя (не обязательно последовательными) членами геометрической прогрессии?

Ответ. Могут.

Решение. Рассмотрим геометрическую прогрессию $1, q, q^2, q^3$. Выберем q так, чтобы числа $1, q, q^3$ образовывали арифметическую прогрессию. Для этого нужно, чтобы выполнялось равенство $1 + q^3 = 2q \Leftrightarrow (q^2 + q - 1)(q - 1) = 0$. Один из корней этого уравнения равен $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. При таком значении q числа $1, q, q^3$ удовлетворяют условию задачи.

Критерии оценивания решений.

(−) решение не соответствует ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−.) доказательство невозможности в случае рациональных чисел или последовательных членов геометрической прогрессии.

(+/2) задача явно сведена к решению полиномиального уравнения третьей степени или выше от знаменателя геометрической прогрессии, но не доказано или доказано неверно существование решения, отличного от 1.

(+/−) верное решение с небольшими недочетами (например, арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения)

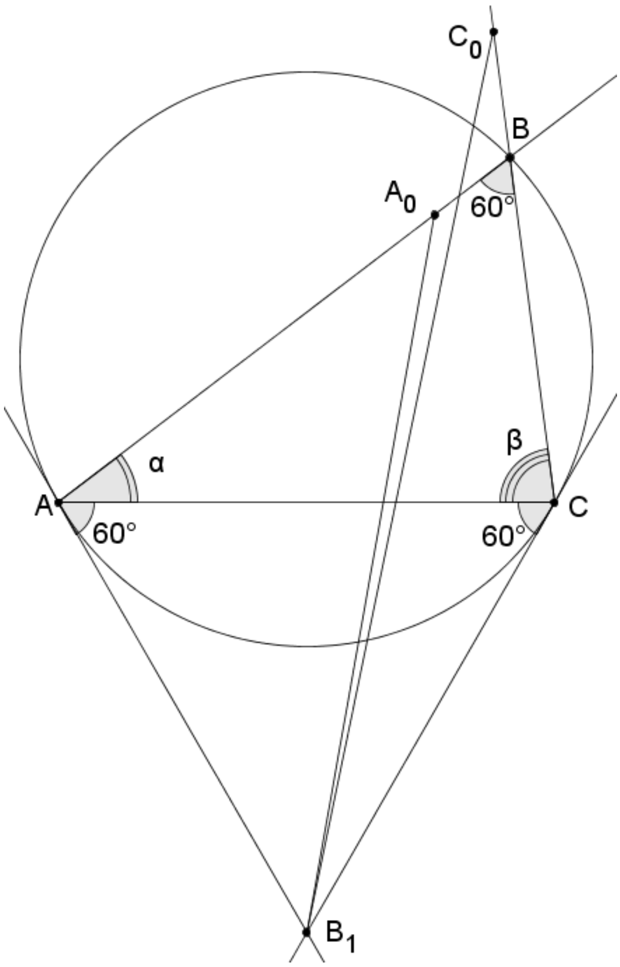
(+) Верное решение.

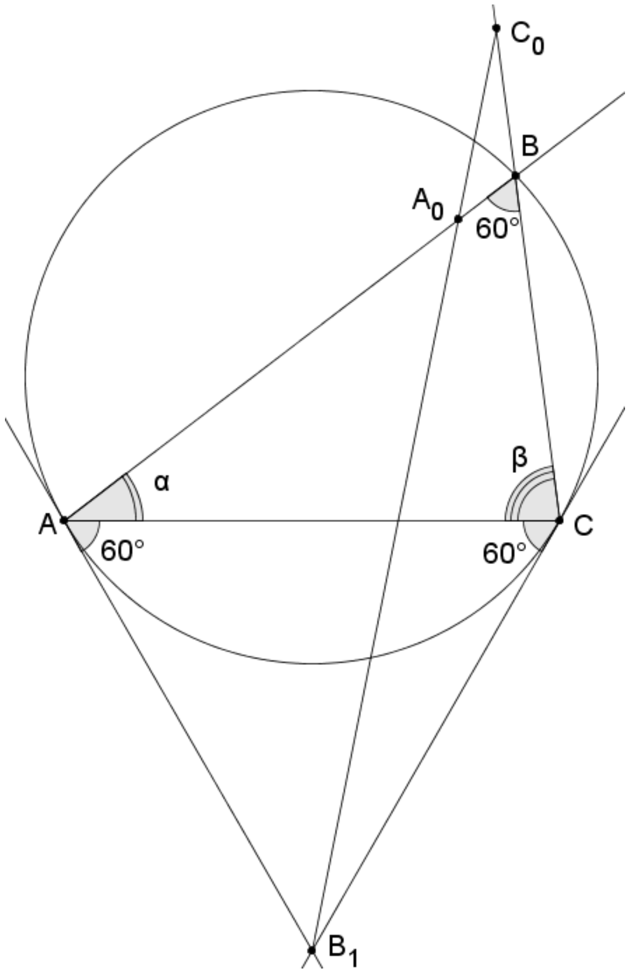
2. Вокруг треугольника ABC с углом $\angle B = 60^\circ$ описана окружность. Касательные к окружности, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке B_1. На лучах AB и CB отметили точки A_0 и C_0 соответственно так, что $AA_0 = AC = CC_0$. Докажите, что точки A_0, C_0, B_1 лежат на одной прямой.

Решение. По теореме об угле между касательной и хордой имеем $\angle ACB_1 = \angle CAB_1 = \angle ABC = 60^\circ$, т.е. треугольник AB_1C — равносторонний. Тогда $AA_0 = AC = AB_1$, т.е. треугольник A_0AB_1 равнобедренный. Если обозначить $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, то получим $\angle AB_1A_0 = \frac{180-(60+\alpha)}{2} = \frac{120-\alpha}{2}$. Отсюда в частности следует, что $\angle AB_1A_0 < 60^\circ$, т.е. точка A_0 расположена внутри угла $\angle AB_1C$, см. рисунок слева. Аналогично $\triangle C_0CB_1$ равнобедренный, и $\angle CB_1C_0 = \frac{120-\beta}{2}$. Сумма этих углов равна

$$\angle AB_1A_0 + \angle CB_1C_0 = \frac{240 - (\alpha + \beta)}{2}.$$

Учитывая, что $\alpha + \beta = 120^\circ$, получаем $\angle AB_1A_0 + \angle CB_1C_0 = 60^\circ = \angle AB_1C$, следовательно лучи B_1A_0 и B_1C_0 совпадают (рисунок справа), что и требовалось.





Критерии оценивания решений.

(−) Любое решение, не соответствующее ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−.) Рисунок, не соответствующий условию: точки A_0 и C_0 выбраны не на лучах AB и CB, а на их продолжениях. Для такого рисунка доказана равнобедренность треугольников $\triangle C_0CB_1$ и $\triangle A_0AB_1$.

(–/+) Доказана равнобедренность треугольников $\triangle C_0CB_1$ и $\triangle A_0AB_1$.

(+/–) Рисунок, не соответствующий условию: точки A_0 и C_0 выбраны не на лучах AB и CB, а на их продолжениях. Для такого рисунка приведено правильное решение.

(+) Правильное решение

3. Функция $f(x)$, определённая при всех действительных x, является чётной. Кроме того, при любом действительном x выполняется равенство

$$f(x) + f(10 - x) = 4.$$

а) Приведите пример такой функции, отличной от константы.
б) Докажите, что любая такая функция является периодической.

Решение.

а) Например $f(x) = 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right)$. Чётность очевидна, проверим второе условие:

$$f(x) + f(10 - x) = 4 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi(10 - x)}{10}\right) = 4 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi x}{10}\right) = 0,$$

т.к. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

б) Из чётности получаем $f(10 - x) = f(x - 10)$, т.е.

$$f(x) + f(x - 10) = 4$$

при любом x. Подставив сюда $x + 10$ и $x + 20$ вместо x, получим

$$f(x + 10) + f(x) = 4,$$

$$f(x + 20) + f(x + 10) = 4.$$

Вычитая из второго первое, получаем $f(x + 20) - f(x) = 0$ при любом x, т.е. функция периодична с периодом 20.

Критерии оценивания решений.

(−) любое решение, не соответствующее ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−.) правильный пример функции без проверки выполнения условий. Допускается пример в виде графика, если в решении дано исчерпывающее и подробное описание графика с указанием всех ключевых точек.

(−/+) правильный пример функции с проверкой выполнения всех условий.

(+/2) правильный пример функции без проверки и нестрогое решение пункта б, основанное на симметриях
ИЛИ
правильный пример функции без проверки и решение пункта б с пропущенным шагом

(+/−) Полное решение пункта б)
ИЛИ
пример функции с проверкой и нестрогое решение пункта б, основанное на симметриях
ИЛИ
пример функции с проверкой и решение пункта б с пропущенным шагом

(+.) Пример функции без проверки и полное решение пункта б).

(+) Пункт а: верный пример с проверкой всех условий и полное решение пункта б)

4. Петя хочет проверить знания своего брата Коли — победителя олимпиады "Высшая проба" по математике. Для этого Петя задумал три натуральных числа a, b, c, и вычислил $x =$НОД(a, b), $y =$НОД(b, c), $z =$НОД(c, a). Затем он написал на доске три ряда по пять чисел в каждом:

$$6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24$$

$$14,\ 20,\ 28,\ 44,\ 56$$

$$5,\ 15,\ 18,\ 27,\ 42$$

Петя сообщил Коле, что одно из чисел в первом ряду равно x, одно из чисел во втором ряду равно y, одно из чисел в третьем ряду равно z, и попросил угадать числа x, y, z. Подумав несколько минут, Коля справился с задачей, правильно назвав все три числа. Назовите их и вы. Докажите, что существует единственная такая тройка (x, y, z).

Ответ. $x = 8,\ y = 14,\ z = 18.$

Решение. Мы будем использовать следующее утверждение:
Лемма. *Если два из чисел x, y, z делятся на некоторое натуральное число m, то и третье делится на m.*

Доказательство. Пусть например x и y делятся на m.

$$\begin{cases} x \vdots m \Rightarrow a \vdots m,\ b \vdots m \\ y \vdots m \Rightarrow b \vdots m,\ c \vdots m. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots m \\ c \vdots m \end{cases} \Rightarrow z \vdots m.$$

□

Следствие: *если одно из чисел x, y, z не делится на m, то из оставшихся двух хотя бы одно тоже не делится на m.*

Рассмотрим теперь данные в задаче числа:

$$6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24$$

$$14,\ 20,\ 28,\ 44,\ 56$$

$$5,\ 15,\ 18,\ 27,\ 42$$

Заметим, что в первых двух строках все числа чётные, т.е. $x \vdots 2$, $y \vdots 2 \Rightarrow z \vdots 2 \Rightarrow z = 18$ или $z = 42$. Далее, оба числа 18 и 42 делятся на 3, т.е. $z \vdots 3$. Во второй строке нет чисел, делящихся на 3, т.е. $y \not\vdots 3 \Rightarrow x \not\vdots 3 \Rightarrow x = 8$. Далее, $x \vdots 4$, $z \not\vdots 4 \Rightarrow y \not\vdots 4 \Rightarrow y = 14$. Наконец $y \vdots 7$, $x \not\vdots 7 \Rightarrow z \not\vdots 7 \Rightarrow z = 18$.

Значения $x = 8,\ y = 14,\ z = 18$ возможны, например, при $a = 72,\ b = 56,\ c = 126$.

Критерии оценивания решений.

(−) Решение, не соответствующее ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−.) Рассмотрена делимость на одно число.

(−/+) Рассмотрена делимость на два числа
ИЛИ
сформулирована и доказана лемма, аналогичная или равносильная лемме из приведённого выше решения.

(+/2) Рассмотрена делимость на три числа.

(+.) Лемма, аналогичная или равносильная лемме из приведённого выше решения, используется в рассуждениях, но никак не доказана.

(+) Верное решение: получен правильный ответ и доказана его единственность.

5. Два коридора высотой и шириной в 1 м идут перпендикулярно друг другу по первому и второму этажу здания. Разделяющее их перекрытие разобрано, образуя дыру 1×1 м в полу одного и потолке другого. Какова максимальная длина балки, которую можно передать из одного коридора в другой через дыру? (Балку считать негнущимся отрезком нулевой толщины. Толщина перекрытия также равна нулю, т.е. пол верхнего коридора и потолок нижнего коридора находятся в одной плоскости.)

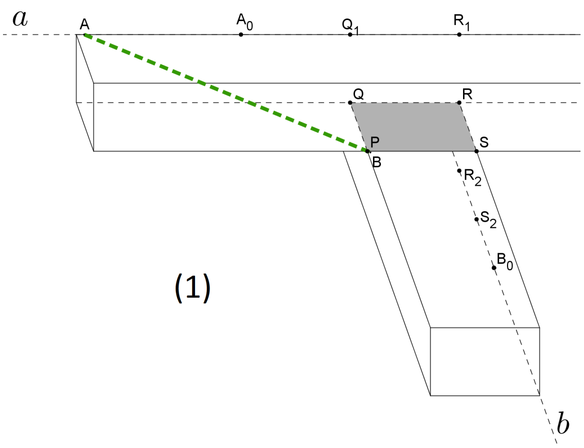
Ответ. $\frac{1}{2} \cdot (2 + \sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2}}$.

Решение.

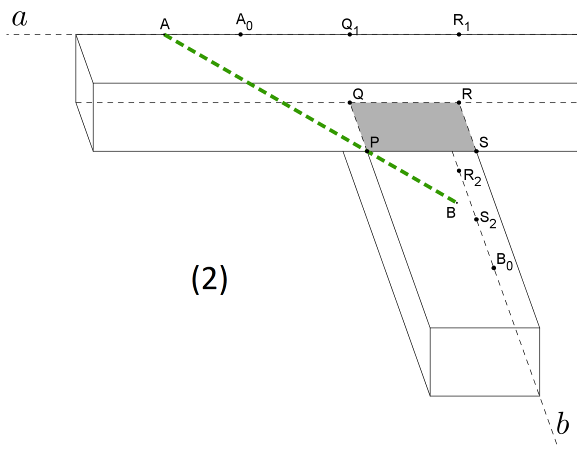
Пусть A и B — концы балки, причём B — нижний конец, который первым попадает в нижний коридор (считаем, что балку передают из верхнего коридора в нижний). Обозначим для краткости $d = \frac{1}{2} \cdot (2 + \sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2}}$ — указанную в ответе длину балки, $PQRS$ — квадрат, образующий дыру.

Решение будет состоять из двух частей: **I** — мы покажем, как передать балку указанной в ответе длины, и **II** — докажем, что балку большей длины нельзя передать никаким способом.

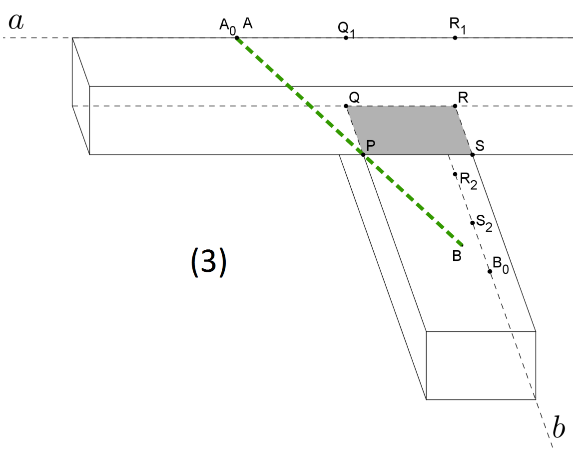
I. Нам понадобятся следующие дополнительные обозначения. Стена верхнего коридора, проходящая через точки Q, R, пересекается с потолком верхнего коридора по прямой a (см. рисунок). Стена нижнего коридора, содержащая точки R, S, пересекается с полом нижнего коридора по прямой b. Q_1, R_1 — ортогональные проекции точек Q, R на прямую a, R_2, S_2 — ортогональные проекции точек R, S на прямую b. A_0, B_0 — точки на прямых a, b соответственно, такие, что $\overrightarrow{A_0Q_1} = \overrightarrow{Q_1R_1}$ и $\overrightarrow{B_0S_2} = \overrightarrow{S_2R_2}$. Отрезки PA_0 и PB_0 параллельны отрезку Q_1S, поэтому точки P, A_0, B_0 лежат вдоль одной прямой, причём $PA_0 = PB_0 = \sqrt{3}$.



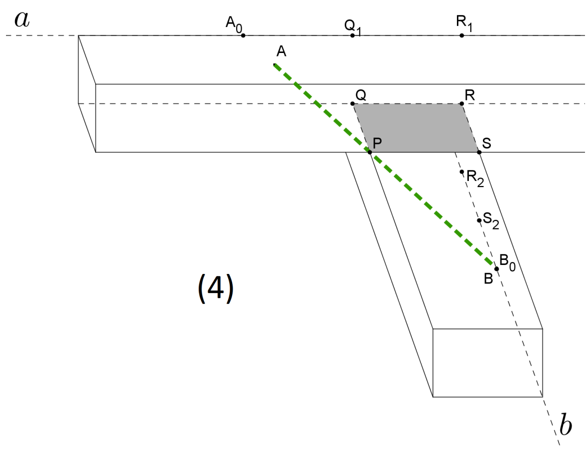
(1)



(2)



(3)



(4)

Перемещение балки будет состоять из следующих шагов (см. рисунки (1)-(4) выше):

(1) Расположим балку так, чтобы её конец A лежал на прямой a, а конец B находился в точке P.

(2) Будем перемещать её конец A вдоль прямой a, так чтобы сама балка всё время проходила через точку P.

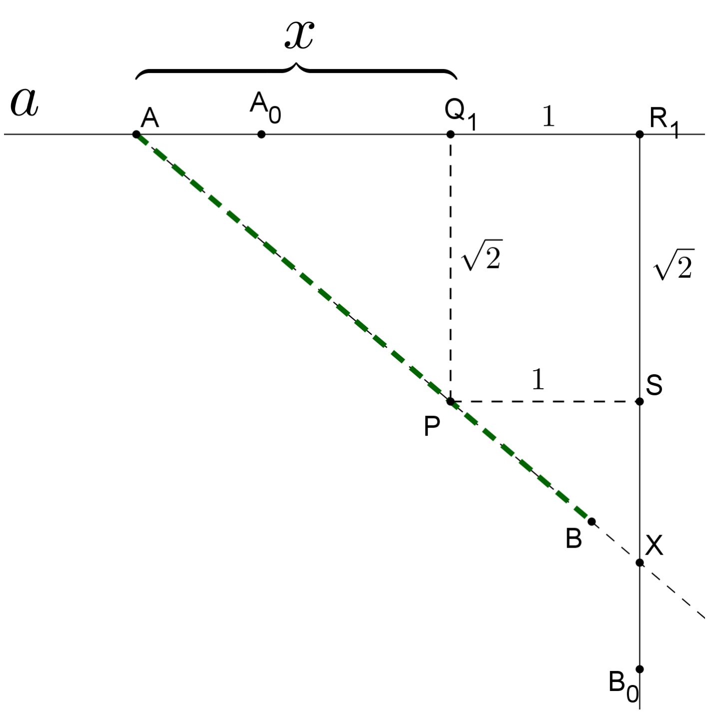
(3) Такое перемещение будем продолжать до тех пор, пока точка A не совпадёт с A_0. В этот момент балка расположится вдоль прямой A_0B_0.

(4) Затем будем двигать балку вдоль прямой A_0B_0, до тех пор, пока точка B не совпадёт с B_0.

(5) Наконец будем двигать точку B вдоль прямой b, так, чтобы вся балка по прежнему проходила через P, до тех пор, пока вся балка не окажется в нижнем коридоре.

Ключевой факт, который нужно проверить — что такое перемещение осуществимо, т.е. что балка всё время будет находиться целиком внутри коридоров. Очевидно достаточно проверить его только для шагов **(1)** – **(3)**

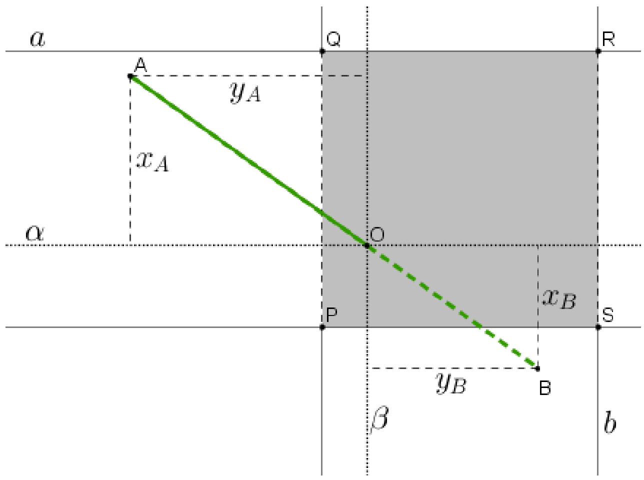
Проведём плоскость δ через прямую a и точку P. На протяжении всех шагов **(1)** – **(4)** балка находится внутри плоскости δ, следовательно можно исследовать движение балки отдельно в этой плоскости (рисунок ниже). Пусть $AQ_1 = x$. Продлим прямую AP до пересечения со стеной нижнего коридора в точке X. Тогда из подобия треугольников APQ_1 и AXR_1 несложно найти $AX = \frac{x+1}{x} \cdot \sqrt{2+x^2}$. Производная этой функции равна $\frac{x^3-2}{x^2\sqrt{2+x^2}}$. Отсюда видно, что минимум функции достигается при $x = \sqrt[3]{2}$. Подставляя это значение в выражение для AX, получаем после преобразований $\min(AX) = d$ (напомним, d обозначает число, указанное в ответе). Таким образом длина AX всё время не меньше длины балки (в частности при $x = 1$ $AX = 2\sqrt{3} > d$), т.е. точка B никогда не выходит за пределы отрезка AX, а значит и за пределы коридоров, что и требовалось.



II. Теперь докажем, что балку длины больше d невозможно передать из одного коридора в другой никаким способом. Пусть O — точка балки, делящая её в отношении

$AO : OB = \sqrt[3]{2} : 1$. Поскольку движение балки непрерывно, при любом способе передачи возникнет момент, когда точка O окажется в плоскости $PQRS$. Покажем, что в этот момент длина балки не может быть больше d.

Пусть α и β — вертикальные плоскости, проходящие через O параллельно осям верхнего и нижнего коридора соответственно, z_A — расстояние от A до плоскости $PQRS$, x_A — расстояние от A до α, y_A — расстояние от A до β, z_B, x_B, y_B — аналогичные расстояния для точки B. (На рисунке ниже слева изображён "вид сверху" в проекции на плоскость $PQRS$, плоскости α и β проецируются в прямые, отрезки z_A и z_B не видны, т.к. проецируются в точки A и B соответственно. Точка O находится в плоскости $PQRS$).



Очевидно $z_A : z_B = x_A : x_B = y_A : y_B = \sqrt[3]{2} : 1$. Кроме того, $x_A \leq 1,\ y_B \leq 1,\ z_A \leq 1$. Тогда длина всей балки

$$AB = (1+\sqrt[3]{2})\cdot\sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} = (1+\sqrt[3]{2})\cdot\sqrt{\frac{x_A^2}{\sqrt[3]{4}} + y_B^2 + \frac{z_A^2}{\sqrt[3]{4}}} \leq (1+\sqrt[3]{2})\cdot\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}} = d.$$

Критерии оценивания решений.

(−) Решение, не содержащее продвижений в правильном навправлении, а так же любое решение, в котором указан ответ $2\sqrt{3}$.

(−/+) Имеется правильная идея решения (алгоритм протаскивания балки через отверстие) и попытка (не доведённая до конца) составления функции, выражающей длину отрезка AX через переменную.

(+/−) В задаче получен правильный ответ и показано, что балку такой длины можно передать. Однако не доказано, что балку большей длины передать нельзя.

(+) Верное решение (ответ + способ протаскивания балки + доказательство максимальности).

6. Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 2016 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ - количество таких расстановок. Например $f(1) = 2016,\ f(2017) = 0$.
а) Что больше, $f(2015)$ или $f(2016)$?
б) Что больше, $f(1008)$ или $f(1009)$?

Ответ. а) $f(2015) > f(2016)$, б) $f(1009) > f(1008)$.

Решение. Обозначим через S_n множество всех требуемых расстановок для таблицы $n \times n$. Тогда $f(n)$ по определению равно количеству элементов в множестве S_n.

Введём операцию g над таблицей, заключающуюся в удалении последнего (крайнего правого) столбца и последней (крайней нижней) строки таблицы. Пример:

$$t = \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 12 & 3 & 17 \\ 2015 & 17 & 1 & 8 \\ 100 & 2 & 101 & 56 \\ 101 & 4 & 6 & 12 \\ \hline \end{array} \qquad g(t) = \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 12 & 3 \\ 2015 & 17 & 1 \\ 100 & 2 & 101 \\ \hline \end{array}.$$

Очевидно, если $t \in S_n$, то $g(t) \in S_{n-1}$.

а) Мы докажем, что отображение $g:\ S_{2016} \to S_{2015}$ является инъективным (смысл термина будет разъяснён далее), и при этом его образ не покрывает всего множества S_{2015}. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 1. *Пусть дана таблица $y \in S_{2015}$. Тогда существует не более одной таблицы $x \in S_{2016}$ такой, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Будем восстанавливать таблицу x по известной таблице $y = g(x)$. Для наглядности изобразим обе таблицы следующим образом:

$$x = \begin{array}{|c|c|} \hline \qquad y \qquad & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{2015} \end{matrix} \\ \hline b_1\ \ b_2\ \ b_3\ \cdots\ \ \cdots\ b_{2015} & c \\ \hline \end{array}$$

Т.е. пусть последний столбец таблицы x содержит неизвестные числа $a_1, \ldots, a_{2015}, c$, а последняя строка содержит неизвестные числа $b_1, \ldots, b_{2015}, c$.

Число a_i должно отличаться от всех чисел в строке с номером i таблицы y. Но в любой строке таблицы y стоят 2015 различных чисел из множества $\{1,\ 2,\ \ldots 2016\}$, т.е. для a_i остаётся единственное возможное значение. Следовательно все числа $a_1, \ldots, a_{2015}$ однозначно определяются по таблице y. Аналогично, рассматривая столбцы, однозначно восстанавливаем числа b_j.

Если среди восстановленных чисел $a_1, \dots, a_{2015}$ есть одинаковые, получаем противоречие с условием, и следовательно таблицы x, удовлетворяющей равнеству $g(x) = y$, не существует. Если же все a_i различны, и все b_j различны, то число c должно отличаться от них всех, и такое число тоже единственно.

Итак, если таблица x существует, то она единственна, что и требовалось. $\square$

Следствие: если $x_1,\ x_2 \in S_{2016}$ и $x_1 \neq x_2$, то $g(x_1) \neq g(x_2)$. (Отображение g с таким свойством в математике называется *инъективным*).

Утверждение 2. *Существует таблица $y \in S_{2015}$ такая, что $\forall x \in S_{2016}:\ g(x) \neq y$.*

Доказательство. Рассмотрим таблицу $y \in S_{2015}$, в первой строке которой написаны подряд числа $1, 2, \dots, 2015$, а в следующих строках — те же числа, сдвигаемые по циклу каждый раз на 1:

$$y = \boxed{\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & 2013 & 2014 & 2105 \\ 2015 & 1 & 2 & 3 & \dots & 2013 & 2014 \\ 2014 & 2015 & 1 & 2 & 3 & \dots & 2013 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \end{array}}.$$

Восстанавливая по ней таблицу x так же, как это сделано выше, мы получаем $a_1 = a_2 = \dots = a_{2015} = 2016$, что противоречит условию. Следовательно искомой таблицы x не существует. $\square$

Из доказанных утверждений следует, что в множестве S_{2015} больше элементов, чем в S_{2016}, т.е. $f(2015) > f(2016)$.

Проиллюстрируем наглядно последний шаг рассуждения. Предположим, что мы выписали в ряд все возможные таблицы $x_1, \dots, x_K$ из множества S_{2016}. Рассмотрим следующую диаграмму отображения g:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_K & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ g(x_1) & g(x_2) & g(x_3) & \dots & g(x_K) & y \end{array}$$

В множестве S_{2016} ровно K элементов, и все они выписаны в верхнем ряду. В нижнем ряду для каждой таблицы x выписана соответствующая таблица $g(x)$, а также построенная в утверждении 2 таблица y. Все таблицы в нижнем ряду принадлежат множеству S_{2015}, и все они по доказанному различны. Следовательно количество таблиц в множестве S_{2015} больше, чем в S_{2016}.

б) Докажем, что при отображении $g:\ S_{1009} \to S_{1008}$ в каждую таблицу множества S_{1008} отображается более одной таблицы множества S_{1009}. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 3. *Пусть дана таблица $y \in S_{1008}$. Тогда существует не менее 1007 различных таблиц $x \in S_{1009}$ таких, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Так же, как в п. а), изобразим наглядно равенство $g(x) = y$:

$$x = \begin{array}{|c|c|} \hline \\ \qquad\qquad y \qquad\qquad & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{1008} \end{matrix} \\ \hline b_1\ \ b_2\ \ b_3\ \cdots\ \ \cdots\ b_{1008} & c \\ \hline \end{array}$$

Покажем, как для заданной таблицы $y \in S_{1008}$ построить не менее 1007 различных таблиц x, удовлетворяющих равенству $g(x) = y$.

В объединении первой строки и первого столбца таблицы y написано 2015 чисел (не обязательно все различные), поэтому существует число из множества $\{1, 2, \ldots, 2016\}$, которого нет ни в первой строке, ни в первом столбце таблицы y. Положим a_1 и b_1 равными этому числу. Т.е. согласно нашему выбору $a_1 = b_1$.

Для $i = 2, 3, \ldots 1008$ будем последовательно выбирать числа a_i так, чтобы число a_i не равнялось ни одному из чисел в i-й строке таблицы y, а также не равнялось уже выбранным числам $a_1, \ldots, a_{i-1}$. Такой выбор всегда существует, т.к. "запрещёнными" оказываются всегда не более $1008 + 1007 = 2015$ чисел.

Аналогично для $j = 2, 3, \ldots 1008$ будем последовательно выбирать числа b_j так, чтобы число b_j не равнялось ни одному из чисел в j-м столбце таблицы y, а также не равнялось числам $b_1, \ldots, b_{j-1}$.

Мы изначально выбрали $a_1 = b_1$, поэтому среди чисел $a_i, b_j,\ i, j = 1 \ldots 1008$, не более 2015 различных. Поэтому можно выбрать число c отличным от них всех, и тем самым завершить построение таблицы x. Построенная таблица x удовлетворяет всем условиям задачи и принадлежит множеству S_{1009}, при этом $g(x) = y$.

Заметим, что при выборе числа a_2 запрещёнными были не более 1009 чисел (числа во второй строке таблицы y и число a_1). Поэтому имелось не менее 1007 способов выбрать число a_2, и все они привели бы к различным таблицам x. Следовательно таких таблиц x, для которых $g(x) = y$, не менее 1007, что и требовалось доказать. $\square$

Критерии оценивания решений.

(−) Решение не соответствует ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−/+) В пункте а) доказано, что $f(2015) \geq f(2016)$ (нестрогое неравенство).

(+/2) Полностью решён один из пунктов.

(+/−) В обоих пунктах доказано нестрогое неравенство.

(+) Верное решение обоих пунктов.