Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Дано равенство

$$(x-7)(x^2-28x+\ldots)=(x-11)(x^2-24x+\ldots).$$

Вместо многоточий стоят некоторые числа, выбранные так, что равенство верно при любом значении x. Найдите числа, стоящие вместо многоточий.

2. У Пети есть линейка длиной 10 см (то есть с помощью неё нельзя проводить отрезки длиной больше 10 см), и циркуль с максимальным раствором 6 см (то есть с помощью него невозможно рисовать окружности радиуса больше 6 см). Делений на линейке и циркуле нет, то есть измерять расстояния ими нельзя.

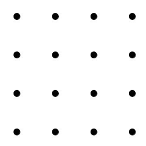
На листе бумаги нарисованы две точки. Известно, что расстояние между ними равно 11 см. Покажите, как Петя может соединить эти точки отрезком, используя только ту линейку и циркуль, которые у него есть.

В решении достаточно указать правильный способ построения. Доказывать его правильность не обязательно.

3. Найти все натуральные числа n от 1 до 100 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), получим число n^3.

4. На столе стоят три ящика с номерами 1, 2 и 3. В одном из них 1 красный, 1 синий и 1 зелёный шарик, в другом 1 красный и 1 зелёный, в третьем 1 синий шарик. При этом известно, что во всех трёх случаях номер ящика не совпадает с числом шариков внутри ящика. Как, вынув только один шарик, найти число шариков в каждом ящике?

5. Дана квадратная решётка 4×4 точек (то есть решётка 3×3 с отмеченными 4×4 вершинами всех клеток). Какое минимальное число треугольников нужно нарисовать, чтобы каждая точка попала на границу одного из треугольников? Приведите пример с указанным Вами числом треугольников и докажите, почему меньше нельзя.



6. Каждый член партии доверяет пяти однопартийцам, но никакие двое не доверяют друг другу. При каком минимальном размере партии такое возможно?

Не забудьте показать, что при указанном Вами размере партии это действительно возможно, а при меньших — нет.

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Найти все натуральные числа n от 1 до 100 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), получим число n^3.

2. У Пети есть линейка длиной 10 см (то есть с помощью неё нельзя проводить отрезки длиной больше 10 см), и циркуль с максимальным раствором 6 см (то есть с помощью него невозможно рисовать окружности радиуса больше 6 см). Делений на линейке и циркуле нет, то есть измерять расстояния ими нельзя.

На листе бумаги нарисованы две точки. Известно, что расстояние между ними равно 11 см. Покажите, как Петя может соединить эти точки отрезком, используя только ту линейку и циркуль, которые у него есть.

В решении достаточно указать правильный способ построения. Доказывать его правильность не обязательно.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{y+z}{2}, \\ \sqrt{y} = \frac{z+x}{2}, \\ \sqrt{z} = \frac{x+y}{2}. \end{cases}$$

и доказать, что других решений, кроме найденных, нет.

4. На доске написано несколько цифр (среди них могут быть одинаковые). На каждом шаге две цифры стираются и пишутся цифры, из которых состоит их произведение. (Например, вместо 5 и 6 пишется 3 и 0, а вместо 2 и 4 пишется 8). Доказать, что через несколько шагов на доске останется одна цифра.

5. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, $\angle A = 30°$. Вписанная окружность касается стороны AB в точке P, а стороны AC — в точке Q; M — середина стороны AC. Докажите, что $PM = PQ$.

6. Каждый член партии доверяет пяти однопартийцам, но никакие двое не доверяют друг другу. При каком минимальном размере партии такое возможно?

Не забудьте показать, что при указанном Вами размере партии это действительно возможно, а при меньших — нет.

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Каждый член партии доверяет пяти однопартийцам, но никакие двое не доверяют друг другу. При каком минимальном размере партии такое возможно?

Не забудьте показать, что при указанном Вами размере партии это действительно возможно, а при меньших — нет.

2. Найдите все натуральные числа n от 400 до 600 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), получим число n^5.

3. У Пети есть линейка длиной 10 см (то есть с помощью неё нельзя проводить отрезки длиной больше 10 см), и циркуль с максимальным раствором 6 см (то есть с помощью него невозможно рисовать окружности радиуса больше 6 см). Делений на линейке и циркуле нет, то есть измерять расстояния ими нельзя.

На листе бумаги нарисованы две точки. Известно, что расстояние между ними равно 17 см. Покажите, как Петя может соединить эти точки отрезком, используя только ту линейку и циркуль, которые у него есть.

4. На доске написано несколько цифр (среди них могут быть одинаковые). На каждом шаге две цифры стираются, и пишутся цифры, из которых состоит их произведение. (Например, вместо 5 и 6 пишется 3 и 0, а вместо 2 и 4 пишется 8). Докажите, что через несколько шагов на доске останется одна цифра.

5. В треугольнике ABC $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$. Вписанная окружность касается стороны AB в точке P, а стороны AC — в точке Q; M — середина стороны AC. Докажите, что $PM = PQ$.

6. Последовательность $\{a_n\}$ определена следующим образом: $a_1 = 2$, и $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Докажите неравенства

$$0,\underbrace{999999999\ldots99}_{2017\ \text{девяток}} < \sum_{i=1}^{2017} \frac{1}{a_i} < 1.$$

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. В компании из 6 человек некоторые компаниями по трое ходили вместе в походы. Верно ли, что среди них найдутся четверо, среди которых каждые трое ходили вместе в поход, либо четверо, где никакие трое не ходили вместе в поход?

2. Парабола $x = y^2$ пересекается с некоторой окружностью в четырёх точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на некоторой параболе, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, или на паре параллельных прямых.

3. Тройка целых чисел (x, y, z), наибольший общий делитель которых равен 1, является решением уравнения

$$y^2z + yz^2 = x^3 + x^2z - 2xz^2.$$

Докажите, что z является кубом целого числа.

4. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ расположены четыре окружности одного радиуса так, что они имеют общую точку и каждая из них вписана в один из углов четырёхугольника. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

5. Числа $P_1, \ldots, P_n$ являются перестановкой чисел $\{1, \ldots, n\}$ (то есть каждое P_i равно одному из $1, \ldots, n$, и все P_i различны). Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_i + P_{i+1}} > \frac{n-1}{n+2}.$$

6. Сторона BC треугольника правильного ABC разделена на 2016 равных частей точками $A_1, \ldots, A_{2015}$, стороны AC и AB — точками $B_1, \ldots, B_{2015}$ и $C_1, \ldots, C_{2015}$. Треугольник $A_iB_jC_k$ называется красным, если содержит центр ABC, и синим иначе. Каких треугольников больше, красных или синих?

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. В компании из 6 человек некоторые компаниями по трое ходили вместе в походы. Верно ли, что среди них найдутся четверо, среди которых каждые трое ходили вместе в поход, либо четверо, где никакие трое не ходили вместе в поход?

2. На окружности с центром O расположим шестёрку точек $P_1, \ldots, P_6$. Назовём шестёрку *интересной*, если $\overrightarrow{OP}_1 + \ldots + \overrightarrow{OP}_6 = 0$, и все углы $\angle P_iOP_j$ целые в градусах. Назовём шестёрку *скучной*, если она переводится в себя отражением от точки O или поворотом вокруг O на 120°. Существуют ли интересные нескучные шестёрки точек на окружности?

3. Выпуклый многогранник имеет 8 вершин и 6 четырёхугольных граней. Может ли проекция этого многогранника на некоторую плоскость оказаться правильным 8-угольником?

4. Тройка целых чисел (x, y, z), наибольший общий делитель которых равен 1, является решением уравнения

$$y^2z + yz^2 = x^3 + x^2z - 2xz^2.$$

Докажите, что z является кубом целого числа.

5. Числа $P_1, \ldots, P_n$ являются перестановкой набора чисел $\{1, \ldots, n\}$ (то есть каждое P_i равно одному из $1, \ldots, n$, и все P_i различны). Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_i + P_{i+1}} > \frac{n-1}{n+2}.$$

6. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть M — середина стороны BC, K — середина B_1C_1. Докажите, что окружность, проходящая через K, H и M, касается AA_1.