

# Олимпиада школьников «Курчатов»

по математике – 2021. Заключительный этап. 6 класс.

**Задача 1.** У Пети есть таблица  $3 \times 3$ . Он ставит в её клетки фишки по следующим правилам:

- в каждую клетку можно поставить не более одной фишки;
- в пустую клетку можно поставить фишку, если в соответствующих строке и столбце уже суммарно стоит чётное число фишек (0 является чётным числом).

Какое наибольшее количество фишек может поставить Петя?

*Решение. Ответ:* 9.

Обозначим через  $a, b, c$  левый, средний, правый столбцы таблицы, а через 1, 2, 3 — нижнюю, среднюю, верхнюю строки таблицы. Петя может заполнить фишками все 9 клеток таблицы, например, в следующем порядке:  $a1, b2, c3, a2, b3, c1, a3, b1, c2$ . Очевидно, больше 9 фишек поставить не удастся.  $\square$

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Есть только верный ответ (отсутствует алгоритм расстановки фишек).

**Задача 2.** В двузначном числе каждую цифру увеличили на 2 или на 4 (разные цифры могли быть увеличены на разные числа), в результате чего оно увеличилось в четыре раза. Каким могло быть исходное число? Найдите все возможные варианты и докажите, что нет других.

*Решение. Ответ:* 14.

Пусть  $x$  — первоначальное число, тогда получившееся число равняется  $4x$ . При этом после увеличения двух цифр само число было увеличено на 22, 24, 42 или 44. Получается четыре случая:

- $4x - x = 22$ ;
- $4x - x = 24$ ;
- $4x - x = 42$ ;
- $4x - x = 44$ .

Среди них нам подходит только третий, соответствующий значению  $x = 14$ .

$\square$

## Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

5 б. Правильно найдены и доказаны возможные цифры, стоящие в разряде единиц, и получен правильный ответ, однако не доказаны цифры, стоящие в разряде десятков.

5 б. Правильно найдены и доказаны возможные цифры, стоящие в разряде десятков и получен правильный ответ, однако не доказаны цифры, стоящие в разряде единиц

5 б. Без доказательства вводится ограничение неизменного числа сверху, но доказывается, что для всех чисел меньше этого ограничения существует единственное верное решение – 14.

3 б. Есть только верный ответ.

Если задача сведена к разбору четырёх случаев из решения выше, то за каждый неверно разобранный случай снимается 1 балл.

**Задача 3.** У мудреца есть 11 внешне одинаковых алмазов: 10 обычных и 1 волшебный. Мудрец знает, что все обычные алмазы весят одинаково, а волшебный отличается от них по весу. Также у мудреца есть чашечные весы, на которых можно сравнить вес двух кучек алмазов.

Как за два взвешивания мудрецу определить, тяжелее или легче волшебный алмаз по сравнению с обычным? Определять, какой именно алмаз является волшебным, не требуется.

*Решение.* Приведём один из возможных алгоритмов мудреца.

Пронумеруем алмазы числами от 1 до 11. Положим на одну чашу алмазы 1, 2, 3, а на другую — 4, 5, 6.

*Первый случай.* Одна из чаш перевесила. Не нарушая общности, чаша 1, 2, 3 оказалась тяжелее. Тогда среди алмазов 1, ..., 6 точно есть волшебный, следовательно, все алмазы 7, ..., 11 — обычные. Вторым взвешиванием сравним 1, 2, 3 и 7, 8, 9. Если они равны, то волшебный алмаз находится среди 4, 5, 6, и он легче обычного. Если они не равны, то волшебный алмаз находится среди 1, 2, 3, и он тяжелее обычного.

*Второй случай.* Чаши оказались в равновесии. Тогда среди алмазов 1, ..., 6 точно нет волшебного, следовательно, он находится среди 7, ..., 11. Вторым взвешиванием сравним 1, 2, 3, 4, 5 и 7, 8, 9, 10, 11. Если чаша 7, 8, 9, 10, 11 перевесит, то волшебный алмаз тяжелее обычного, иначе — легче.  $\square$

## Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 5 б. Приведён верный алгоритм действий, рассмотрены все ситуации, но допущена ошибка в ответе, либо решение не доведено до полноценного ответа.
- 3 б. Приведен в целом верный алгоритм действий, однако, рассмотрены и доведены до правильного ответа не все возможные ситуации.
- 0 б. Приведён алгоритм, который работает только в некоторых случаях.

**Задача 4.** На доске написано выражение

$$7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1.$$

Маша вместо звёздочек расставляет знаки «+» и «-». За один ход Ваня может поменять два подряд идущих знака на противоположные. Ваня хочет, чтобы спустя несколько его ходов получилось выражение, значение которого делится на 7. Может ли Маша расставить знаки так, чтобы Ваня **не** мог добиться желаемого?

*Решение. Ответ:* не может.

Покажем, как Ване добиться делящегося на 7 выражения. Знак между 7 и 6 можно считать плюсом (если там минус, поменяем его и следующий знак). Аналогично далее можно считать плюсом знак между 6 и 5, затем между 5 и 4, затем между 4 и 3, затем между 3 и 2.

Если между 2 и 1 стоит плюс, то Ваня добился требуемого:  $7+6+5+4+3+2+1 = 21$  делится на 7.

Если же между 2 и 1 стоит минус, то Ваня может поменять знаки перед 4 и 3, а затем перед 3 и 2. Тогда Ваня снова добился требуемого:  $7+6+5-4+3-2-1 = 14$  делится на 7.  $\square$

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 5 б. Приведён верный алгоритм действий Вани, но почему он работает, не очевидно и не обосновано.
- 0 б. Есть только ответ «не может».

**Задача 5.** На доске выписаны числа от 1 до 2021. Денис хочет выбрать среди них 1011 так, чтобы сумма любых двух не равнялась 2021 или 2022. Сколько существует способов это сделать?

*Решение. Ответ: 1.*

Среди чисел от 1 до 2021 выделим 1010 непересекающихся пар чисел, дающих в сумме 2022. А именно:  $(1, 2021)$ ,  $(2, 2020)$ ,  $\dots$ ,  $(1009, 1013)$ ,  $(1010, 1012)$ ; без пары осталось только число 1011.

В каждой из пар по условию можно выбрать не более одного числа. Следовательно, чтобы выбрать 1011 чисел, из каждой пары надо выбрать ровно одно число, а также надо выбрать число 1011. Тогда нельзя выбрать 1010 (иначе  $1011 + 1010 = 2021$ ), но тогда надо выбрать 1012 (иначе из последней пары ничего не выбрано). Тогда нельзя выбрать 1009 (иначе  $1012 + 1009 = 2021$ ), но тогда надо выбрать 1013 (иначе из предпоследней пары ничего не выбрано). Продолжая так и далее, мы получаем, что из каждой пары должно быть выбрано наибольшее число.

Если выбраны числа 1011, 1012, 1013,  $\dots$ , 2021, то условие задачи выполняется (т. к. сумма любых двух не меньше 2023) и такой способ выбора — единственный.

□

### *Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 3 б. Присутствует разбиение чисел на пары, но дальнейших продвижений нет.
- 0 б. Есть только ответ.

# Олимпиада школьников «Курчатов»

по математике – 2021. Заключительный этап. 7 класс.

**Задача 1.** Пете на дом задали несколько задач по физике и несколько по математике. Все решённые Петей задачи составляют 5% от количества всех задач по физике и 20% от количества всех задач по математике. Сколько процентов от общего количества задач решил Петя?

*Решение. Ответ:* 4%.

Пусть Петя решил  $N$  задач. Это составляет 5% ( $\frac{1}{20}$  долю) от задач по физике, поэтому всего задач по физике было  $20N$ . Аналогично, задач по математике было  $5N$ , тогда всего задач было задано  $20N + 5N = 25N$ . Решённые Петей задачи составляют от них  $\frac{N}{25N} \cdot 100\% = 4\%$ .  $\square$

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. Любое полное решение задачи, но ответ дан не в процентах, а в виде дроби  $\frac{1}{25}$  или 0,04.

3 б. Есть только верный ответ.

**Задача 2.** В двузначном числе каждую цифру увеличили на 2 или на 4 (разные цифры могли быть увеличены на разные числа), в результате чего оно увеличилось в четыре раза. Каким могло быть исходное число? Найдите все возможные варианты и докажите, что нет других.

*Решение. Ответ:* 14.

Пусть  $x$  — первоначальное число, тогда получившееся число равняется  $4x$ . При этом после увеличения двух цифр само число было увеличено на 22, 24, 42 или 44. Получается четыре случая:

- $4x - x = 22$ ;
- $4x - x = 24$ ;
- $4x - x = 42$ ;
- $4x - x = 44$ .

Среди них нам подходит только третий, соответствующий значению  $x = 14$ .  $\square$

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Есть только верный ответ.

Если задача сведена к разбору четырёх случаев из решения выше, то за каждый неверно разобранный случай снимается 1 балл.

**Задача 3.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $AD$ . Оказалось, что  $AB + BD = DC$ . Докажите, что  $\angle B = 2\angle C$ .

*Решение.* Отметим точку  $M$  на продолжении стороны  $BC$  за точку  $B$  так, что  $AB = BM$ . Тогда в равнобедренном треугольнике  $ABM$  внешний угол при вершине  $B$  равен сумме двух равных углов при основании  $AM$ , поэтому  $\angle ABC = 2\angle AMB$ .

Также равнобедренным является треугольник  $AMC$ , поскольку отрезок  $AD$  является его высотой и медианой одновременно ( $DC = AB + BD = BM + BD = MD$ ). Тогда  $\angle AMB = \angle ACB$  — его углы при основании.

Итак,  $\angle ABC = 2\angle AMB = 2\angle ACB$ , что и требовалось.

*Замечание.* Аналогичное решение получается, если отметить на отрезке  $DC$  точку  $N$  такую, что  $BD = DN$ .  $\square$

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

5 б. Корректно доказано, что треугольники  $ABM$  и  $AMC$  равнобедренные, но дальнейших продвижений нет.

2 б. Построена точка  $M$  либо точка  $N$  (либо аналогичная по построению), есть дальнейшие продвижения, но они не приводят к правильному ответу.

**Задача 4.** На доске написано  $N$  натуральных чисел, где  $N \geq 5$ . Известно, что сумма всех чисел равна 80, а сумма любых пяти из них не больше 19. Какое наименьшее значение может принимать  $N$ ?

*Решение. Ответ:* 26.

Условие задачи равносильно тому, что сумма пяти наибольших чисел не превосходит 19, а сумма всех чисел равна 80. Заметим, что среди пяти наибольших чисел обязательно есть число, не большее 3 (иначе, если все они не меньше 4, их сумма не меньше  $4 \cdot 5 = 20$ , а должна быть не больше 19).

Обозначим количество всех чисел за  $x$ . Раз среди пяти наибольших есть число, не большее 3, то и все остальные  $x - 5$  чисел не больше 3. Следовательно, сумма

всех чисел не превосходит  $3(x - 5) + 19$ , а с другой стороны, она равна 80. Итого мы получаем неравенство  $3(x - 5) + 19 \geq 80$ . Решая это неравенство и учитывая, что  $x$  является целым числом, получаем, что  $x \geq 26$ .

Осталось привести пример таких 26 чисел. Возьмём 24 тройки и 2 четвёрки, тогда общая сумма равна  $24 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 80$ , а сумма любых пяти не больше  $3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 17 \leq 19$ .  $\square$

### Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Явно приведены 26 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

1 б. Есть только верный ответ.

**Задача 5.** Таблица  $9 \times 9$  разделена на девять квадратов  $3 \times 3$ . Петя и Вася по очереди вписывают в клетки таблицы числа от 1 до 9 по правилам sudoku, то есть ни в какой строке, ни в каком столбце и ни в одном из девяти квадратов  $3 \times 3$  не должно быть написано двух одинаковых чисел. Петя начинает игру; проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

*Решение. Ответ:* Петя.

Приведём выигрышную стратегию для Пети. Своим первым ходом он ставит в центр таблицы (назовём его  $C$ ) число 5, а далее, если Вася поставил в какую-то клетку число  $a$ , то Петя поставит число  $10 - a$  в клетку, симметричную клетке Васи относительно центра таблицы. Такими действиями Петя поддерживает «симметричность» заполнения таблицы.

Предположим, своим ходом Петя нарушил одно из условий задачи: его число  $10 - a$  совпало с каким-то ранее поставленным числом  $b$  из его строки, столбца или квадрата  $3 \times 3$ .

Покажем, что это число  $b$  не может быть только что поставленным числом Васи. Если это так, то  $10 - a = a$  и  $a = 5$ , и эти два одинаковых числа стоят либо в одной строке или столбце с  $C$ , либо в одном квадрате  $3 \times 3$  с  $C$ . Но тогда Вася не мог бы сделать свой последний ход, ведь центр таблицы  $C$  уже занят числом 5, противоречие.

Если же число  $10 - a$  совпало с каким-то числом  $b$ , поставленным до последнего хода Васи, то тогда и симметричное число  $a$  (которое только что поставил Вася) должно было совпасть с симметричным числом  $10 - b$ , и они тоже бы находились в одном столбце, строке или квадрате  $3 \times 3$ . Но тогда Вася не мог бы сделать свой последний ход, противоречие.

Из вышеописанного следует, что Петя всегда может сделать свой ход, т. е. рано или поздно Вася проиграет.

□

### *Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 4 б. Приведена выигрышная стратегия, но нет обоснования, почему она является таковой.
- 0 б. Приведена стратегия, которая в некоторых случаях не приводит к победе Пети.
- 0 б. Есть только верный ответ.

# Олимпиада школьников «Курчатов»

по математике – 2021. Заключительный этап. 8 класс.

**Задача 1.** Назовём число *маленьким*, если оно 10-значное и не существует меньшего 10-значного числа с такой же суммой цифр. Сколько существует маленьких чисел?

*Решение. Ответ:* 90.

Ясно, что сумма цифр 10-значного числа может принимать одно из значений от 1 до 90 включительно. Для каждой из 90 возможных сумм цифр существует единственное наименьшее 10-значное с такой суммой цифр. Следовательно, маленьких чисел 90.  $\square$

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

1 б. Есть только верный ответ.

**Задача 2.** Про вещественные числа  $a, b, c, x, y$  известно, что

$$\frac{1}{a+x} = 6, \quad \frac{1}{b+y} = 3, \quad \frac{1}{c+x+y} = 2.$$

Докажите, что среди чисел  $a, b, c$  одно равно сумме двух других.

*Решение.* Из равенств в условии следует, что  $a+x = \frac{1}{6}$ ,  $b+y = \frac{1}{3}$ ,  $c+x+y = \frac{1}{2}$ . Следовательно,  $c+x+y = \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = (a+x) + (b+y)$ . Тогда  $c+x+y = a+x+b+y$ , откуда получаем  $c = a+b$ , что и требовалось.  $\square$

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

1 б. Получено выражение  $a = \frac{1}{6} - x$ .

1 б. Получено выражение  $b = \frac{1}{3} - y$ .

1 б. Получено выражение  $c = \frac{1}{2} - x - y$ .

**Задача 3.** На стороне  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$  так, что  $AB + BD = DC$ . Докажите, что  $\angle ADC = 90^\circ$ , если известно, что  $\angle B = 2\angle C$ .

*Решение.* Отметим точку  $M$  на продолжении стороны  $BC$  за точку  $B$  так, что  $AB = BM$ . В равнобедренном треугольнике  $ABM$  внешний угол при вершине  $B$  равен сумме двух равных углов при основании  $AM$ , поэтому  $\angle AMB = \frac{\angle B}{2} = \angle C$ . Следовательно, треугольник  $AMC$  является равнобедренным и  $AM = AC$ . Поскольку  $MD = MB + BD = AB + BD = DC$ , отрезок  $AD$  является медианой этого равнобедренного треугольника, но тогда он является и его высотой, т. е.  $\angle ADC = 90^\circ$ .

*Замечание.* Аналогичное решение получается, если отметить на отрезке  $DC$  точку  $N$  такую, что  $BD = DN$ .  $\square$

### Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Построена либо точка  $M$ , либо точка  $N$ , но дальнейших продвижений нет.

**Задача 4.** На доске написано  $N$  натуральных чисел, где  $N \geq 5$ . Известно, что сумма всех чисел равна 80, а сумма любых пяти из них не больше 19. Какое наименьшее значение может принимать  $N$ ?

*Решение. Ответ:* 26.

Условие задачи равносильно тому, что сумма пяти наибольших чисел не превосходит 19, а сумма всех чисел равна 80. Заметим, что среди пяти наибольших чисел обязательно есть число, не большее 3 (иначе, если все они не меньше 4, их сумма не меньше  $4 \cdot 5 = 20$ , а должна быть не больше 19).

Обозначим количество всех чисел за  $x$ . Раз среди пяти наибольших есть число, не большее 3, то и все остальные  $x - 5$  чисел не больше 3. Следовательно, сумма всех чисел не превосходит  $3(x - 5) + 19$ , а с другой стороны, она равна 80. Итого мы получаем неравенство  $3(x - 5) + 19 \geq 80$ . Решая это неравенство и учитывая, что  $x$  является целым числом, получаем, что  $x \geq 26$ .

Осталось привести пример таких 26 чисел. Возьмём 24 тройки и 2 четвёрки, тогда общая сумма равна  $24 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 80$ , а сумма любых пяти не больше  $3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 17 \leq 19$ .  $\square$

### Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Явно приведены 26 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

**Задача 5.** На доске выписаны числа от 1 до 2021. Денис хочет выбрать среди них 1010 так, чтобы сумма любых двух не равнялась 2021 или 2022. Сколько

существует способов это сделать?

*Решение. Ответ:*  $\frac{1011 \cdot 1012}{2} = 511566$ .

Запишем наши числа в следующем порядке: 2021, 1, 2020, 2, 2019, 3, ..., 1012, 1010, 1011. Заметим, что если два числа дают в сумме 2021 или 2022, то они стоят в этой последовательности рядом. Наша задача свелась к следующей: в ряд стоит 2021 объект (в дальнейшем для удобства будем считать, что это 2021 шарик), и нам нужно посчитать количество способов выбрать из них 1010, среди которых нет соседних.

Покрасим невыбранные шарики в красный цвет, а выбранные — в синий. Положим все 1011 красных шариков подряд. Требуется выложить в промежутки между ними (или с краю) 1010 синих шариков так, чтобы среди них не было соседних. Таких промежутков ровно 1012: промежутков между двумя красными ровно 1010, а также 2 промежутка с краю; в каждый из этих промежутков надо поместить не более одного синего шарика. Следовательно, нужно посчитать количество способов выбрать 1010 промежутков из 1012 имеющихся. Как известно, данная величина равна  $C_{1012}^{1010} = C_{1012}^2 = \frac{1012 \cdot 1011}{2} = 511566$ .

*Другое решение.*

Числа от 1 до 2021 разобьём на 1011 групп — 1010 непересекающихся групп пар чисел, дающих в сумме 2022 (а именно: (1, 2021), (2, 2020), ..., (1009, 1013), (1010, 1012)) и группа из одного оставшегося числа 1011.

В каждой из групп по условию можно выбрать не более одного числа. Следовательно, чтобы выбрать 1010 чисел, надо выбрать группу, из которой числа не будут взяты, а из всех остальных групп нужно выбрать ровно по одному числу.

Пусть мы не взяли ни одного числа из группы  $(a, 2022 - a)$  (здесь и далее будем считать, что в такой записи  $a \leq 2022 - a$ ). Из всех остальных групп нужно выбрать ровно по одному числу, в частности, нужно взять 1011 (если  $a = 1011$ , то этот шаг пропускаем). Тогда нельзя выбрать 1010 (иначе  $1011 + 1010 = 2021$ ), но тогда надо выбрать 1012 (иначе из последней пары ничего не выбрано). Тогда нельзя выбрать 1009 (иначе  $1012 + 1009 = 2021$ ), но тогда надо выбрать 1013 (иначе из предпоследней пары ничего не выбрано). Продолжая так и далее, мы получаем, что из пары  $(a + 1, 2022 - (a + 1))$  мы берём число  $2022 - (a + 1)$ . И так, во всех парах, где наименьшее число больше  $a$ , выбранные числа определяются однозначно (точнее, должны быть выбраны наибольшие числа в этих парах).

Рассмотрим теперь все пары, в которых наименьшее число меньше  $a$ . Рассмотрим среди них пару  $(b, 2022 - b)$  такую, в которой выбрано наибольшее число, т. е.  $2022 - b$  (случай, когда таких пар нет, рассмотрим отдельно), и если таких пар несколько, рассмотрим ту, в которой  $b$  максимально. Из всех пар от  $(b + 1, 2022 - (b + 1))$  до  $(a - 1, 2022 - (a - 1))$  всегда выбиралось наименьшее число (в силу максимальной  $b$ ). В паре  $(b - 1, 2022 - (b - 1))$  было выбрано число  $2022 - (b - 1)$  (иначе  $(b - 1) + (2022 - b) = 2021$ ). Аналогично в паре

$(b - 2, 2022 - (b - 2))$  было выбрано число  $2022 - (b - 2)$  и т. д., в паре  $(1, 2021)$  выбрано число 2021.

Теперь поймём, как определяется набор чисел, удовлетворяющий условию. Во-первых, выбирается группа  $(a, 2022 - a)$  (т. е. число  $1 \leq a \leq 1011$ ), в которой не выбрано ни одно число. Далее во всех группах, где наименьшее число больше  $a$ , выбор определяется однозначно (из группы берём наибольшее число). Во-вторых, выбирается пара  $(b, 2022 - b)$  (т. е. число  $1 \leq b \leq a - 1$ ), и во всех остальных парах выбор определяется однозначно (в парах с наименьшим числом от  $b + 1$  до  $a - 1$  выбирается наименьшее число, а в парах, где оно меньше  $b$ , выбирается наибольшее).

Осталось посчитать количество вариантов. Фиксируем некоторое  $a$ , тогда вариантов выбрать  $b$  будет ровно  $a - 1$ , да ещё один вариант, когда во всех парах с наименьшим числом меньше  $a$  выбиралось наименьшее число (т. е. числа  $b$  просто не существует). Всего  $a$  вариантов для числа  $b$ . Суммируя по всем  $a \leq 1011$ , получаем  $1 + 2 + 3 + \dots + 1010 + 1011 = \frac{1011 \cdot 1012}{2} = 511566$  вариантов для нашего набора. Очевидно, что все эти варианты различны и удовлетворяют условию (набор однозначно задаётся выбранными числами  $a$  и  $b$ ).

□

### Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

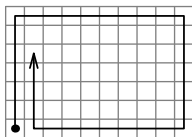
- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 7 б. Любое полное решение задачи, но ответ дан в виде формулы или выражения (например,  $\frac{1011 \cdot 1012}{2}$  или  $C_{1012}^2$ ).
- 6 б. Любое полное решение задачи, но ответ дан в виде формулы с многоточием (например,  $1 + 2 + 3 + \dots + 1010 + 1011$ ).
- 2 б. Присутствует разбиение чисел на пары, но дальнейших продвижений нет.
- 1 б. Есть верный ответ.

# Олимпиада школьников «Курчатов»

по математике – 2021. Заключительный этап. 9 класс.

**Задача 1.** Дана клетчатая таблица шириной 300 и высотой 50 клеток. Пластмассовую улитку ставят в левый нижний угол так, чтобы она смотрела по таблице вверх, и начинают передвигать по одной клетке в направлении взгляда. Если следующей клетки нет, то есть улитка стоит у края доски, либо если в следующей клетке она уже побывала, то её поворачивают направо и продолжают двигать по прямой в направлении взгляда. (Получается, что улитка движется по спирали по часовой стрелке.)

Улитка останавливается, когда пройдены все клетки. Укажите номер строки и номер столбца клетки, в которой она остановится. Столбцы пронумерованы слева направо числами от 1 до 300, а строки — снизу вверх числами от 1 до 50.



*Решение.* Ответ: 25 строка, 26 столбец.

Будем обозначать клетку  $(x, y)$ , если она находится в строке  $x$  и столбце  $y$ .

Сначала улитка стоит в клетке  $(1, 1)$ . Через несколько ходов она полностью обойдёт всю каёмку и попадёт в клетку  $(2, 2)$ . Заметим, что в этот момент конфигурация задачи повторится: улитка стоит в левой нижней клетке и её следующий ход будет вверх, только прямоугольник стал иметь ширину 298 и высоту 48. Ещё через несколько ходов улитка окажется в клетке  $(3, 3)$ , и конфигурация опять повторится для прямоугольника  $296 \times 46$ , далее она когда-то будет в клетке  $(4, 4)$  и т. д.

В тот момент, когда улитка окажется в клетке  $(25, 25)$ , она будет в левом нижнем углу прямоугольника шириной 252 клетки и высотой 2 клетки. Тогда понятно, что дальше фишка пройдёт по контуру данного прямоугольника и остановится в клетке  $(25, 26)$ .

□

## Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Присутствует идея о том, что улитка после каждого пройденного цикла оказывается в клетке  $(n, n)$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots, 25$

1 б. Есть верный ответ.

**Задача 2.** Числа  $d$  и  $e$  — корни квадратного трёхчлена  $ax^2 + bx + c$ . Могло ли так получиться, что  $a, b, c, d, e$  — это подряд идущие целые числа в некотором порядке?

*Решение. Ответ:* Да.

Такое получиться могло, например, для трёхчлена  $2x^2 - 2$  и его корней  $1$  и  $-1$ . Числа  $-2, -1, 0, 1, 2$  как раз являются подряд идущими целыми числами.  $\square$

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Выписан любой пример, удовлетворяющий условию задачи.

**Задача 3.** В пятизначном числе каждую цифру увеличили на 2 или на 4 (разные цифры могли быть увеличены на разные числа), в результате чего оно увеличилось в четыре раза. Каким могло быть исходное число? Найдите все возможные варианты и докажите, что нет других.

*Решение. Ответ:* 14074.

Обозначим исходное пятизначное число через  $N$ , тогда получившееся число стало равно  $4N$ . Их разность равна  $3N$  и является пятизначным числом, состоящим из 2 и 4. Также эта разность  $3N$  не меньше  $3 \cdot 10000$ , поэтому она начинается с четвёрки.

По признаку делимости на 3 сумма цифр числа  $3N$  делится на 3, поэтому оно не может состоять из двух четвёрок и трёх двоек, трёх четвёрок и двух двоек, пяти четвёрок. Следовательно, число  $3N$  состоит либо из одной четвёрки и четырёх двоек, либо из четырёх четвёрок и одной двойки. Тогда число  $N$  может являться каким-то из чисел  $\frac{42222}{3} = 14074$ ,  $\frac{44442}{3} = 14814$ ,  $\frac{44424}{3} = 14808$ ,  $\frac{44244}{3} = 14748$ ,  $\frac{42444}{3} = 14148$ .

Ясно также, что число  $N$  не могло в своей десятичной записи содержать восьмёрку, поэтому осталось лишь проверить число 14074. И оно подходит:  $14074 \cdot 4 = 56296$ , все цифры учетверённого числа больше соответствующих исходных на 2 или 4.  $\square$

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

6 б. В целом верное решение, но допущена арифметическая ошибка, не влияющая на его ход.

5 б. Обоснованно получены числа: 14074, 14814, 14808, 14748, 14148.

4 б. Доказано, что к числу прибавляются либо одна четвёрка и четыре двойки, либо четыре четвёрки и одна двойка.

1 б. Есть только ответ.

**Задача 4.** На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $M$  такая, что  $AM = AB + MC$ . Докажите, что перпендикуляр к  $AC$ , проходящий через  $M$ , делит дугу  $BC$  описанной окружности  $ABC$  пополам.

*Решение.* Отметим на отрезке  $AM$  точку  $X$  такую, что  $XM = MC$ . Тогда из условия задачи следует, что  $AX = AB$ .

Рассмотрим центр описанной окружности треугольника  $BCX$  — он находится на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам  $BC$  и  $BX$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $BC$  делит дугу  $BC$  пополам; а серединный перпендикуляр к  $XB$  является высотой и медианой равнобедренного треугольника  $XAB$ , поэтому является биссектрисой угла  $BAC$  и делит дугу  $BC$  пополам.

Следовательно, середина дуги  $BC$  является центром описанной окружности треугольника  $BCX$ , т. е. серединный перпендикуляр к отрезку  $XC$  проходит через середину дуги  $BC$ , что и требовалось доказать.  $\square$

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Отмечена точка  $X$ , но дальнейших продвижений нет.

**Задача 5.** На доске выписаны числа от 1 до 2021. Денис хочет выбрать среди них 1010 так, чтобы сумма любых двух не равнялась 2021 или 2022. Сколько существует способов это сделать?

*Решение. Ответ:*  $\frac{1011 \cdot 1012}{2} = 511566$ .

Запишем наши числа в следующем порядке: 2021, 1, 2020, 2, 2019, 3, ..., 1012, 1010, 1011. Заметим, что если два числа дают в сумме 2021 или 2022, то они стоят в этой последовательности рядом. Наша задача свелась к следующей: в ряд стоит 2021 объект (в дальнейшем для удобства будем считать, что это 2021 шарик), и нам нужно посчитать количество способов выбрать из них 1010, среди которых нет соседних.

Покрасим невыбранные шарики в красный цвет, а выбранные — в синий. Положим все 1011 красных шариков подряд. Требуется выложить в промежутки между ними (или с краю) 1010 синих шариков так, чтобы среди них не было соседних. Таких промежутков ровно 1012: промежутков между двумя красными ровно 1010, а также 2 промежутка с краю; в каждый из этих промежутков

надо поместить не более одного синего шарика. Следовательно, нужно посчитать количество способов выбрать 1010 промежутков из 1012 имеющихся. Как известно, данная величина равна  $C_{1012}^{1010} = C_{1012}^2 = \frac{1012 \cdot 1011}{2} = 511566$ .

*Другое решение.*

Числа от 1 до 2021 разобьём на 1011 групп — 1010 непересекающихся групп пар чисел, дающих в сумме 2022 (а именно: (1, 2021), (2, 2020), ..., (1009, 1013), (1010, 1012)) и группа из одного оставшегося числа 1011.

В каждой из групп по условию можно выбрать не более одного числа. Следовательно, чтобы выбрать 1010 чисел, надо выбрать группу, из которой числа не будут взяты, а из всех остальных групп нужно выбрать ровно по одному числу.

Пусть мы не взяли ни одного числа из группы  $(a, 2022 - a)$  (здесь и далее будем считать, что в такой записи  $a \leq 2022 - a$ ). Из всех остальных групп нужно выбрать ровно по одному числу, в частности, нужно взять 1011 (если  $a = 1011$ , то этот шаг пропускаем). Тогда нельзя выбрать 1010 (иначе  $1011 + 1010 = 2021$ ), но тогда надо выбрать 1012 (иначе из последней пары ничего не выбрано). Тогда нельзя выбрать 1009 (иначе  $1012 + 1009 = 2021$ ), но тогда надо выбрать 1013 (иначе из предпоследней пары ничего не выбрано). Продолжая так и далее, мы получаем, что из пары  $(a + 1, 2022 - (a + 1))$  мы берём число  $2022 - (a + 1)$ . Итак, во всех парах, где наименьшее число больше  $a$ , выбранные числа определяются однозначно (точнее, должны быть выбраны наибольшие числа в этих парах).

Рассмотрим теперь все пары, в которых наименьшее число меньше  $a$ . Рассмотрим среди них пару  $(b, 2022 - b)$  такую, в которой выбрано наибольшее число, т. е.  $2022 - b$  (случай, когда таких пар нет, рассмотрим отдельно), и если таких пар несколько, рассмотрим ту, в которой  $b$  максимально. Из всех пар от  $(b + 1, 2022 - (b + 1))$  до  $(a - 1, 2022 - (a - 1))$  всегда выбиралось наименьшее число (в силу максимальной  $b$ ). В паре  $(b - 1, 2022 - (b - 1))$  было выбрано число  $2022 - (b - 1)$  (иначе  $(b - 1) + (2022 - b) = 2021$ ). Аналогично в паре  $(b - 2, 2022 - (b - 2))$  было выбрано число  $2022 - (b - 2)$  и т. д., в паре  $(1, 2021)$  выбрано число 2021.

Теперь поймём, как определяется набор чисел, удовлетворяющий условию. Во-первых, выбирается группа  $(a, 2022 - a)$  (т. е. число  $1 \leq a \leq 1011$ ), в которой не выбрано ни одно число. Далее во всех группах, где наименьшее число больше  $a$ , выбор определяется однозначно (из группы берём наибольшее число). Во-вторых, выбирается пара  $(b, 2022 - b)$  (т. е. число  $1 \leq b \leq a - 1$ ), и во всех остальных парах выбор определяется однозначно (в парах с наименьшим числом от  $b + 1$  до  $a - 1$  выбирается наименьшее число, а в парах, где оно меньше  $b$ , выбирается наибольшее).

Осталось посчитать количество вариантов. Фиксируем некоторое  $a$ , тогда вариантов выбрать  $b$  будет ровно  $a - 1$ , да ещё один вариант, когда во всех парах с наименьшим числом меньше  $a$  выбиралось наименьшее число (т. е. числа  $b$  про-

сто не существует). Всего  $a$  вариантов для числа  $b$ . Суммируя по всем  $a \leq 1011$ , получаем  $1 + 2 + 3 + \dots + 1010 + 1011 = \frac{1011 \cdot 1012}{2} = 511566$  вариантов для нашего набора. Очевидно, что все эти варианты различны и удовлетворяют условию (набор однозначно задаётся выбранными числами  $a$  и  $b$ ).

□

### *Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 7 б. Любое полное решение задачи, но ответ дан в виде формулы или выражения (например,  $\frac{1011 \cdot 1012}{2}$  или  $C_{1012}^2$ ).
- 6 б. Любое полное решение задачи, но ответ дан в виде формулы с многоточием (например,  $1 + 2 + 3 + \dots + 1010 + 1011$ ).
- 2 б. Присутствует разбиение чисел на пары, но дальнейших продвижений нет.
- 1 б. Есть верный ответ.

# Олимпиада школьников «Курчатов»

по математике – 2021. Заключительный этап. 10 класс.

**Задача 1.** Маша написала на доске положительное число. Оказалось, что его целая часть на 43% меньше самого числа. Какое число написала Маша? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Целая часть числа — это наибольшее целое число, не превосходящее данное.

*Решение. Ответ:*  $1\frac{43}{57}$ .

Пусть  $n \geq 0$  — целая часть числа Маши, а  $0 \leq \epsilon < 1$  — его дробная часть. Само же число, соответственно, равно  $n + \epsilon$ .

Число  $n$  составляет 57% от числа  $n + \epsilon$ , что даёт уравнение  $n = 0,57(n + \epsilon)$ . Из него следует  $0,43n = 0,57\epsilon$ , что означает  $\epsilon = \frac{43}{57}n$ .

Если  $n = 0$ , то  $\epsilon = 0$ , но тогда число Маши — не положительное.

Если  $n = 1$ , то  $\epsilon = \frac{43}{57}$ , и число Маши равно  $1\frac{43}{57} = \frac{100}{57}$  — ясно, что оно подходит.

Если же  $n \geq 2$ , то  $\epsilon \geq \frac{43}{57} \cdot 2 > 1$ , что невозможно.

Итак, единственный возможный вариант — число  $1\frac{43}{57}$ . □

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Составлено уравнение вида  $n = 0,57(n + \epsilon)$ .

1 б. Есть верный ответ.

**Задача 2.** Числа  $d$  и  $e$  — корни квадратного трёхчлена  $ax^2 + bx + c$ . Могло ли так получиться, что  $a, b, c, d, e$  — это подряд идущие целые числа в некотором порядке?

*Решение. Ответ:* Да.

Такое получиться могло, например, для трёхчлена  $2x^2 - 2$  и его корней 1 и  $-1$ . Числа 2,  $-1, 0, 1, 2$  как раз являются подряд идущими целыми числами. □

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Выписан любой пример, удовлетворяющий условию задачи.

**Задача 3.** Дана прямоугольная трапеция  $ABCD$  с прямым углом  $A$  ( $BC \parallel AD$ ). Известно, что  $BC = 1$ ,  $AD = 4$ . На стороне  $AB$  отмечена точка  $X$ , а на стороне  $CD$  — точка  $Y$  так, что  $XY = 2$ ,  $XY \perp CD$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $XCD$  касается  $AB$ .

*Решение.* Пусть прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $Z$ . Нетрудно заметить подобие трёх треугольников

$$\triangle ZBC \sim \triangle ZYX \sim \triangle ZAD,$$

откуда получается

$$\frac{ZC}{BC} = \frac{ZX}{XY} = \frac{ZD}{AD}.$$

Следовательно,

$$\frac{ZX}{ZC} = \frac{XY}{BC} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{AD}{XY} = \frac{ZD}{ZX};$$

$$ZX^2 = ZC \cdot ZD.$$

По теореме, обратной к теореме о квадрате касательной, описанная окружность  $XCD$  касается прямой  $AB$ .  $\square$

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 3 б. Построена точка  $Z$  и рассмотрена хотя бы одна пара подобных треугольников из решения задачи.
- 1 б. Построена точка  $Z$ , но дальнейших продвижений нет.

**Задача 4.** Пару натуральных чисел назовём *хорошей*, если одно из чисел делится нацело на другое. Числа от 1 до 30 разбили на 15 пар. Какое наибольшее количество хороших пар могло получиться?

*Решение. Ответ:* 13.

Сначала докажем, что больше 13 хороших пар получиться не могло. Назовём число *плохим*, если оно простое и не меньше 15. Есть всего четыре плохих числа: 17, 19, 23, 29. Ни одно из остальных чисел от 1 до 30 не может делиться ни на одно плохое, а сами плохие числа могут делиться только на единицу (среди остальных). Следовательно, максимум одно из плохих чисел даст хорошую пару с единицей, а остальные минимум три плохих числа «испортят» минимум 2 пары.

Теперь рассмотрим такие 13 хороших пар: (1, 27), (2, 4), (3, 6), (5, 25), (7, 21), (8, 16), (9, 18), (10, 20), (11, 22), (12, 24), (13, 26), (14, 28), (15, 30). Оставшиеся 4 числа разобьём на пары, например, так: (17, 19), (23, 29). Итого мы имеем ровно 13 хороших пар.  $\square$

## Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 4 б. Построен пример, состоящий из 13 хороших пар.
- 3 б. Доказано, что хороших пар не более 13.
- 1 б. Есть идея рассмотрения «больших» простых чисел (17, 19, 23, 29), но дальнейших продвижений нет.

**Задача 5.** Петя и Вася играют в следующую игру. У них есть клетчатый прямоугольник  $1000 \times 2020$ , первым ходит Петя. Своим ходом первый игрок делит прямоугольник на два меньших одним разрезом вдоль линии сетки. Затем второй игрок выбирает один из двух получившихся прямоугольников, на котором будет продолжаться игра (второй прямоугольник отбрасывается), и делит его на два меньших. Потом опять первый выбирает прямоугольник, на котором будет продолжаться игра, и т. д. Проигрывает тот, кто не может в свой ход разрезать прямоугольник. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

*Решение. Ответ:* Петя.

Докажем более общий факт: Петя имеет выигрышную стратегию только при таких  $m$  и  $n$ , у которых различается степень вхождения двойки в разложении на простые множители (соответственно, если степени вхождения двойки в  $m$  и  $n$  одинаковы, то выигрышная стратегия есть у Васи). Поскольку 1000 делится на 8, а 2020 не делится на 8, отсюда следует ответ задачи.

На каждом ходу стороны прямоугольника будем записывать следующим образом:  $m = 2^a m_1$  и  $n = 2^b n_1$ , где  $m_1$  и  $n_1$  — нечётные числа;  $a$  и  $b$  — целые неотрицательные числа (стороны прямоугольника будем обозначать всегда  $m$  и  $n$ , в процессе игры они будут меняться). Ситуацию  $a \neq b$  будем называть *хорошей*, а ситуацию  $a = b$  — *плохой* (соответствующие прямоугольники будут также *хорошими* и *плохими*). Докажем, что в хорошей ситуации выигрышную стратегию имеет Петя, а в плохой — Вася.

Рассмотрим плохую ситуацию. Докажем, что как бы ни разделился прямоугольник в этом случае, соперник сможет выбрать себе такой прямоугольник, чтобы у него была хорошая ситуация. Предположим, получилось разрезать так, что оба получившихся прямоугольника плохие, т. е. они представимы в виде  $2^a m_1 \times 2^a k$  и  $2^a m_1 \times 2^a l$ , где  $m_1, k, l$  — нечётные числа (не умаляя общности, разрезалась сторона  $n$ ). Но тогда до разрезания сторона  $n$  прямоугольника равнялась  $2^a(k+l)$ , что делится на  $2^{a+1}$ , т. к.  $k$  и  $l$  нечётны. Но начальная ситуация была плохой и длина стороны  $n$  делилась только на  $2^a$ , противоречие.

Рассмотрим хорошую ситуацию. Не умаляя общности, пусть  $a < b$ . Скажем, что игрок в данной ситуации должен разделить прямоугольник на  $2^a m_1 \times 2^a$  и  $2^a m_1 \times 2^a (2^{b-a} n_1 - 1)$ . Заметим, что все длины делятся на  $2^a$  и не делятся на  $2^{a+1}$ , поэтому, какой бы прямоугольник ни выбрал соперник, у него будет плохая ситуация.

Приведём стратегию для обоих игроков. Если у Пети хорошая ситуация, он должен разделить прямоугольник так, чтобы у Васи ситуация стала плохой (следовательно, когда он разделит прямоугольник, Петя вернёт себе хорошую ситуацию и продолжит действовать аналогично). В случае когда у Пети плохая ситуация, по такой же стратегии может действовать Вася. Получаем, что игрок, находящийся в хорошей ситуации, всегда может сделать ход и гарантировать, что на следующем его ходу ситуация будет хорошей. Осталось заметить, что с каждым ходом прямоугольник уменьшается, и игра обязательно закончится, а нельзя сделать разрез только в прямоугольнике  $1 \times 1$ , что является плохой ситуацией.

□

### *Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 2 б. Присутствует идея представления длин сторон прямоугольника в виде чисел  $2^n \cdot k$ , где  $k$  — нечётное.
- 0 б. Есть верный ответ.

# Олимпиада школьников «Курчатов»

по математике – 2021. Заключительный этап. 11 класс.

**Задача 1.** На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Некоторые жители острова дружат друг с другом (дружба взаимна).

Утром каждый житель острова заявил, что дружит с нечётным числом рыцарей. Вечером каждый житель острова заявил, что дружит с чётным числом лжецов. Может ли количество жителей этого острова быть равно 2021?

*Решение. Ответ:* нет.

Воспользуемся известным вспомогательным утверждением (эквивалентным *лемме о рукопожатиях*): в любой компании количество людей, которые дружат с нечётным числом остальных, чётно.

Из утренних заявлений следует, что каждый рыцарь дружит с нечётным числом рыцарей, а каждый лжец, в свою очередь, дружит с чётным числом рыцарей. Из вечерних заявлений следует, что каждый лжец дружит с нечётным числом лжецов, а каждый рыцарь дружит с чётным числом лжецов. Отсюда следует, что и рыцари, и лжецы дружат с нечётным количеством жителей острова, и, согласно лемме о рукопожатиях, количество рыцарей и количество лжецов чётно. Но тогда общее количество жителей острова чётно и не может равняться 2021.

□

## Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

Следующие критерии суммируются:

+2 б. Проведён полный анализ честности количества друзей у каждого рыцаря.

+2 б. Проведён полный анализ честности количества друзей у каждого лжеца.

+2 б. Применена лемма о рукопожатиях или аналогичное утверждение.

+1 б. Получен верный обоснованный ответ. За отсутствие доказательства утверждения, эквивалентного лемме о рукопожатиях, баллы не снимаются.

**Задача 2.** Из деревни в город шёл путник. В 14:00, когда путник прошёл четверть пути, из деревни в город выехал мотоциклист, а из города в деревню — грузовик. В 15:00 мотоциклист догнал путника, а в 15:30 встретил грузовик. Во сколько путник встретит грузовик?

*Решение.* Ответ: 15:48.

Обозначим всё расстояние за  $S$ , а скорости путника, мотоцикла и грузовика — за  $V_p$ ,  $V_m$  и  $V_g$  соответственно (расстояние измеряем в километрах, а скорость — в километрах в час). По условию мотоциклист догнал путника за один час. Их скорость сближения равна  $V_m - V_p$ , а расстояние между ними  $S/4$ , поэтому имеет место уравнение

$$\frac{S/4}{V_m - V_p} = 1.$$

Через полтора часа после начала движения встретились мотоцикл и грузовик. Их скорость сближения равна  $V_m + V_g$ , а суммарное пройденное ими расстояние равно  $S$ , поэтому имеет место уравнение

$$\frac{S}{V_m + V_g} = 1,5.$$

Преобразуем оба уравнения и получим

$$\begin{cases} V_m - V_p = \frac{S}{4} \\ V_m + V_g = \frac{2S}{3}. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое и получим

$$V_g + V_p = \frac{5S}{12},$$

откуда находим

$$\frac{3S/4}{V_g + V_p} = \frac{9}{5}.$$

Следовательно, путник и грузовик встретились через  $9/5$  часа после начала движения. Переводя это время в часы и минуты, получаем, что путник и грузовик встретились в 15:48. □

### *Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Верно написана система уравнений движения.

**Задача 3.** В первой четверти координатной плоскости отметили две точки  $A$  и  $B$  с целочисленными координатами. Оказалось, что  $\angle AOB = 45^\circ$ , где  $O$  — начало координат. Докажите, что хотя бы одна из четырёх координат точек  $A$  и  $B$  — чётное число.

*Решение.* Пусть точка  $A$  имеет целочисленные координаты  $(a; b)$ , а точка  $B$  — координаты  $(c; d)$ . Запишем скалярное произведение векторов  $\vec{OA}(a; b)$  и  $\vec{OB}(c; d)$  двумя способами: через координаты и через угол между ними.

$$ac + bd = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cos 45^\circ = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ откуда}$$

$$2(ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Предположим, все числа  $a, b, c, d$  нечётны, тогда все выражения в скобках являются чётными числами. Квадрат любого нечётного числа даёт остаток 1 при делении на 4 (поскольку  $(2k + 1)^2 = 4(k^2 + k) + 1$ ), поэтому каждая из скобок в правой части является чётным числом, не делимым на 4. Получаем противоречие с тем, что левая часть равенства делится на  $2 \cdot 2^2 = 8$ , а правая — на 8 не делится.

□

### Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Доказано равенство  $2(ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ , но дальнейших продвижений нет.

3 б. Доказано равенство  $4abcd = (a^2 - b^2)(c^2 - d^2)$ , но дальнейших продвижений нет.

3 б. Доказано равенство  $ac + bd = ad - bc$ , но дальнейших продвижений нет.

3 б. Доказано равенство  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{d}{c}$ , но дальнейших продвижений нет.

2 б. В решении с дополнительным построением — поворотом отрезка  $OA$  на угол  $\frac{\pi}{2}$  — приведена идея о том, что отрезок  $OB$  лежит на биссектрисе построенного угла, но в остальном решение неверно.

**Задача 4.** Диагонали трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) пересекаются в точке  $O$ . На  $AB$  отметили точку  $E$  такую, что прямая  $EO$  параллельна основаниям трапеции. Оказалось, что  $EO$  — биссектриса угла  $CED$ . Докажите, что трапеция — прямоугольная.

*Решение.* Пусть прямая  $DE$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $K$ . Заметим, что  $\angle BCE = \angle CEO = \angle DEO = \angle DKC$ , поэтому треугольник  $CEK$  является равнобедренным и  $CE = EK$ . Докажем, что отрезок  $EB$  является его медианой — отсюда последует, что он также является и высотой, и трапеция окажется прямоугольной (в силу того, что  $\angle ABC = 90^\circ$ ).

Треугольники  $DBK$  и  $DOE$  подобны с коэффициентом  $\frac{BD}{OD}$ , а также треугольники  $ABC$  и  $AEO$  подобны с коэффициентом  $\frac{AC}{AO}$ . Эти коэффициенты подобия равны, поскольку параллельные прямые  $BC$  и  $AD$  высекают на прямых  $AC$  и  $BD$  пропорциональные отрезки (также это можно вывести из подобия треугольников  $AOD$  и  $COB$ ).

Итак,  $KB = \frac{BD}{OD} \cdot EO = \frac{AC}{AO} \cdot EO = BC$ , откуда и следует решение задачи. □

### Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

5 б. Приведено в целом верное доказательство с незначительными неточностями.

2 б. Доказано равенство либо  $\frac{AD}{BC} = \frac{AE}{BE}$ , либо  $\frac{AD}{BC} = \frac{ED}{EC}$ .

1 б. Построена точка  $K$ , но дальнейших продвижений нет.

**Задача 5.** Есть колода из 1024 карточек, на каждой из которых написан набор различных цифр от 0 до 9, причём все наборы различны (в частности, есть и пустая карточка). Назовём набор карточек *полным*, если на них каждая цифра от 0 до 9 встречается ровно по разу.

Найдите все натуральные  $k$ , для которых существует набор из  $k$  карточек со следующим условием: среди них нельзя выбрать полный набор, но при добавлении любой карточки из колоды это условие нарушается.

*Решение. Ответ:* 512.

Для каждой карточки рассмотрим другую, дополняющую её до полного набора (например, для карточки 3679 такой карточкой будет 012458). Ясно, что все 1024 карточки разбиваются на 512 непересекающихся пар карточек, дополняющих друг друга до полного набора. Далее мы докажем, что в любом искомом наборе обязательно есть ровно по одной карточке из каждой такой пары, т. е.  $k = 512$ .

Из условия следует, что максимум одна карточка из пары может быть среди выбранных. Теперь покажем, что из каждой пары должна быть хотя бы одна карточка.

Рассмотрим пару дополняющих друг друга карточек, обозначим их  $A$  и  $B$ . Предположим, что они обе не входят в выбранный набор. По условию при добавлении любой карточки из колоды найдётся полный набор. Добавив в набор  $A$ , мы найдём несколько карточек, дополняющих  $A$  до полного набора, т. е. все цифры на этих карточках просто совпадают с множеством цифр на карточке  $B$ . Аналогично, добавив карточку  $B$ , мы найдём несколько карточек из набора, цифры на которых совпадают с множеством цифр на карточке  $A$ . Тогда объединим все

эти карточки (которые совпадают с наборами на карточках  $A$  и  $B$ ) и получим полный набор, противоречие.

Приведём теперь пример возможного набора для  $k = 512$ . Выберем все карточки, на которых нет цифры 9, в данном наборе таких ровно 512. Ясно, что среди них нет полного набора (цифры 9 в принципе нигде нет), и для каждой невыбранной карточки дополняющая к ней содержится среди выбранных, т. е. при её добавлении появится полный набор из этих двух карточек.  $\square$

### Критерии

Баллы за следующие достижения суммируются:

- 4 б. Доказано, что  $k \geq 512$  (или что в каждой паре карточек, дополняющих друг друга до полного набора, должна быть выбрана хотя бы одна карточка).
- 1 б. Доказано, что  $k \leq 512$  (или что в каждой паре карточек, дополняющих друг друга до полного набора, должно быть выбрано не более одной карточки).
- 1 б. Приведён верный пример набора из 512 карточек.
- 1 б. Приведено обоснование того, что пример набора из 512 карточек удовлетворяет условиям задачи.
- 0 б. Только верный ответ.

**Задача 6.** Даны положительные действительные числа  $a, b, c$ . Известно, что

$$(a - b) \ln c + (b - c) \ln a + (c - a) \ln b = 0.$$

Докажите, что  $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$ .

Здесь  $\ln x$  — это натуральный логарифм (логарифм числа  $x$  по основанию  $e$ ).

*Решение.* Воспользуемся следующим известным утверждением.

Если на координатной плоскости даны точки с координатами  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$ , то для любого действительного  $\alpha$  точка с координатами  $(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2; \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2)$  лежит на прямой, проходящей через  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$ . Верно также и обратное утверждение: если точка лежит на прямой с начальными двумя, то найдётся такое действительное  $\alpha$ , для которого координаты данной точки представляются в искомом виде.

Перейдём теперь к решению задачи. Если  $a = c$ , то всё очевидно. Если  $a \neq c$ , поделим равенство на  $a - c$  и перенесём  $\ln b$  в другую часть, получим

$$\ln b = \frac{b - c}{a - c} \ln a + \frac{a - b}{a - c} \ln c.$$

Рассмотрим на координатной плоскости две точки  $A(a; \ln a)$  и  $C(c; \ln c)$ , а также обозначим  $\alpha = \frac{b - c}{a - c}$  (тогда  $1 - \alpha = \frac{a - b}{a - c}$ ). Из утверждения выше следует, что точка

$B$  с координатами  $x_B = \frac{b-c}{a-c}a + \frac{a-b}{a-c}c = b$  и  $y_B = \frac{b-c}{a-c} \ln a + \frac{a-b}{a-c} \ln c = \ln b$  лежит на прямой  $AC$ . Следовательно, точки  $A(a; \ln a)$ ,  $B(b; \ln b)$  и  $C(c; \ln c)$  лежат на одной прямой. Но также ясно, что эти точки лежат на графике  $y = \ln x$ . Из свойств функции  $\ln x$  известно, что графики логарифма и прямой могут пересекаться максимум по двум точкам (как говорят, функция  $\ln x$  является *вогнутой*), а это значит, что какие-то два из трёх чисел  $a, b, c$  совпадают и  $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$ .

□

### Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое решение задачи, в котором доказано, что какие-то два из чисел  $a, b, c$  равны.
- 2 б. Условие  $(a-b) \ln c + (b-c) \ln a + (c-a) \ln b = 0$  сведено к уравнению от двух переменных.
- 0 б. Условие  $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$  эквивалентно переформулировано в виде того, что какие-то два из чисел  $a, b, c$  равны, но это не доказано.

За отсутствие доказательства утверждения о параметризации прямой и утверждения о вогнутости логарифма баллы не снимаются.