

Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов - 100

Задание 1 (15 баллов)

В трёх коробках лежат шарики. В первой – красные, во второй – белые, в третьей лежат шарики и красного, и белого цвета. На каждой коробке сделана надпись «красные», «белые», «смешанные», но известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Семиклассник Сергей хочет узнать, где какие шарики. Для этого он может распечатать ровно одну коробку и вынуть оттуда ровно один шарик. Сможет ли он добиться своей цели?

Задание 2 (15 баллов)

На доске написано положительное число, с которым разрешается делать следующие операции: 1) умножать на два; 2) прибавлять один.

Каждый из трёх школьников один раз применил к имеющемуся числу первую операцию и два раза вторую операцию в некотором порядке. При этом все три числа оказались различными, и число, полученное первым школьником, превосходит число, полученное вторым школьником, более чем на 60%. Докажите, что число, полученное третьим школьником, превосходит число, полученное вторым школьником, более чем на 30%.

Задание 3 (15 баллов)

В прямоугольном треугольнике KLM проведены биссектрисы KE и LF, пересекающиеся в точке O. Прямая, делящая на две равные части угол EOL, отсекает от исходного треугольника равнобедренный. Найдите острые углы треугольника KLM.

Задание 4 (15 баллов)

Собственным делителем числа называется любой делитель, отличный от 1 и самого числа. Найдите число способов, которыми можно раскрасить в три цвета числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так чтобы цвет каждого числа отличался от цвета любого его собственного делителя. Не забудьте объяснить предложенный Вами способ подсчёта.

Задание 5 (15 баллов)

Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d, для которых выполнены равенства

$$\begin{cases} a + b = cd \\ c + d = ab \end{cases}$$

Задание 6 (25 баллов)

Некоторые клетки квадрата 9 на 9 покрашены в чёрный цвет так, что в каждом прямоугольнике из шести клеток ровно две чёрные. Сколько всего клеток в квадрате покрашено? Дайте полный и обоснованный ответ на этот вопрос.

Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов - 100

Задание 1 (15 баллов)

Вася прибавил к числителю и знаменателю правильной дроби одно и то же натуральное число, меньшее, как числителя, так и знаменателя. В результате дробь увеличилась более, чем на 50%. Вася утверждает, что, если он отнимет это число от числителя и знаменателя исходной дроби, то дробь уменьшится менее, чем на 50%. Может ли так быть?

Задание 2 (15 баллов)

В коробке лежат шарики двух цветов: синего и красного (оба цвета присутствуют). Известно, что синих шариков больше, а два шарика одного цвета можно вынуть с той же вероятностью, что и два шарика разных цветов. Чему может быть равна разность между числом синих и красных шариков? Дайте полный и обоснованный ответ на этот вопрос.

Задание 3 (15 баллов)

В ряд расставлены 2020 натуральных чисел так, что среди любых шести чисел, идущих подряд, первое число нацело делится на последнее, и среди любых девяти чисел, идущих подряд, последнее число нацело делится на первое. Докажите, что сумма первых ста чисел нацело делится на сумму последних ста чисел.

Задание 4 (15 баллов)

Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d , для которых выполнены равенства

$$\begin{cases} a + b = cd \\ c + d = ab \end{cases}$$

Задание 5 (15 баллов)

В треугольнике ABC угол B равен 80° . На стороне BC отмечена точка D такая, что $AB = AD = CD$; на стороне AB отмечена точка F такая, что $AF = BD$. На отрезке AC отмечена точка E такая, что $AB = AE$. Найдите угол AEF .

Задание 6 (25 баллов)

В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 100 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если:

- а) $n=404$?
- б) $n=406$?

Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов - 100

Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.

Задание 1 (14 баллов).

Через $\langle x \rangle$ обозначим ближайшее к x целое число (условимся, что $\langle n+1/2 \rangle = n$ при целом n). Положим $b_k = k + \langle \sqrt{k} \rangle$. Выпишем все натуральные числа, не встречающиеся в последовательности: b_1, b_2, b_3, \dots в порядке возрастания; получим последовательность a_1, a_2, a_3, \dots . Найдите явную формулу для числа a_n .

Задание 2 (17 баллов).

Число x_1 случайным образом выбирается на отрезке $[0,2]$ (вероятность того, что x_1 попадет в заданный интервал на отрезке $[0,2]$ пропорциональна длине этого интервала). Далее строится последовательность x_n , такая, что $x_{n+1} = 3|x_n - 1| - 1, n \geq 1$. Какова вероятность того, что $x_{2021} \in [0,2]$?

Задание 3 (28 баллов).

В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 100 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если
а) $n=404$?
б) $n=406$?

Задание 4 (23 балла).

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . Точки M, N лежат на сторонах AD, CD соответственно. Прямые, проходящие через M, N и параллельные соответственно AB, BC , пересекаются в точке P , лежащей внутри четырехугольника $ABCD$; а прямая BP повторно пересекает ω в точке Q , лежащей на дуге CD , не содержащей точки B . Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.

Задание 5 (30 баллов).

Серёжа задумал натуральное число n , не превосходящее 2019. Сначала он делит его с остатком на 202, получая неполное частное q_1 и остаток r_1 . Затем, на i -ом шаге ($i = 2; 3; \dots$) он делит число $\overline{r_{i-1}q_{i-1}}$ с остатком на 202, получая неполное частное q_i и остаток r_i .

Докажите, что $\overline{0, q_1 q_2 q_3 \dots} = \frac{n}{2019}$.

Задание 6 (32 балла).

В вершине A правильного треугольника ABC со стороной $3n$ метров (где n – натуральное число), стоит невидимый точечный робот, а в точке пересечения медиан треугольника ABC лежит мина. Робота можно отдавать команду сдвинуться на 1 метр в любом из 6 направлений, параллельных сторонам треугольника. Любую команду робот может проигнорировать, но тогда обязан исполнить следующую за ней, если она приказывает двигаться в том же направлении. Кроме того, если команда приказывает выйти за границы треугольника – робот стоит на месте и это не считается игнорированием команды. При каких n можно заставить робота наехать на мину?

Задание 7 (38 баллов).

ABC – равносторонний треугольник на плоскости, а S – круг, концентрический с описанной окружностью треугольника ABC , но имеющий вдвое больший радиус, пусть его радиус равен 1. Применить к точке X на плоскости *операцию* – значит, отразить точку X симметрично относительно ближайшей вершины треугольника ABC (если ближайших вершин две, выбираем одну из двух произвольным образом).

- а) Докажите, что любая точка плоскости за конечное число операций попадет в круг S .
- б) Пусть d – расстояние от центра S до какой-то точки, попадающей в первый раз в круг S после ровно 1000 операций. Найдите промежуток возможных значений d .

Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов - 100

Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.

Задание 1 (14 баллов).

Через $\langle x \rangle$ обозначим ближайшее к x целое число (условимся, что $\langle n+1/2 \rangle = n$ при целом n). Положим $b_k = k + \langle \sqrt{k} \rangle$. Выпишем все натуральные числа, не встречающиеся в последовательности: b_1, b_2, b_3, \dots в порядке возрастания; получим последовательность a_1, a_2, a_3, \dots . Найдите явную формулу для числа a_n .

Задание 2 (17 баллов).

Число x_1 случайным образом выбирается на отрезке $[0,2]$ (вероятность того, что x_1 попадет в заданный интервал на отрезке $[0,2]$ пропорциональна длине этого интервала). Далее строится последовательность x_n , такая, что $x_{n+1} = 3|x_n - 1| - 1, n \geq 1$. Какова вероятность того, что $x_{2021} \in [0,2]$?

Задание 3 (28 баллов).

В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 100 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если
а) $n=404$?
б) $n=406$?

Задание 4 (23 балла).

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . Точки M, N лежат на сторонах AD, CD соответственно. Прямые, проходящие через M, N и параллельные соответственно AB, BC , пересекаются в точке P , лежащей внутри четырехугольника $ABCD$; а прямая BP повторно пересекает ω в точке Q , лежащей на дуге CD , не содержащей точки B . Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.

Задание 5 (30 баллов).

Сережа задумал натуральное число n , не превосходящее 2019. Сначала он делит его с остатком на 202, получая неполное частное q_1 и остаток r_1 . Затем, на i -ом шаге ($i = 2; 3; \dots$) он делит число $\overline{r_{i-1}q_{i-1}}$ с остатком на 202, получая неполное частное q_i и остаток r_i .

Докажите, что $\overline{0, q_1 q_2 q_3 \dots} = \frac{n}{2019}$.

Задание 6 (32 балла).

В вершине A правильного треугольника ABC со стороной $3n$ метров (где n – натуральное число), стоит невидимый точечный робот, а в точке пересечения медиан треугольника ABC лежит мина. Робота можно отдавать команду сдвинуться на 1 метр в любом из 6 направлений, параллельных сторонам треугольника. Любую команду робот может проигнорировать, но тогда обязан исполнить следующую за ней, если она приказывает двигаться в том же направлении. Кроме того, если команда приказывает выйти за границы треугольника – робот стоит на месте и это не считается игнорированием команды. При каких n можно заставить робота наехать на мину?

Задание 7 (38 баллов).

ABC – равносторонний треугольник на плоскости, а S – круг, концентрический с описанной окружностью треугольника ABC , но имеющий вдвое больший радиус, пусть его радиус равен 1. Применить к точке X на плоскости *операцию* – значит, отразить точку X симметрично относительно ближайшей вершины треугольника ABC (если ближайших вершин две, выбираем одну из двух произвольным образом).

- а) Докажите, что любая точка плоскости за конечное число операций попадет в круг S .
- б) Пусть d – расстояние от центра S до какой-то точки, попадающей в первый раз в круг S после ровно 1000 операций. Найдите промежуток возможных значений d .

Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов - 100

Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.

Задание 1 (17 баллов).

Для действительного числа $\alpha \in (0,1)$ рассмотрим возрастающую последовательность всех натуральных чисел m_i , для которых $\{m_i\alpha\} < \alpha$. Может ли для какого-то α соответствующая последовательность начинаться с

а) 2021,4041,6062?

б) 2021,4042,6062,8082?

Задание 2 (20 баллов).

В последовательности чисел $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ некоторые члены умножили на -1 , причем известно, что осталось бесконечно много положительных членов. Докажите что любое натуральное число представимо в виде суммы нескольких различных членов полученной последовательности.

Задание 3 (26 баллов).

В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 100 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если

а) $n = 84$?

б) $n = 86$?

Задание 4 (23 балла).

В угол AOC вписаны окружности Ω_1 и Ω_2 (радиус Ω_1 больше). Ω_1 касается сторон угла в точках A и B , а Ω_2 – в точках D и C соответственно. Точка M – середина отрезка BC . Прямые MA и MD вторично пересекают Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках X и Y . Прямые BX и CY пересекаются в точке Z . Докажите, что прямая MZ проходит через середину отрезка AD .

Задание 5 (28 баллов).

Дана пара взаимно-простых многочленов с действительными коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ степеней 2021 и 2000 соответственно (*взаимно-простые* означает, что не существует многочлена $R(x)$, не равного константе, на который делятся $P(x)$ и $Q(x)$). Гриша выбирает конечное множество действительных чисел c_1, \dots, c_n (помните, в множестве элементы не повторяются, размер множества Гриша тоже выбирает сам), находит число различных кратных действительных корней у многочлена $P(x) + c_i Q(x)$ (при i от 1 до n) и складывает полученные числа. Какую наибольшую сумму Гриша может получить в результате этого процесса?

Задание 6 (38 баллов).

ABC – равносторонний треугольник на плоскости, а S – круг, концентрический с описанной окружностью треугольника ABC , но имеющий вдвое больший радиус, пусть его радиус равен 1. Применить к точке X на плоскости *операцию* – значит, отразить точку X симметрично относительно ближайшей вершины треугольника ABC (если ближайших вершин две, выбираем одну из двух произвольным образом).

- а) Докажите, что любая точка плоскости за конечное число операций попадет в круг S .
б) Пусть d – расстояние от центра S до какой-то точки, попадающей в первый раз в круг S после ровно 2021 операции. Найдите промежуток возможных значений d .

Задание 7 (34 балла).

Для таблички $n \times n$ рассматриваем семейство квадратов 2×2 , состоящих из клеток таблицы, и обладающее свойством: для любого квадрата семейства найдется покрытая им клетка, не покрытая никаким другим квадратом из семейства. Через $f(n)$ обозначим максимальное количество квадратов в таком семействе.

Для какого наименьшего C неравенство $f(n) \leq Cn^2$ верно при любом n ?