Математика **7 класс**

Время выполнения задания - 240 минут.

Максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов. Максимальная оценка за всю работу - 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. В самолёте летят жители города лжецов и жители города рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда обманывают. Все пассажиры сели в ряды по 4 человека, и бортпроводник задал каждому пассажиру один и тот же вопрос. «Верно ли, что в вашем ряду столько же Ваших земляков, сколько жителей другого города?» Прозвучало ровно 70 утвердительных ответов. Сколько лжецов летит в самолёте? Человек считается своим собственным земляком.

2. Имеется пять гирь различного веса, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что две самые тяжёлые гири весят в два раза больше трёх других, а три самые тяжёлые гири весят в восемь раз больше двух других. Найдите наименьшее возможное значение суммарного веса всех гирь.

3. Имеется дробь $1/n$. Семиклассник Семёнов каждую минуту прибавляет к её числителю и знаменателю по 1 и смотрит, можно ли сократить полученную дробь. Семёнов утверждает, что первый раз сократимая дробь получилась после 1000 шагов. Стоит ли ему верить?

4. В выпуклом четырёхугольнике ABCD выполнено AB=BC=CD, и каждая из диагоналей равна какой-то стороне. Найдите углы четырёхугольника. (Ответ нужно выразить в градусах)

5. Вершины 2019-угольника покрашены в два цвета: 1010 синих и 1009 красных. Сторона с двумя красными вершинами помечена числом 2, сторона с двумя синими вершинами помечена числом 1/2, а сторона с разноцветными вершинами помечена числом 1. Найдите все возможные значения произведения всех чисел, которыми помечены стороны.

6. Имеется клетчатая доска $(2n+1)\times(2n+1)$. В центральной клетке сидит таракан. Семиклассник Семён хочет убить таракана и кидает в него камешками (не обязательно на ту самую клетку, где находится таракан). Пока камешек летит, таракан перебегает в любую соседнюю по стороне клетку. Камешек, попавший на клетку с тараканом, убивает его. Если камешек попал на пустую клетку (без таракана), то на эту клетку таракан заползать больше никогда не будет. (В частности, если во все соседние с тараканом клетки уже попадали камешки, то таракан больше никуда не перебегает.) Как только таракан попадает на край доски, Семён утрачивает к нему интерес и перестаёт кидаться камешками. Найдите наименьший размер доски, при котором Семён гарантированно добьётся своего.

Время выполнения задания - 240 минут.

Максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов. Максимальная оценка за всю работу - 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. В самолёте летят жители города лжецов и жители города рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда обманывают. Все пассажиры сели в ряды по 4 человека, и бортпроводник задал каждому пассажиру один и тот же вопрос. «Верно ли, что в вашем ряду столько же Ваших земляков, сколько жителей другого города?» Прозвучало ровно 70 утвердительных ответов. Сколько лжецов летит в самолёте? Человек считается своим собственным земляком.

2. Имеется дробь 1/n. Восьмиклассник Вася каждую минуту прибавляет к её числителю и знаменателю по 1 и смотрит, можно ли сократить полученную дробь. Вася утверждает, что первый раз сократимая дробь получилась после 1000 шагов. Стоит ли ему верить?

3. Имеется прямоугольный параллелепипед. Вася считает, что при увеличении каждого из его рёбер на 1 см полная поверхность параллелепипеда увеличится на 9 см^2, а объём увеличится на 5 см^3. Может ли он оказаться прав?
   Замечание. Прямоугольный параллелепипед – пространственная фигура, напоминающая куб, но, рёбра, выходящие из одной вершины, у неё могут иметь различную длину. Её объём равен произведению длин трёх рёбер, выходящих из одной вершины.

4. На стороне BC параллелограмма ABCD выбрана точка M так, что равнобедренным оказался каждый из треугольников ABM, AMD, CDM. Найдите все возможные значения углов параллелограмма при этих условиях. (Ответ нужно выразить в градусах).

5. Вершины 2019-угольника покрашены в два цвета: 1010 синих и 1009 красных. Сторона с двумя красными вершинами помечена числом 2, сторона с двумя синими вершинами помечена числом 1/2, а сторона с разноцветными вершинами помечена числом 1. Найдите все возможные значения произведения всех чисел, которыми помечены стороны.

6. Рассматриваются наборы из семи гирь с суммарным весом 1 (вес каждой гири неотрицателен). Назовем поднабор большим, если сумма весов гирь поднабора больше или равна 2/3. Для каждого поднабора найдём число больших поднаборов. Найдите минимум этого числа по всем наборам.

Математика 9-10 класс

(Этап длится 240 минут. Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

12 1. В таблице 9×9 расставлены различные натуральные числа, сумма которых равна $2S$. Известно, что в каждой строке числа возрастают слева направо, а в каждом столбце - снизу вверх. Может ли сумма чисел в центральном квадрате 5×5 быть больше S?

15 2. Дан описанный четырехугольник $ABCD$, у которого радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и ADC равны. Найдите угол между диагоналями AC и BD.

15 3. В последовательности чисел Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ каждое следующее число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Докажите, что среди чисел Фибоначчи нет ни одной натуральной степени числа 7.

20 4. Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого длины всех ребер иррациональны, а объем, полная поверхность и бóльшая диагональ – числа целые? (*Прямоугольный параллелепипед* – это фигура в пространстве, задаваемая неравенствами $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$, где $a, b, c > 0$ – фиксированные числа. *Бóльшая диагональ* – это максимальное расстояние между вершинами параллелепипеда.)

32 5. Дано несколько вещественных чисел, по модулю не превосходящих 1. Сумма всех чисел равна S. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы при некотором натуральном $n < 100$ сумма выбранных чисел отличалась от $\frac{nS}{100}$ не более чем на $\frac{1}{100}$.

28 6. Рассматриваются наборы из семи гирь с суммарным весом 1 (вес каждой гири неотрицателен). Назовем поднабор *большим*, если сумма весов гирь поднабора больше или равна $2/3$. Для каждого набора найдем число больших поднаборов. Найдите минимум этого числа по всем наборам.

7. Даны m подмножеств n-элементного множества: $A_1, \ldots, A_m$. Обозначим через $|A_i|$ число элементов множества A_i. Рассмотрим неравенство

$$n^2 \sum_{i,j,k=1}^{m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \ge (|A_1| + \cdots + |A_m|)^3,$$

в котором индексы i, j, k пробегают все значения от 1 до m, то есть в сумме всего m^3 слагаемых.

15 а) Докажите это неравенство при $m = 3$.

25 б) Докажите это неравенство при произвольном натуральном m.

Математика 11 класс
(Этап длится 240 минут. Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

12 1. На доске написана система из 12 различных уравнений с 6 неизвестными $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Каждое уравнение имеет вид $x_i + x_j + x_k = 0$, где $i \neq j \neq k$ (сумма трех различных неизвестных равна нулю). Могло ли оказаться так, что у системы бесконечно много решений?

15 2. Дан описанный четырехугольник $ABCD$, у которого радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и ADC равны. Найдите угол между диагоналями AC и BD.

18 3. Найдите все вещественные c, при которых сумма девятых степеней корней уравнения $x^2 - x + c = 0$ равна нулю, и сумма пятнадцатых степеней тоже равна нулю. Замечание: корни могут быть комплексными.

25 4. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах BC и CD квадрата $ABCD$. Прямые AP и AQ пересекают BD в точках M и N соответственно, а прямые PN и QM пересекаются в точке H. Докажите, что $AH \perp PQ$ тогда и только тогда, когда точки P, Q, M, N лежат на одной окружности.

32 5. Дано несколько вещественных чисел, по модулю не превосходящих 1. Сумма всех чисел равна S. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы при некотором натуральном $n < 100$ сумма выбранных чисел отличалась от $\frac{nS}{100}$ не более чем на $\frac{1}{100}$.

28 6. В правильном тетраэдре с ребром, равным 8, отмечены 25 различных точек: 4 вершины и 21 произвольная точка внутри тетраэдра. Никакие 4 отмеченные точки не лежат в одной плоскости. Докажите, что найдется тетраэдр с вершинами в отмеченных точках, объем которого меньше единицы.

7. Даны m подмножеств n-элементного множества: $A_1, \ldots, A_m$. Обозначим через $|A_i|$ число элементов множества A_i. Рассмотрим неравенство

$$n^2 \sum_{i,j,k=1}^{m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \geq (|A_1| + \cdots + |A_m|)^3,$$

в котором индексы i, j, k пробегают все значения от 1 до m, то есть в сумме всего m^3 слагаемых.

15 а) Докажите это неравенство при $m = 3$.

25 б) Докажите это неравенство при произвольном натуральном m.