#методички

профиматика

возможно, самый понятный канал по математике

Задача 16

профильного ЕГЭ по математике

Содержание

Используется без доказательства

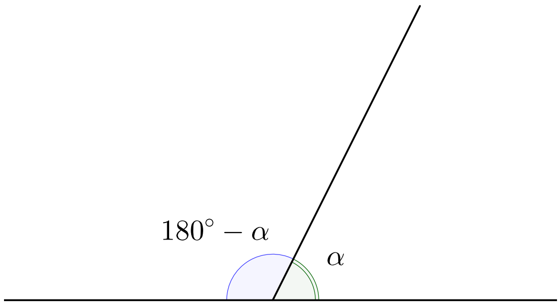
Требует обоснования

1 Углы

1. Смежные углы

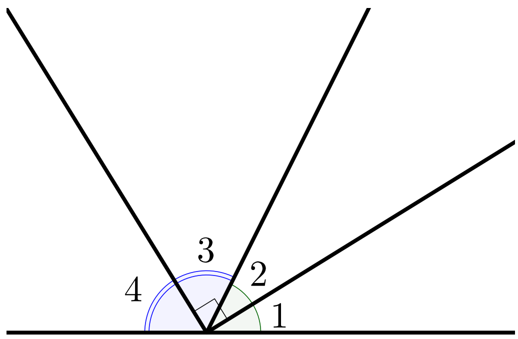
Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются смежными. Сумма смежных углов равна 180°.

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$



2. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

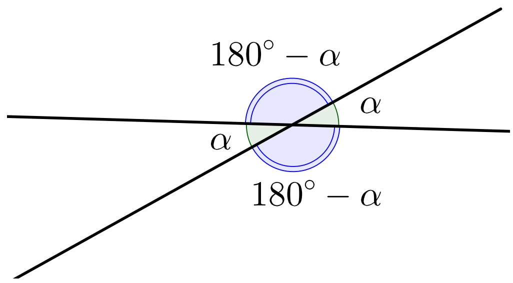
$$\angle 1 = \angle 2;$$
$$\angle 3 = \angle 4;$$
$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2 \cdot (\angle 2 + \angle 3) = 180^\circ \implies$$
$$\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ.$$



3. Вертикальные углы:

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.
Вертикальные углы равны.

$$\angle 1 = \angle 3$$
$$\angle 2 = \angle 4$$



4. Если даны две параллельные прямые и их секущая, то углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются **соответственными**, углы 3 и 6, 4 и 5 называются **накрест лежащими**, углы 3 и 5, 4 и 6 называются **внутренними односторонними**. Тогда:
Соответственные углы равны:

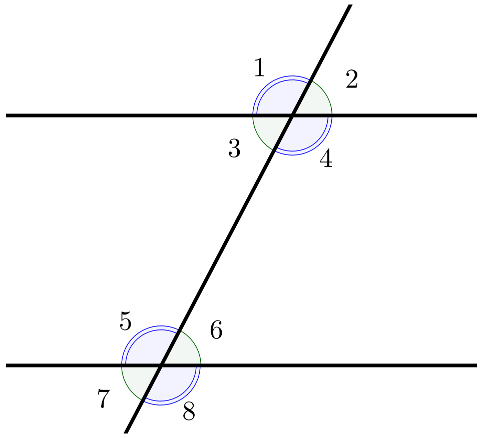
$$\angle 1 = \angle 5, \quad \angle 2 = \angle 6, \quad \angle 3 = \angle 7, \quad \angle 4 = \angle 8;$$

Накрест лежащие углы равны:

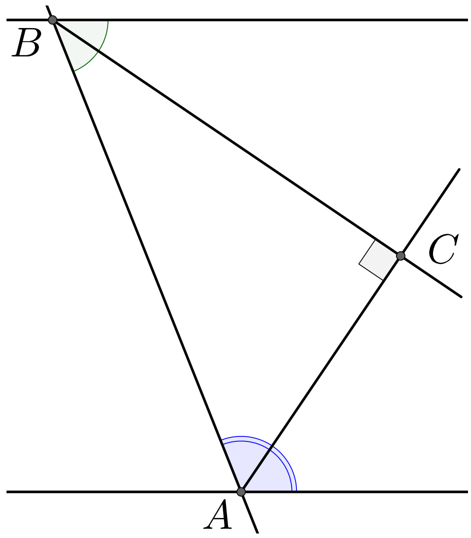
$$\angle 3 = \angle 6; \quad \angle 4 = \angle 5;$$

Внутренние односторонние углы в сумме дают 180 градусов:

$$\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ; \quad \angle 4 + \angle 6 = 180^\circ.$$

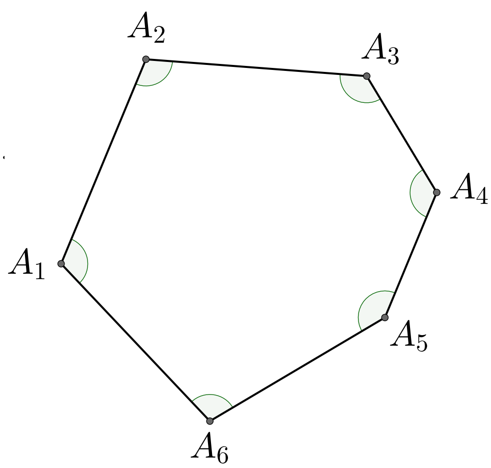


5. Биссектрисы односторонних внутренних углов перпендикулярны.



6. Сумма внутренних углов произвольного n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$.
Например, если $n = 6$, то

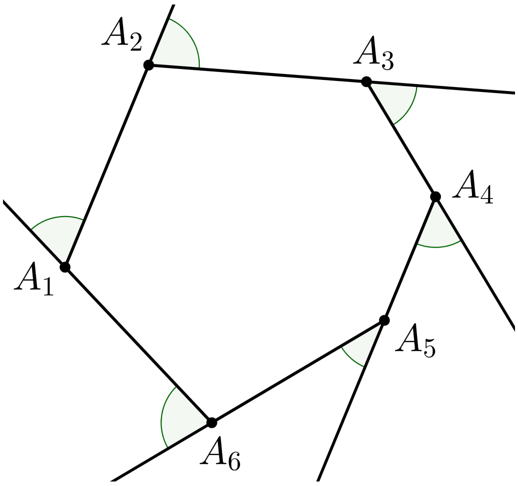
$$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 + \angle A_6 = 180^\circ \cdot (6-2) = 720^\circ.$$



7. **Внешним углом** многоугольника будем называть угол, смежный внутреннему углу многоугольника. Их сумма равна

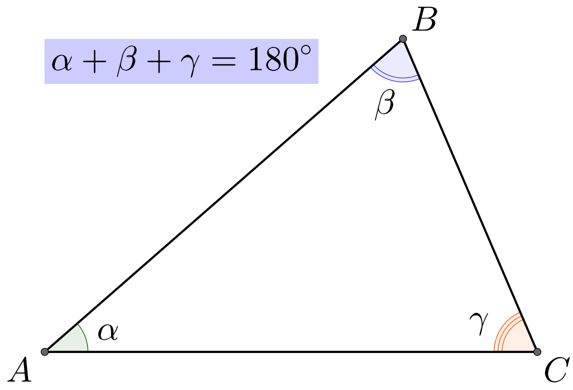
$$(180^\circ - \angle A_1) + \ldots + (180^\circ - \angle A_n) = n \cdot 180^\circ -$$

$$-180^\circ \cdot (n-2) = 360^\circ.$$

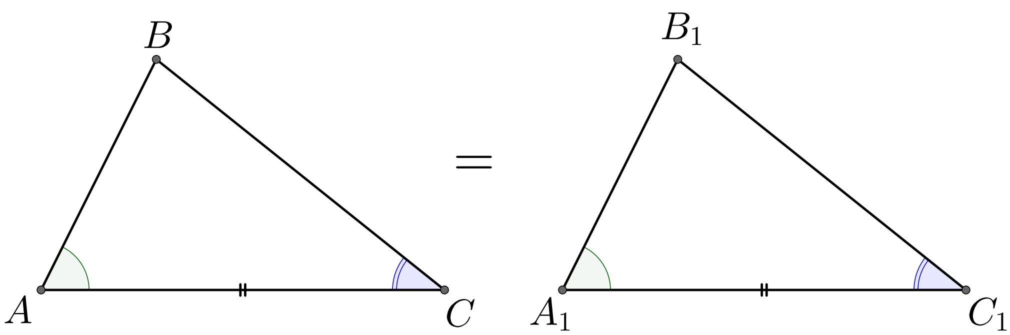


2 Треугольники общего вида

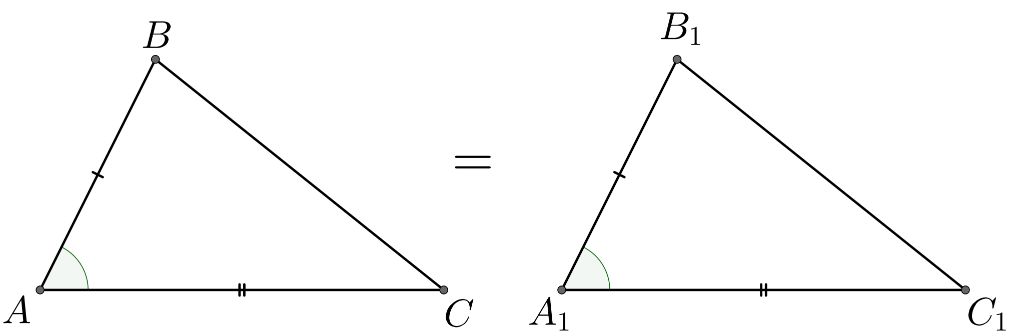
1. Сумма углов треугольника равна 180°.



2. Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними.



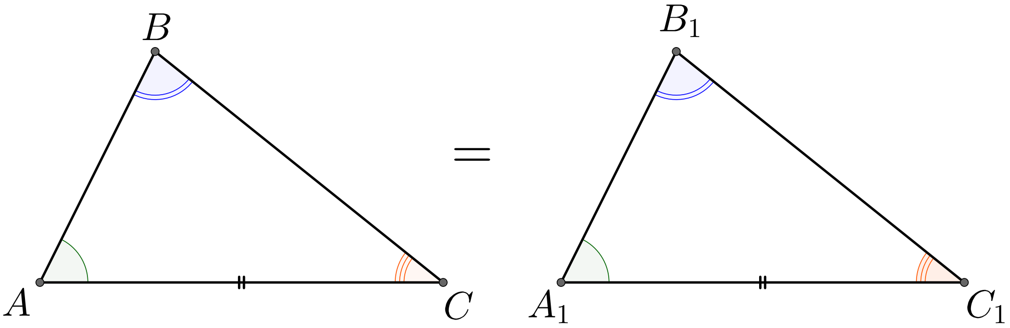
3. Второй признак равенства треугольников: по стороне и прилежащим к ней углам.



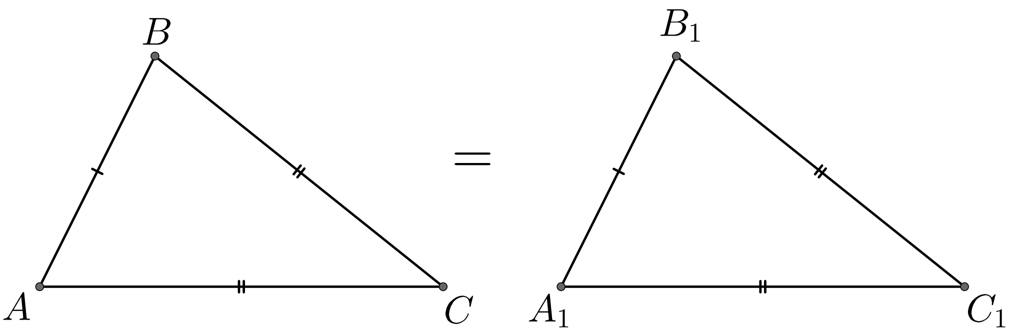
Замечание: На самом деле ситуация, в которой один угол прилёг к стороне, а второй – нет, также приводит к равенству треугольников, так как оставшийся угол задаётся однозначно по двум известным.
Ситуация, в которой один из пар равных углов прилегает к равной стороне, а вторая пара равных углов нет, тоже приводит к равенству треугольников. Действительно, пусть нам даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причём $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AC = A_1C_1$, тогда

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (\angle A_1 + \angle B_1) = \angle C_1 \implies \angle C = \angle C_1$$

А значит треугольники равны по второму признаку.

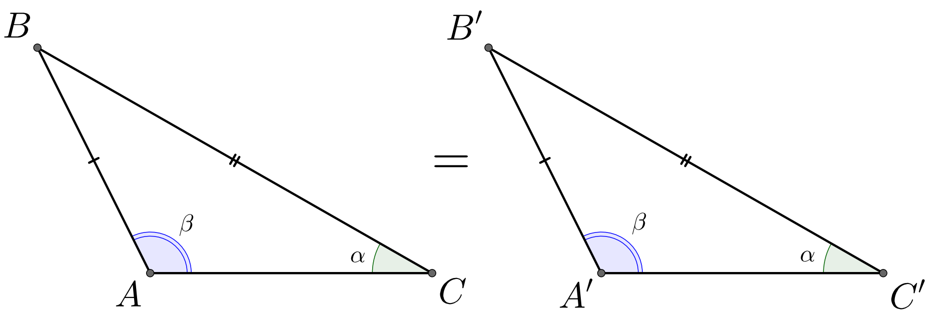


4. Третий признак равенства треугольников: по трем сторонам.

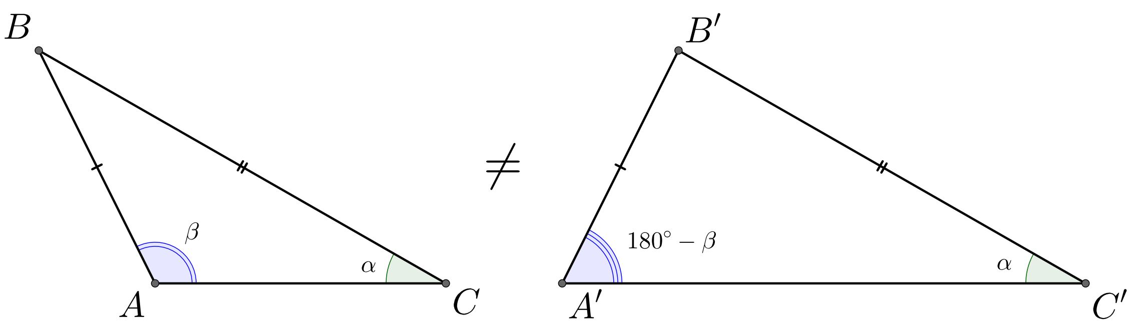


5. Если две стороны и угол напротив одной из сторон первого треугольника соответственно равны двум сторонам и углу второго треугольника, то возможны два варианта:

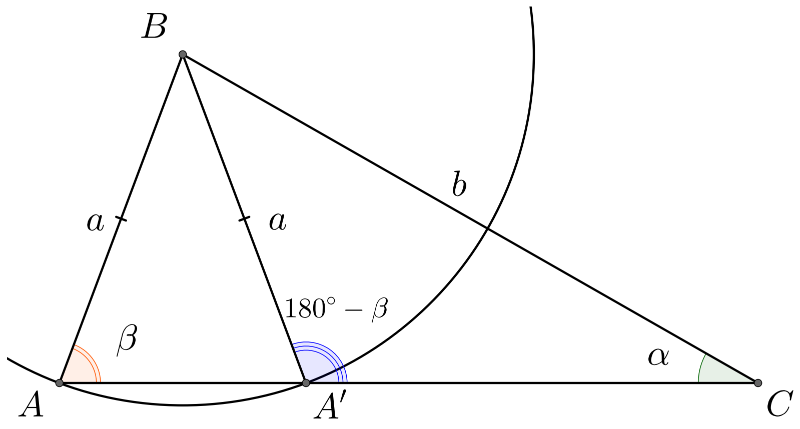
1) Углы напротив второй стороны равны $\iff$ треугольники равны



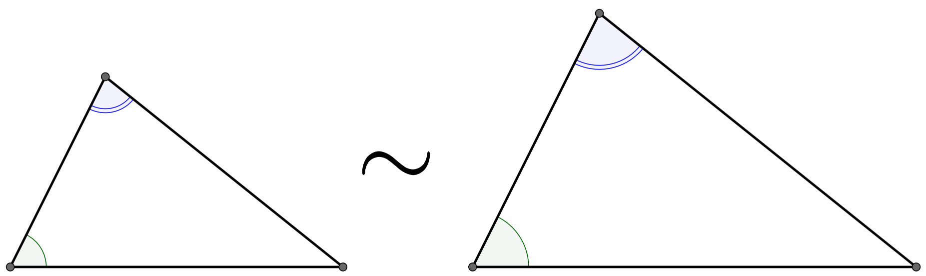
2) Углы напротив второй стороны дополняют друг друга до $180°$ $\iff$ треугольники не равны (кроме случая прямоугольного треугольника).



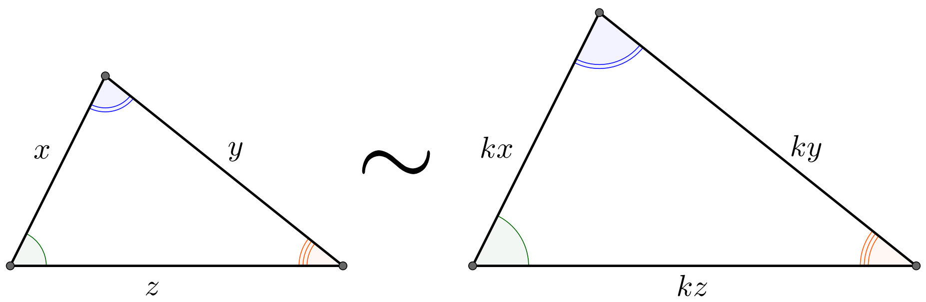
Замечание: Покажем, почему в четвёртом признаке равенства треугольников возникает два случая. Пусть длина стороны AB равна a, длина стороны BC равна b и угол при вершине C равен α. Построим два разных треугольника со сторонами a, b и углом α: построим угол α и назовем его вершину C, от вершины C отложим от одной из сторон угла отрезок, равный по длине b, его концом назовём точку B, через вершину B проведём окружность радиуса a, которая может пересечь вторую сторону угла в двух точках (назовём их A и A'). Тогда отрезки AB и $A'B$ имеют длину a, то есть мы получили два не совпадающих треугольника ABC и $A'BC$, которые имеют стороны a, b и угол α. Именно поэтому в первом признаке равенства треугольников речь идёт об угле **между** сторонами.



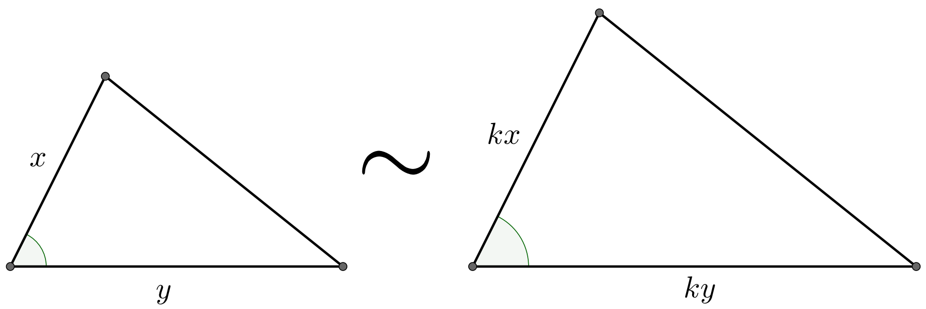
6. Первый признак подобия двух треугольников: по двум углам.



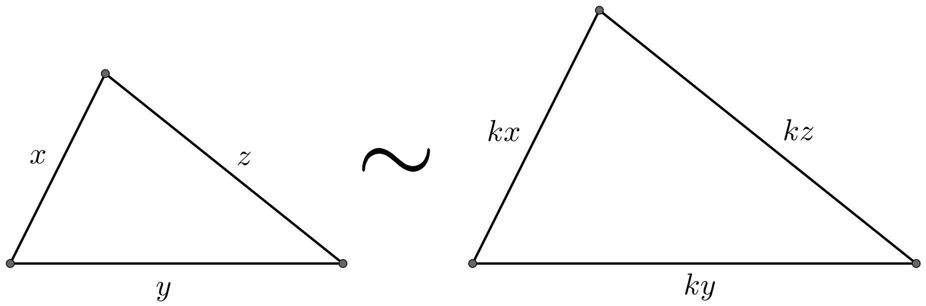
Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны, а стороны одного треугольника пропорциональны соответственным сторонам другого. Отношение k соответственных сторон подобных треугольников называется **коэффициентом подобия**.



7. Второй признак подобия двух треугольников: по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

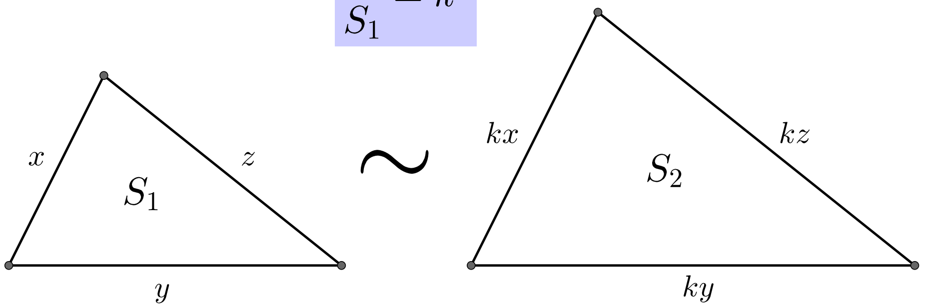


8. Третий признак подобия двух треугольников: по трём пропорциональным сторонам.

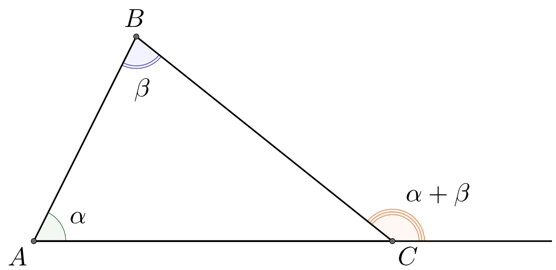


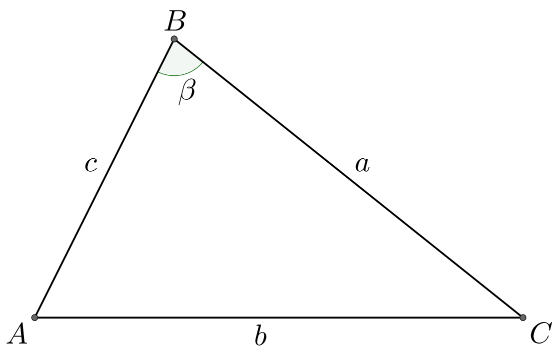
9. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2$$

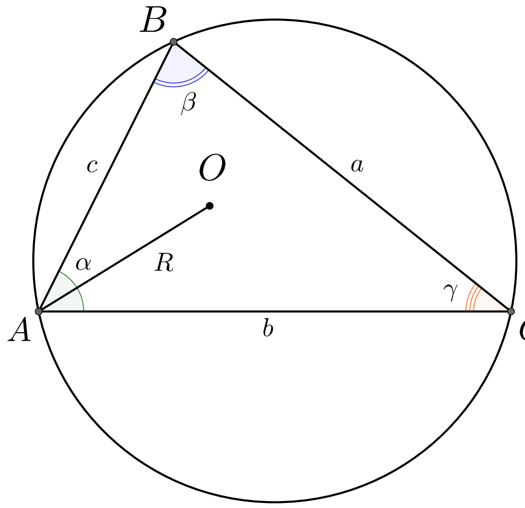


10. Теорема о внешнем угле треугольника: внешний угол треугольника равен сумме двух, не смежных с ним, внутренних углов треугольника.



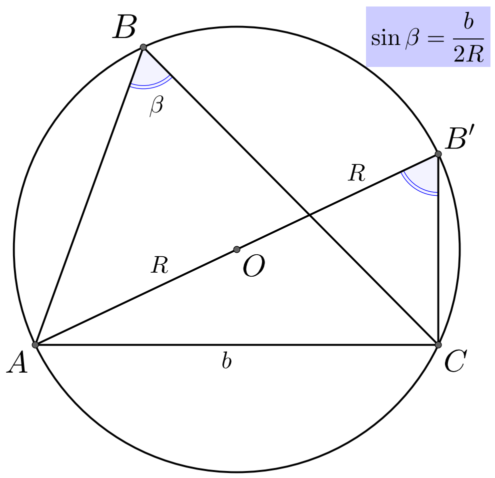


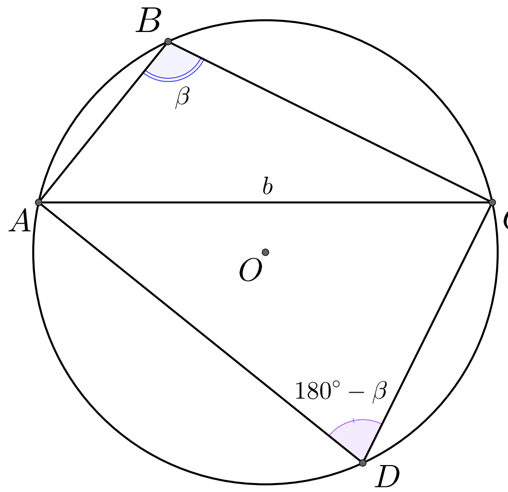
13. Теорема синусов: $2R = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.



Замечание 1: Чаще всего мы используем теорему синусов для нахождения радиуса описанной окружности.

Замечание 2: А еще мы используем теорему синусов, если знаем в треугольнике два угла и одну сторону и хотим найти еще одну сторону.



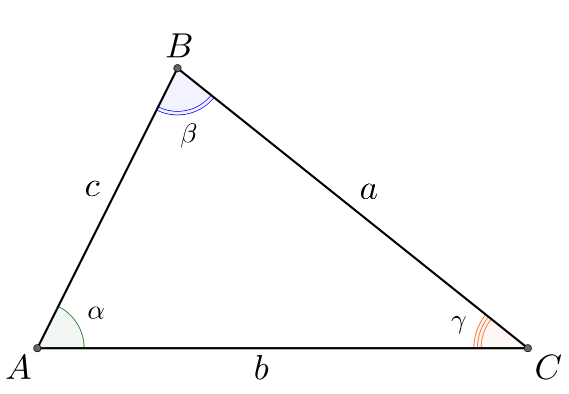


14. Теорема косинусов утверждает, что в произвольном треугольнике верны соотношения:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$;

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.



Теорема косинусов позволяет:

1) Найти одну из сторон треугольника, если известны две другие стороны и угол между ними: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$.

2) Найти угол треугольника, если известны все стороны треугольника. $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

3) Найти одну из сторон треугольника, если известные две стороны и угол не между ними из квадратного уравнения (в этом случае решений может быть два): $a^2-2ac\cos\beta+c^2-b^2=0$ (в данном случае мы знаем стороны b, c и угол между сторонами a и c).

Замечание: Теорема Пифагора – это частный случай теоремы косинусов, действительно, если c – гипотенуза, a, b – катеты, получаем $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos 90^0 = a^2+b^2$, так как $\cos 90^\circ = 0$.

15. Пусть c – большая сторона треугольника, тогда

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma \iff \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

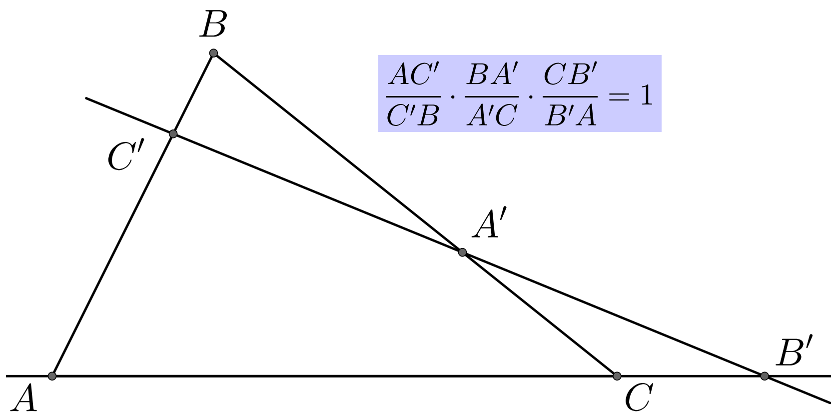
Знаменатель всегда положителен, поэтому знак косинуса зависит только от числителя:

1) если $c^2 > a^2+b^2$, то $\cos\gamma < 0$, значит треугольник тупоугольный;

2) если $c^2 = a^2+b^2$, то $\cos\gamma = 0$ треугольник прямоугольный;

3) если $c^2 < a^2+b^2$, то $\cos\gamma > 0$, значит угол γ – острый. Так как γ лежит напротив бОльшей стороны, то γ самый большой угол в треугольнике, а значит треугольник остроугольный.

16. **Теорема Менелая.** Пусть прямая пересекает треугольник ABC, причем C' – это точка ее пересечения со стороной AB, A' – точка ее пересечения со стороной BC и B' – точка ее пересечения с продолжением стороны AC. Тогда имеет место соотношение:

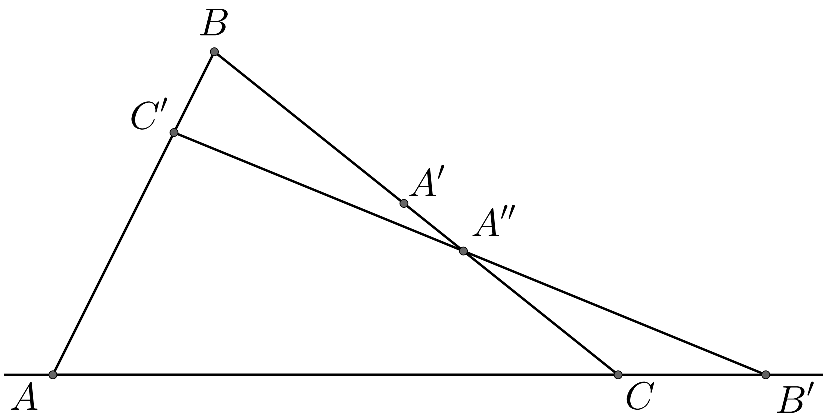


Обратно, пусть точки A', B', C' лежат на сторонах треугольника или на их продолжениях, тогда если верно соотношение

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1,$$

то точки A', B', C' лежат на одной прямой.

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA''}{A''C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1.$$



Замечание 1. Теорему очень легко запомнить, используя следующее мнемоническое правило: «Вершина → точка; точка → вершина», т.е. вначале мы выбираем стартовую вершину (в нашем случае это вершина A) и идем из нее в точку пересечения прямой и стороны треугольника, выходящей из вершины A (в нашем случае в C'), из нее во вторую вершину треугольника на этой стороне (в нашем случае B) и т.д.

Замечание 2. Если бы из A мы пошли в B', ничего бы не изменилось. Наша теорема выглядела бы так:

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1.$$

Чевианой будем называть любой отрезок, соединяющий вершину треугольника с противоположной стороной.

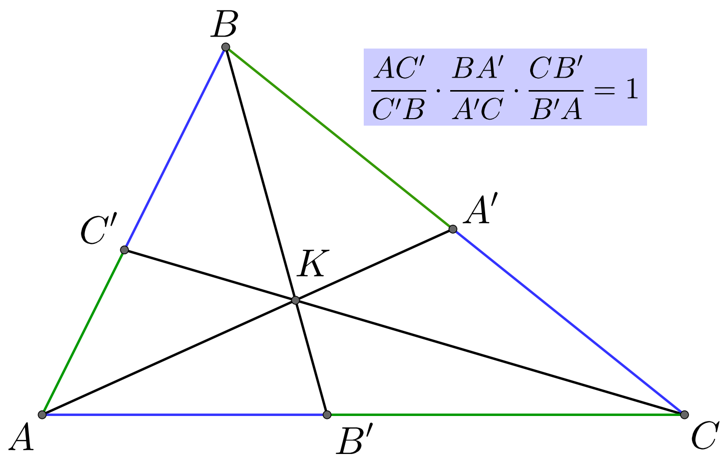
17. **Теорема Чевы**. Если три чевианы AA', BB', CC', проведённые из разных вершин треугольника, пересекаются в одной точке, то выполнено соотношение:

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1.$$

Обратно, если выполнено соотношение

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1,$$

то чевианы пересекаются в одной точке.

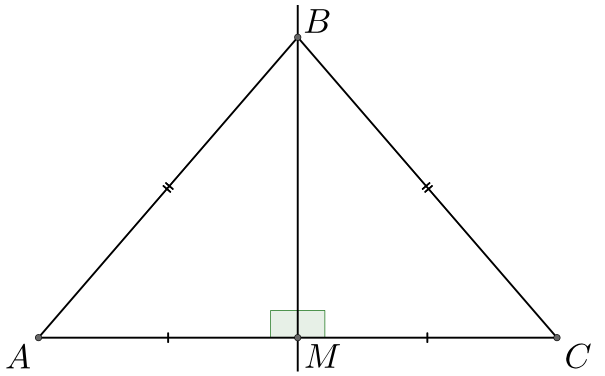


Замечание. Теорему Чевы можно запомнить ровно так же, как и теорему Менелая: то есть вначале мы выбираем стартовую вершину (в нашем случае это вершина A) и идем из нее в точку пересечения прямой и стороны треугольника, выходящей из вершины A (в нашем случае в C'), из нее во вторую вершину треугольника на этой стороне (в нашем случае B) и т.д.

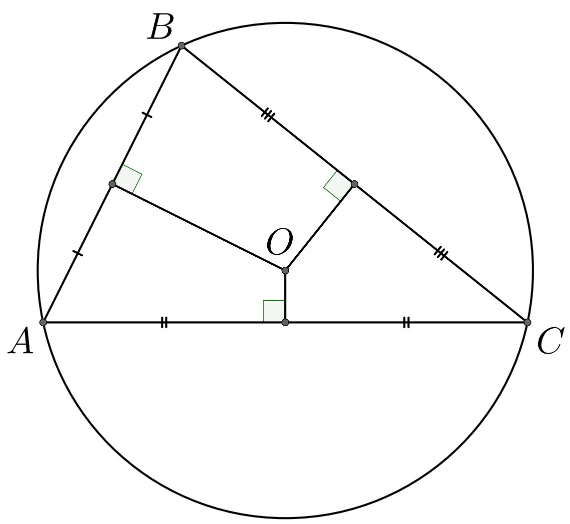
Прямая, перпендикулярная данному отрезку и проходящая через его середину, называется **серединным перпендикуляром**.

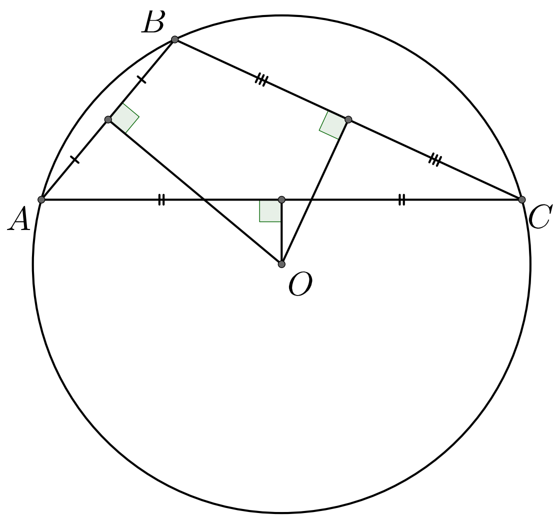
18. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре.

Обратно, если точка лежит на серединном перпендикуляре, то она равноудалена от концов отрезка.



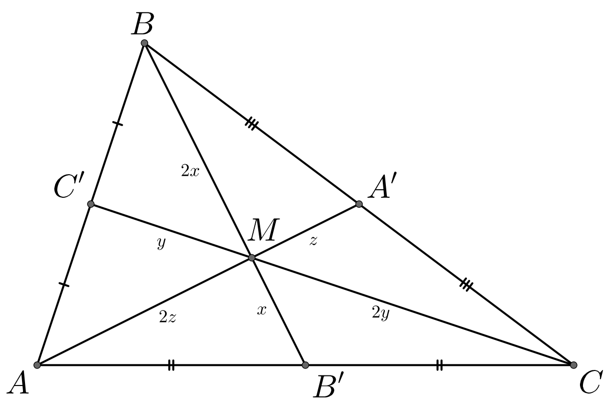
19. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Данная точка является центром описанной вокруг треугольника окружности.





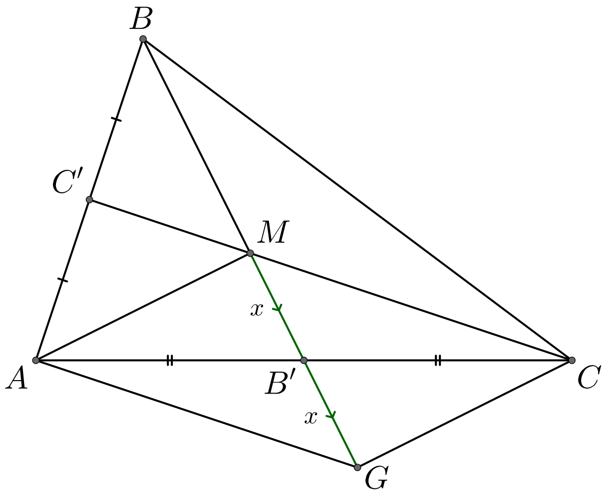
Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

20. Медианы треугольника пересекаются в одной точке. Точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника.

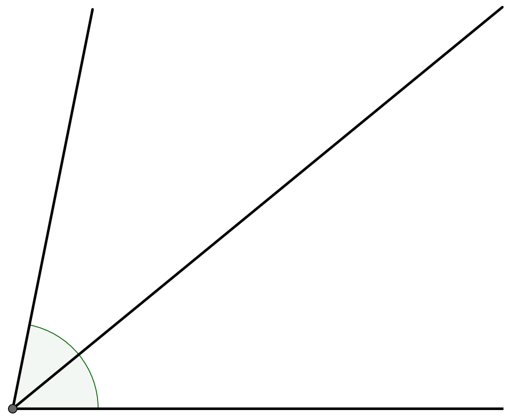


Замечание: Данный факт также можно доказать при помощи теоремы Менелая. Возьмём треугольник ABB' и прямую CC', тогда по теореме Менелая получим:

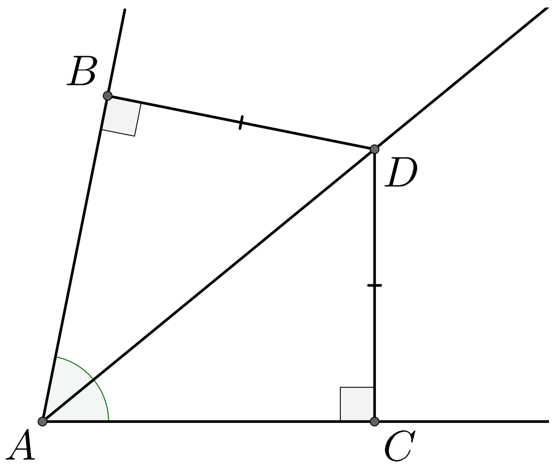
$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BM}{MB'}\cdot\frac{B'C}{CA}=1 \implies \frac{BM}{MB'}\cdot\frac{1}{2}=1 \implies \frac{BM}{MB'}$$



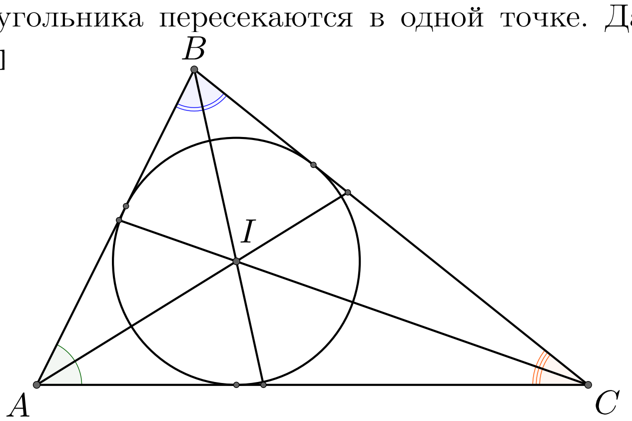
Биссектрисой называется луч, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных угла.
Биссектрисой треугольника называют отрезок биссектрисы одного из углов треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.



21. Точка лежащая на биссектрисе равноудалена от сторон угла.
Обратно, точка равноудалённая от сторон угла лежит на биссектрисе этого угла.

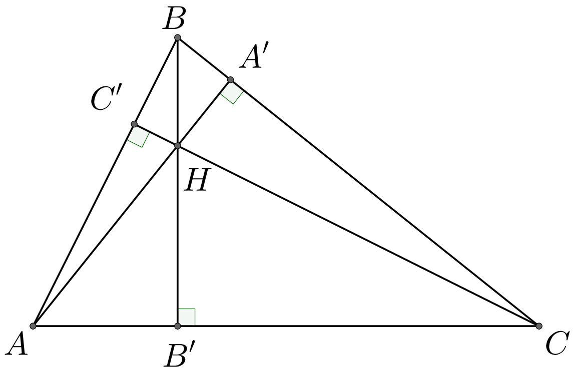


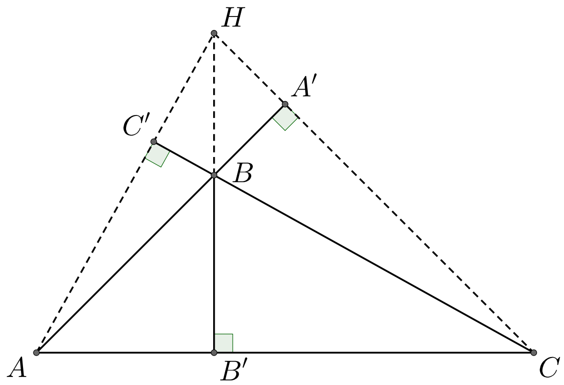
22. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Данная точка является центром вписанной в т



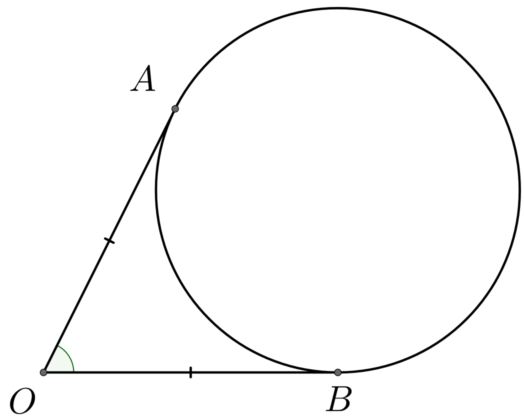
Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону.

23. Высоты треугольника пересекаются в одной точке. Данная точка называется **ортоцентром** треугольника.

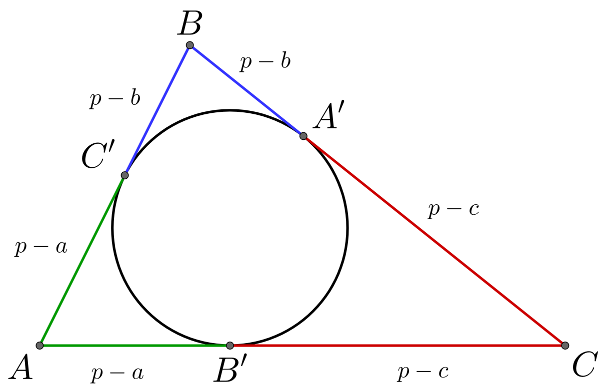




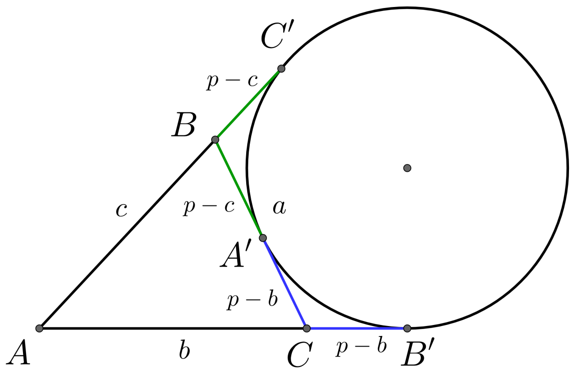
Калиткой будем называть отрезок, соединяющий вершину угла с точкой касания вписанной в этот угол окружности (это не устоявшийся термин, его не следует использовать на ЕГЭ).



24. Пусть дан треугольник ABC, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ и $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Тогда калитка угла A имеет длину $p - a$, калитка угла B имеет длину $p - b$ и калитка угла C имеет длину $p - c$.

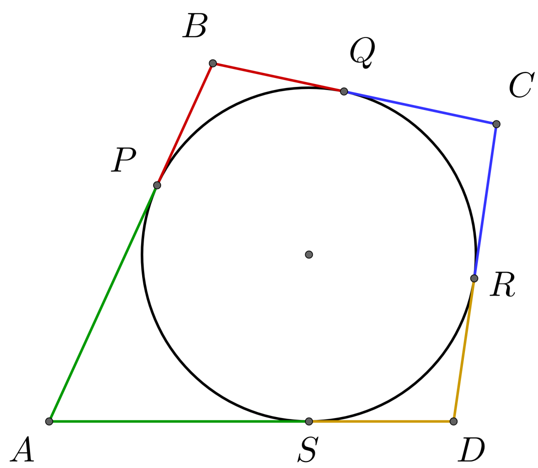


25. Пусть дана вневписанная окружность, касающаяся стороны BC треугольника ABC. Тогда калитка угла A равна p; калитка угла, смежного с углом C, равна $p-b$; калитка угла, смежного с углом B, равна $p-c$.



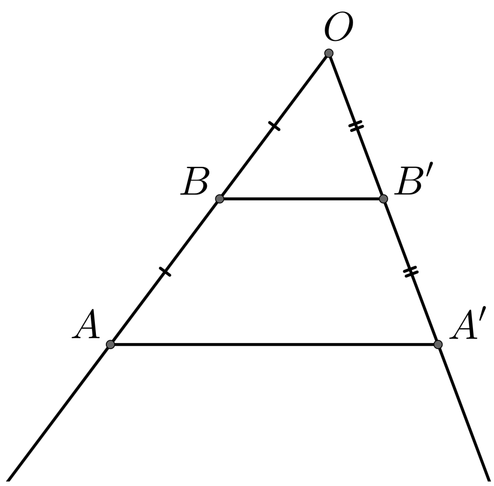
26. Пусть в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, тогда $AD+BC=AB+CD$. Действительно, в суммы $AD+BC$ и $AB+CD$ калитка каждого угла четырёхугольника входит ровно один раз.

Обратно: Если суммы противоположных сторон четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.



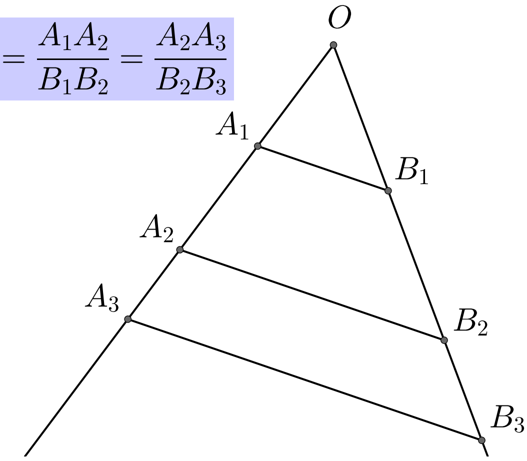
26. **Теорема Фалеса**. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла будут высечены также равные отрезки.

27. **Обратная теорема Фалеса**. Если прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на обеих из них равные между собой отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.



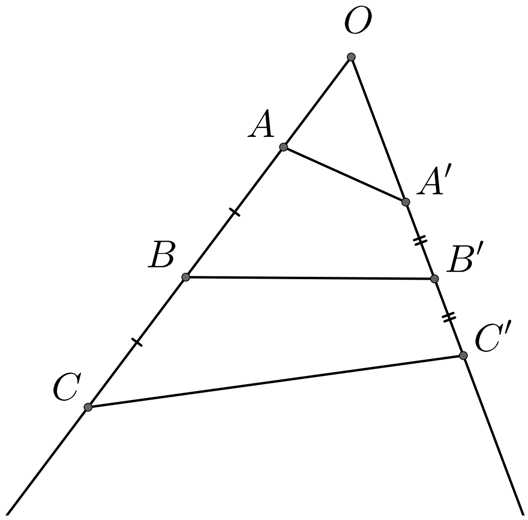
28. **Обобщенная теорема Фалеса**. Если на одной из сторон угла последовательно отложить отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то прямые отсекут на другой стороне угла, отрезки, пропорциональные отрезкам на первой стороне.

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$$



29. **Обратная обобщённая теорема Фалеса**. Если прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на обеих из них пропорциональные между собой отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.

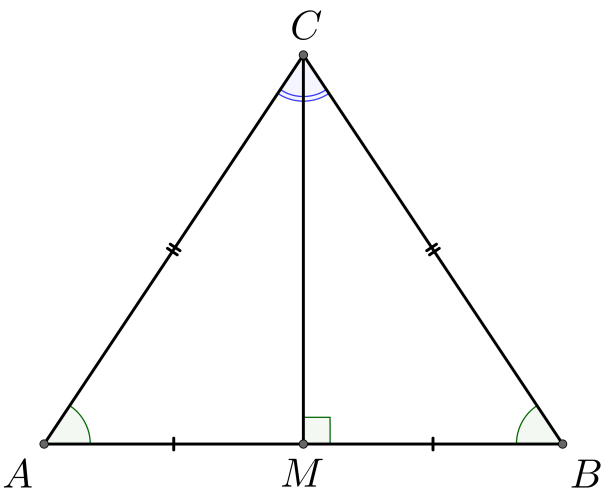
Замечание: очень важно, что пропорциональные (равные) отрезки должны начинаться от вершины угла, иначе обратные теоремы не будут работать.



30. Равнобедренный треугольник – это треугольник, у которого две стороны равны. Эти стороны называются боковыми, а третья сторона – основанием. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

$$AC = BC$$
$$\angle A = \angle B$$

Биссектриса, проведенная из вершины равнобедренного треугольника к основанию, является медианой и высотой.



Замечание:

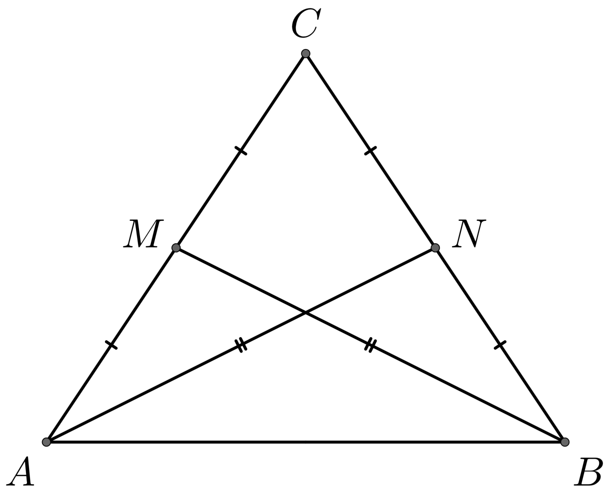
1) Если в треугольнике биссектриса совпадает с медианой, то он равнобедренный.

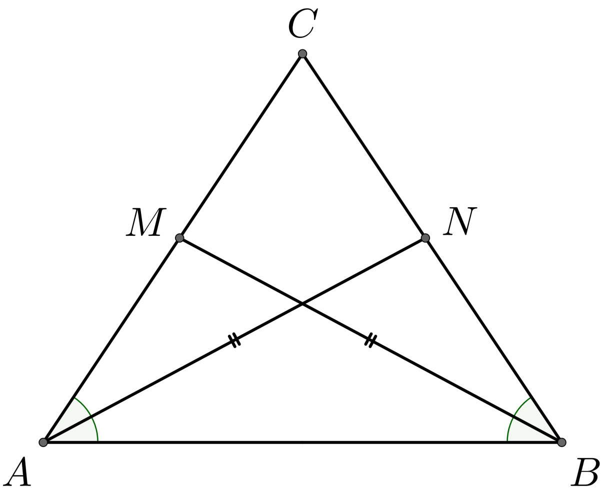
2) Если в треугольнике медиана совпадает с высотой, то он равнобедренный.

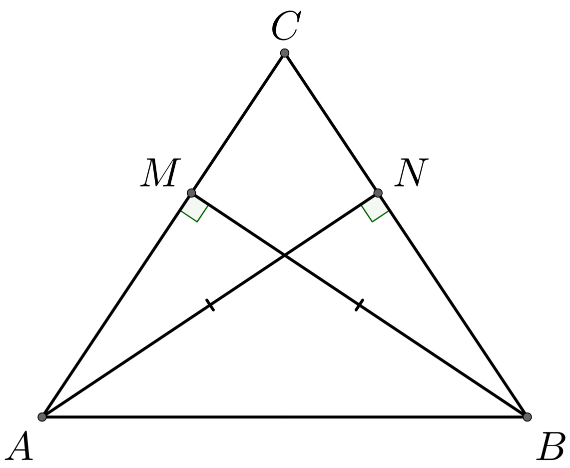
3) Если в треугольнике высота совпадает с биссектрисой, то он равнобедренный.

Замечание: Если углы при основании равны, то треугольник равнобедренный.

30. В равнобедренном треугольнике высоты, медианы и биссектрисы, проведённые из вершин основания, равны.







Замечание: Верны и обратные утверждения:

1) Если в треугольнике две медианы равны, то треугольник равнобедренный.

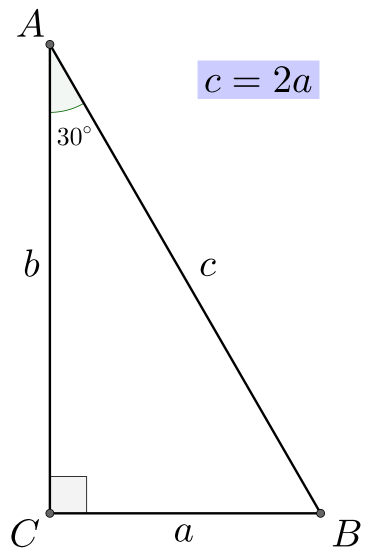
2) Если в треугольнике две высоты равны, то треугольник равнобедренный.

3) Если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный.

Первые два утверждения очевидны, а третье не имеет простого доказательства и называется теоремой Штейнера-Лемуса.

3 Прямоугольный треугольник

1. Напротив угла в 30° лежит катет, равный половине гипотенузы: если $\alpha = 30^\circ$, тогда $2a = c$.



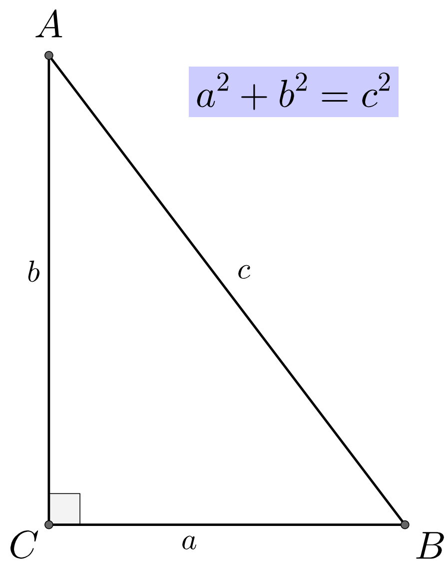
Замечание: Если в прямоугольном треугольнике катет в два раза меньше гипотенузы, то против этого катета угол 30°.

Замечание: Если сторона против угла 30° вдвое меньше прилежащей к углу стороне, то треугольник прямоугольный (это не школьная теорема).

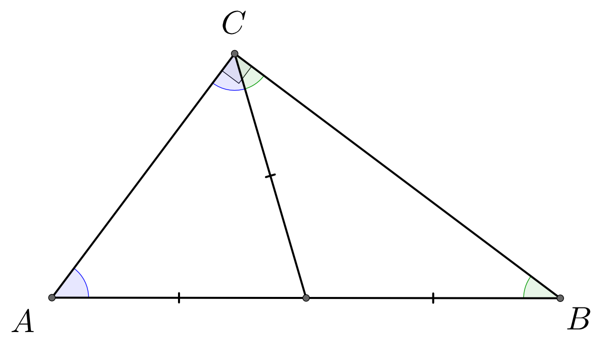
2. Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

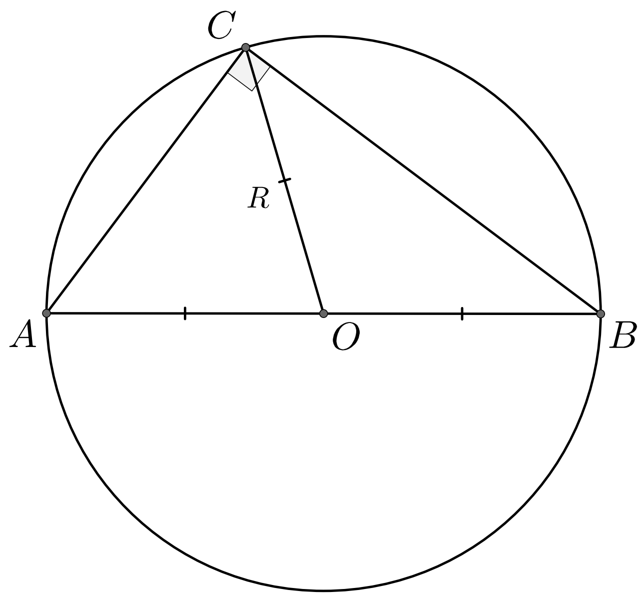
3. Если в треугольнике ABC со сторонами a, b, c верно, что $a^2 + b^2 = c^2$, то угол, лежащий напротив стороны c, равен 90° (Обратная теореме Пифагора).



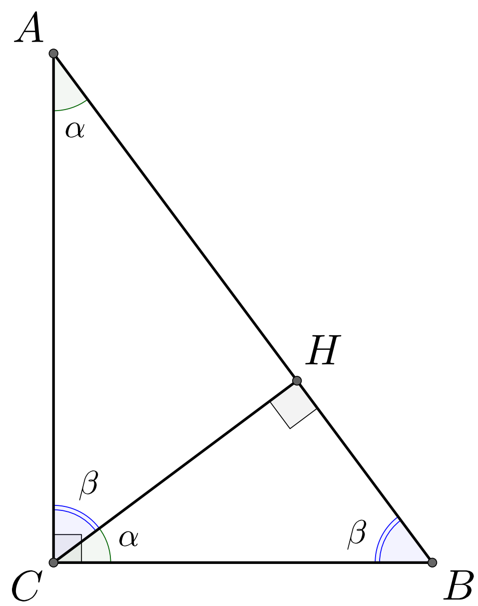
4. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.
Верно и обратное: если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то эта медиана исходит из вершины прямого угла. То есть наш треугольник – прямоугольный.



5. Гипотенуза является диаметром, а ее середина – центром окружности, описанной вокруг данного прямоугольного треугольника.



6. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол $\angle C$ – прямой), CH – высота, тогда треугольники ABC, ACH, CBH подобны.

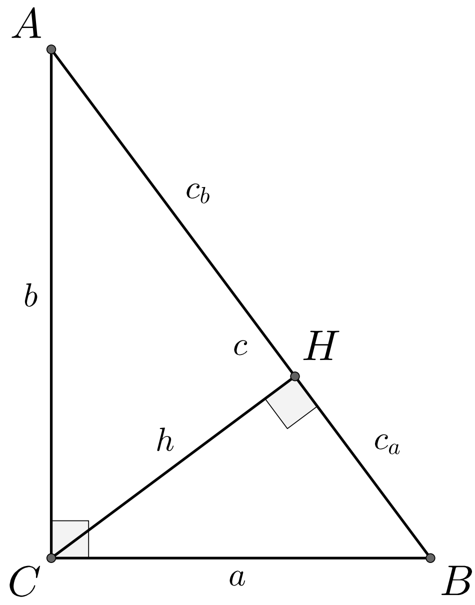


7. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, вычисляется по формуле:

$$h = \frac{ab}{c} \quad \text{или} \quad h^2 = c_a c_b.$$

Также верны следующие соотношения:

$$c_a c = a^2 \quad \text{или} \quad c_b c = b^2$$



А также:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC} \quad \text{или} \quad \frac{b}{c} = \frac{c_b}{b} \quad \Longrightarrow c_b c = b^2.$$

Из подобия треугольников ACH и CBH получаем:

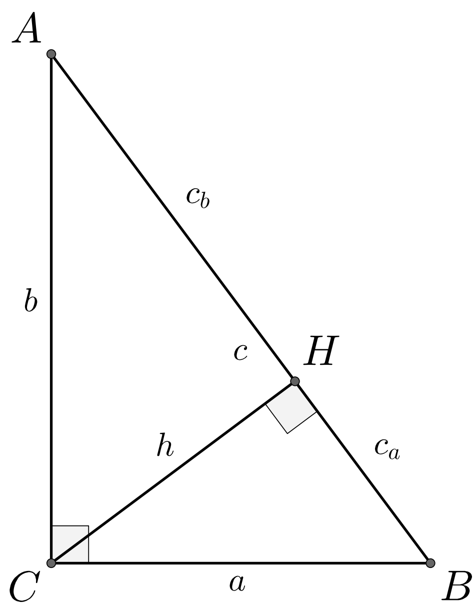
$$\frac{CH}{AH} = \frac{HB}{CH} \quad \text{или} \quad \frac{h}{c_b} = \frac{c_a}{h} \quad \Longrightarrow h^2 = c_a c_b.$$

Из подобия ABC и CBH следует:

$$\frac{CB}{AB} = \frac{HB}{CB} \quad \text{или} \quad \frac{a}{c} = \frac{c_a}{a} \Longrightarrow c_a c = a^2. \quad \square$$

8. Пусть x_a, x_b, x_c – соответственные линейные элементы прямоугольных треугольников с гипотенузами a, b, c соответственно, тогда

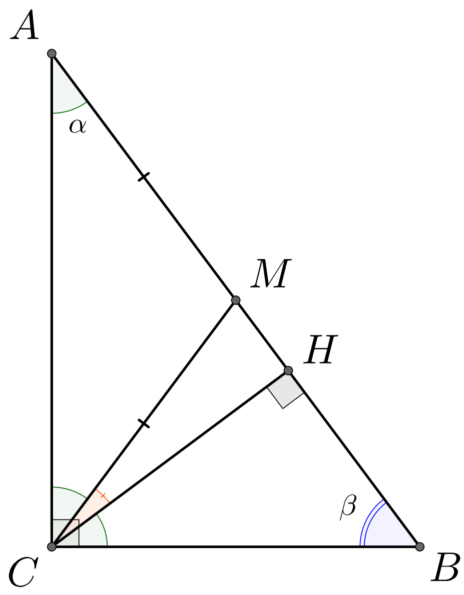
$$x_a^2 + x_b^2 = x_c^2.$$



Замечание: Обратите внимание, что это могут быть как отдельные соответственные элементы, так и их линейные комбинации: I_a, I_b, I_c; p_a, p_b, p_c; $r_a + R_a$, $r_b + R_b$, $r_c + R_c$ и т.д. Например, пусть p_a, p_b, p_c – полупериметры соответственно треугольников CBH, ACH, ABC, тогда $p_a^2 + p_b^2 = p_c^2$.

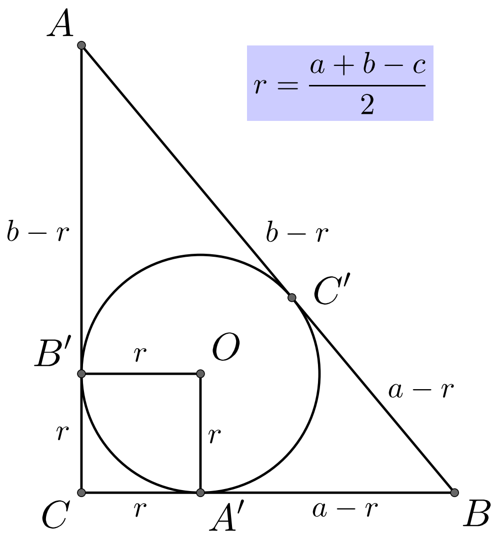
Если r_a, r_b, r_c – радиусы вписанных окружностей, R_a, R_b, R_c – радиусы описанных окружностей треугольников CBH, ACH, ABC, тогда $(r_a+R_a)^2+(r_b+R_b)^2=(r_c+R_c)^2$.

9. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведенными из прямого угла, равен разности острых углов треугольника.



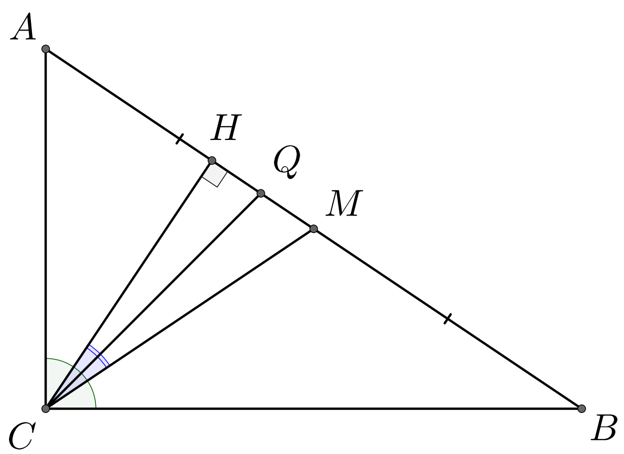
10. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен

$$r=\frac{a+b-c}{2}.$$



11. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла является также биссектрисой треугольника, образованного высотой, медианой и отрезком гипотенузы.

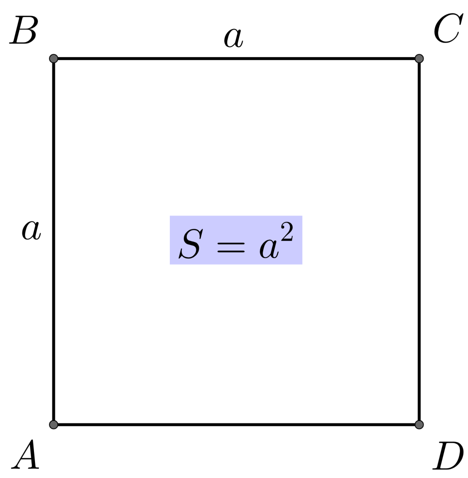
Верно и обратное: если в треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и медианой, исходящими из того же угла, то такой треугольник является прямоугольным.



4 Площади

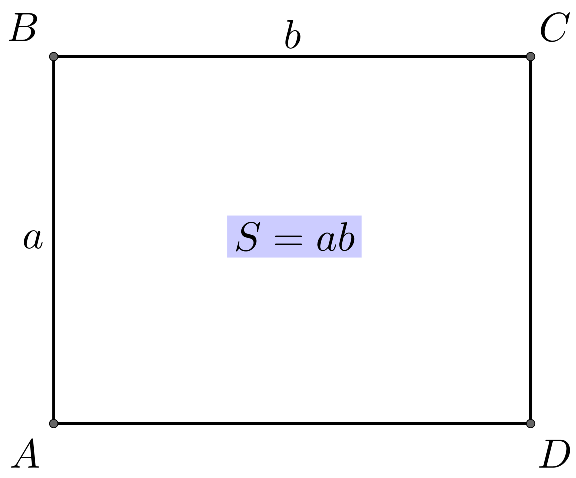
1. Если a – длина стороны квадрата, то его площадь можно найти по формуле:

$$S = a^2.$$



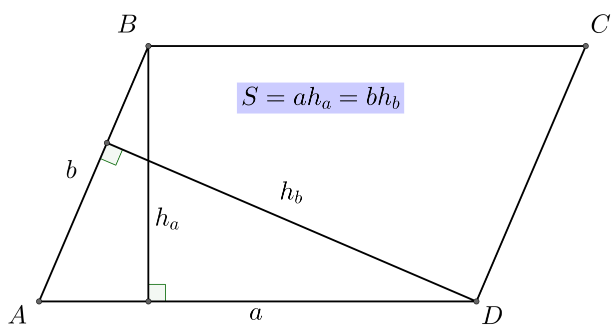
2. Если a и b – длины сторон прямоугольника, то его площадь можно найти по формуле:

$$S = ab.$$



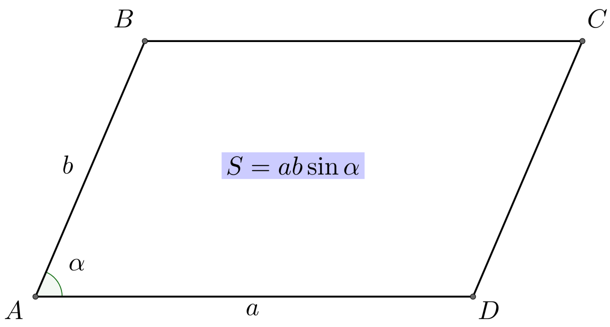
3. Если a и b – длины сторон параллелограмма, h_a и h_b – длины высот параллелограмма, тогда можно найти площадь по формулам:

$$S = ah_a = bh_a$$



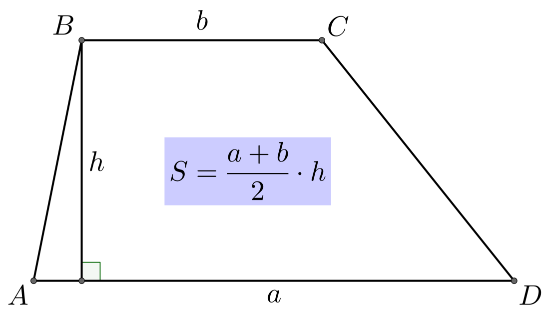
4. Если a и b – длины сторон параллелограмма, α – угол между этими сторонами, тогда мы можем найти площадь параллелограмма по формуле:

$$S = ab\sin\alpha.$$



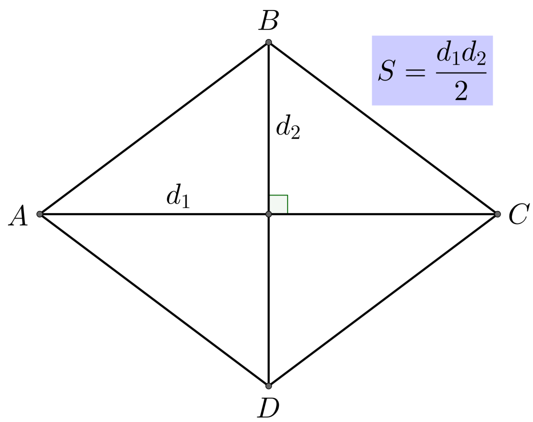
5. Если a и b – длины сторон основания трапеции, h – длина высота трапеции, тогда мы можем найти площадь по формуле:

$$S = \frac{a+b}{2}\cdot h.$$



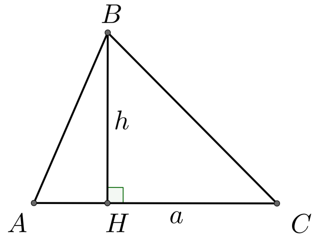
6. Если d_1 и d_2 – длины диагоналей ромба, тогда площадь мы можем найти по формуле:

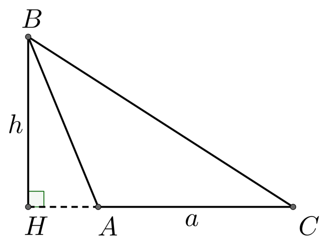
$$S = \frac{d_1 d_2}{2}.$$



7. Если a – длина стороны треугольника, h – длина высоты, проведённой к данной стороне, тогда площадь треугольника мы можем найти по формуле:

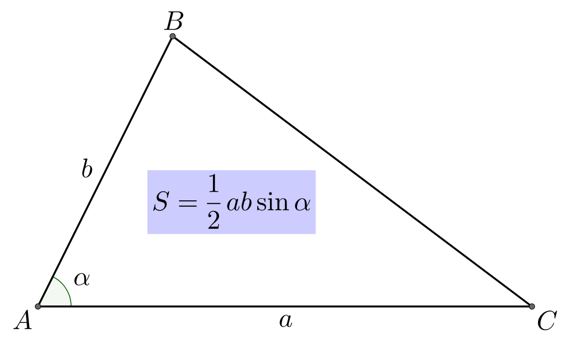
$$S = \frac{ah}{2}.$$





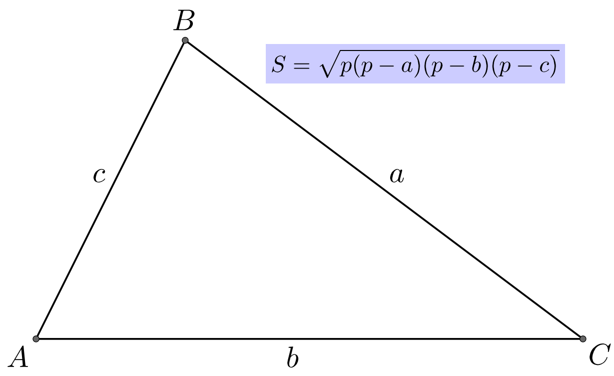
8. Если a, b – длины сторон треугольника, α – угол между этими сторонами, тогда площадь треугольника мы можем найти по формуле:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha.$$



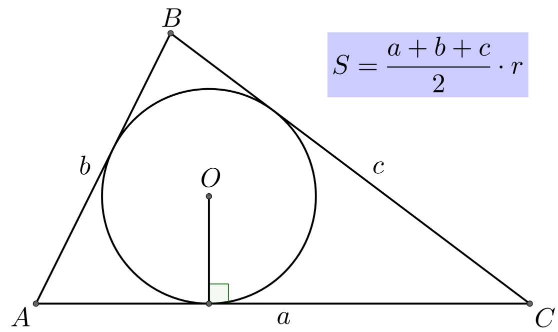
9. Если a, b, c – длины сторон треугольника, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр треугольника, тогда площадь треугольника ABC мы можем найти по **формуле Герона**:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



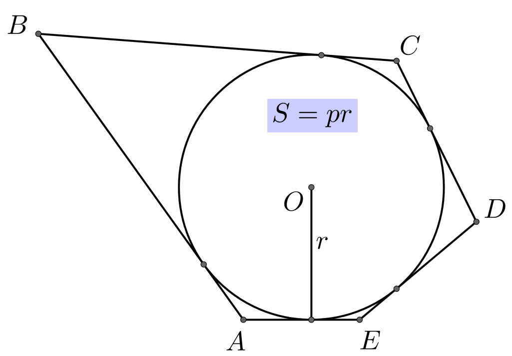
10. Если p – полупериметр треугольника, r – длина радиуса окружности, вписанной в данный треугольник, тогда площадь мы можем найти по формуле:

$$S = pr.$$



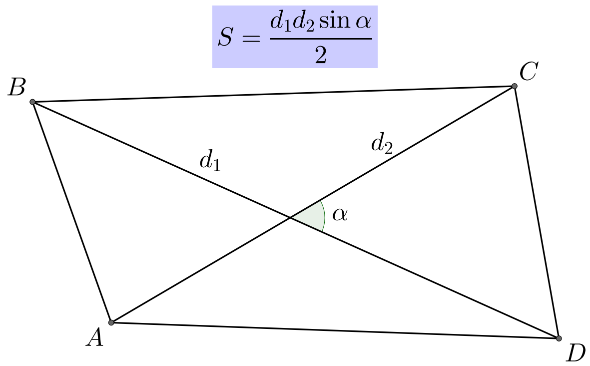
11. Если p – полупериметр многоугольника, r – длина радиуса окружности, вписанной в этот многоугольник, тогда его площадь можно найти по формуле:

$$S = pr.$$



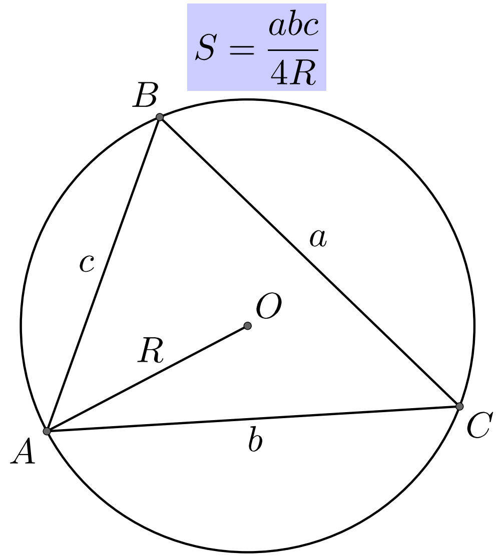
12. Если d_1, d_2 – длины диагоналей четырёхугольника $ABCD$, α – угол между этими диагоналями, тогда площадь этого четырёхугольника равна:

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}.$$



13. Если R – длина радиуса, описанной вокруг треугольника ABC, окружности, a, b, c – длины сторон треугольника ABC, тогда площадь данного треугольника можно найти по формуле:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

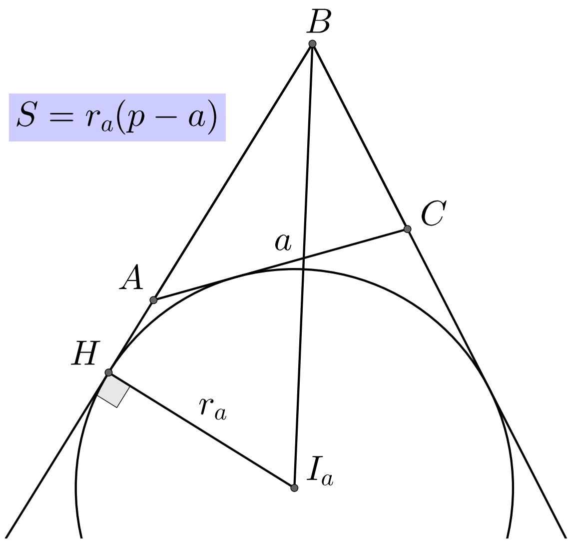


14 . Пусть p – полупериметр треугольника ABC, r_a, r_b, r_c – длины радиусов вневписанных окружностей. Тогда площадь треугольника ABC модно найти по формулам:

$$S = r_a(p-a); \quad S = r_b(p-b); \quad S = r_c(p-c).$$

Замечание: Из данных соотношений и формулы $S = p \cdot r$ (r – радиус вписанной окружности) легко получить, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

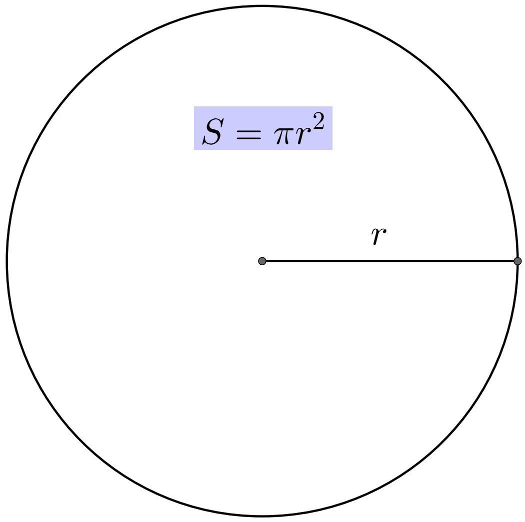


15. Из формулы Герона следует, что

$$S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}.$$

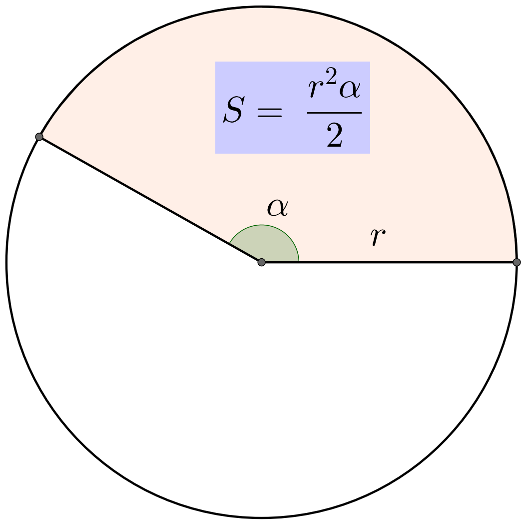
16. Площадь круга с радиусом длины r равна

$$S = \pi r^2.$$



17. Площадь сектора круга с радиусом длины r равна

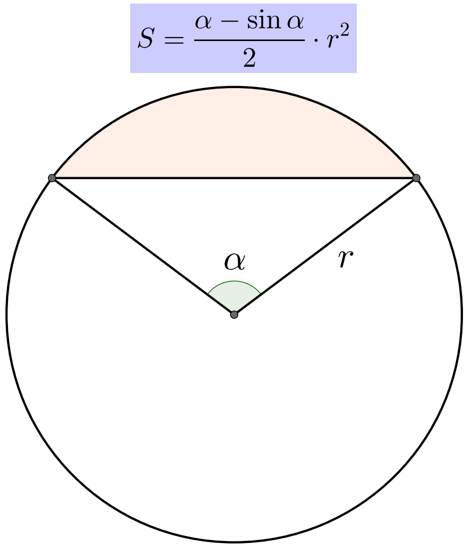
$$S = \frac{r^2 \alpha}{2}.$$



18. Площадь сегмента круга с радиусом длины r равна

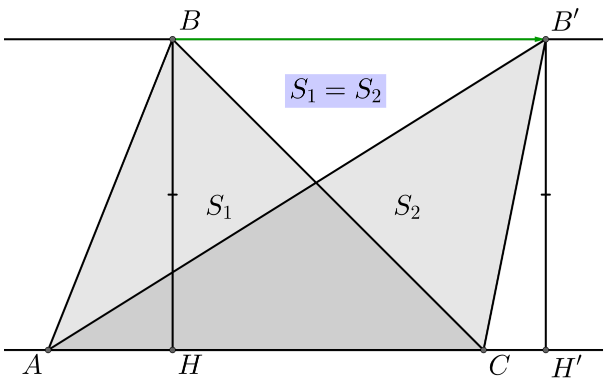
$$S = \frac{\alpha - \sin\alpha}{2} \cdot r^2.$$

Замечание: Как в этом пункте, так и в предыдущем, угол α мы считаем в радианах

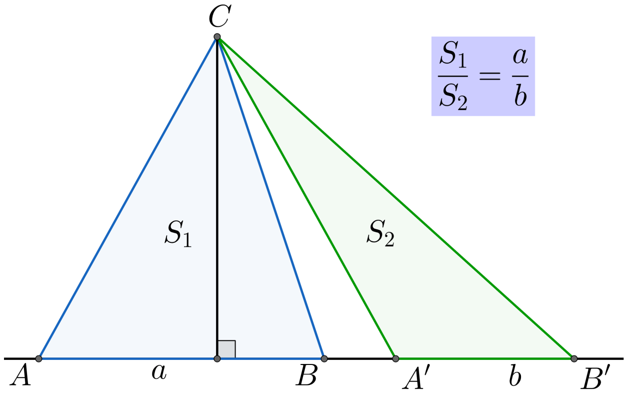


5 Свойства отношений и площадей

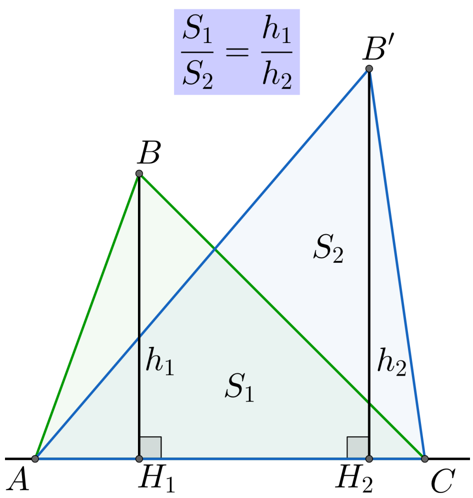
1. (Рельсы Евклида). Пусть у нас есть треугольник ABC, ℓ – прямая параллельная AC, проходящая через точку B. Отметим на ℓ точку B'. Тогда площади треугольников ABC и $AB'C$ равны.



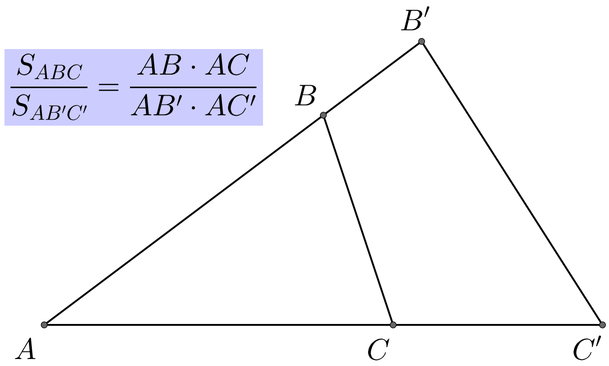
2. Площади треугольников с общей высотой относятся как длины оснований.



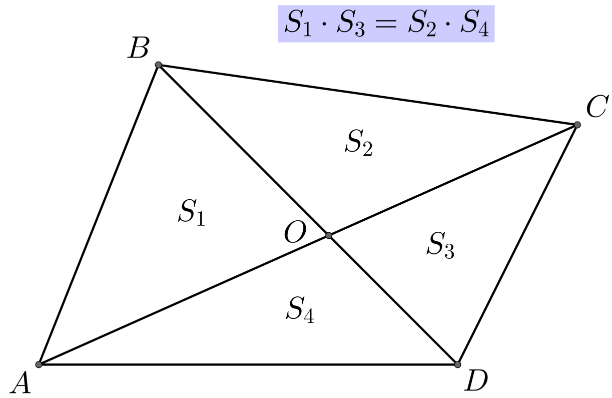
3. Площади треугольников с общим основанием относятся как высоты.



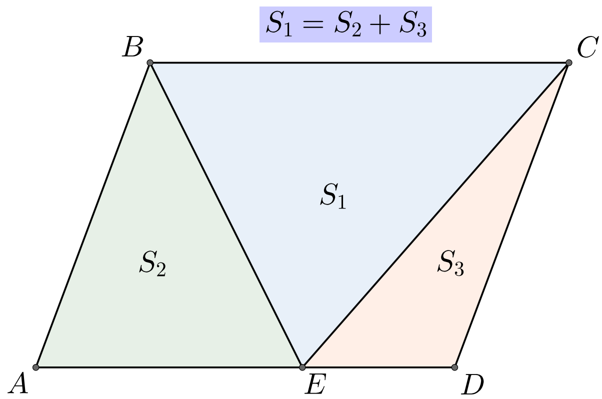
4. Площади треугольников с общим углом относятся как произведение отношений сторон, образующих общий угол.



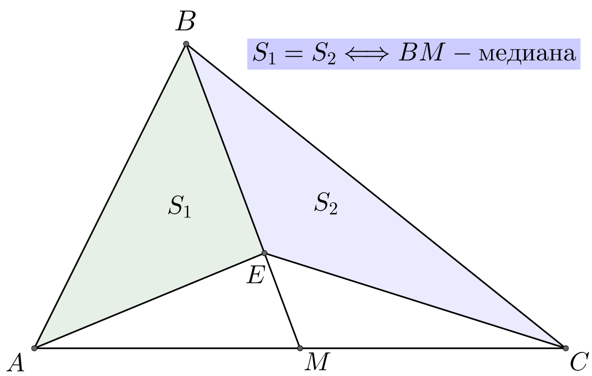
5. Диагонали четырехугольника разбивают его на 4 треугольника так, что произведения противоположных площадей равны.



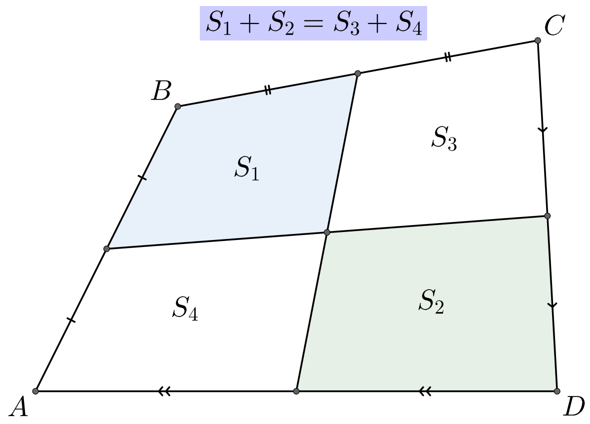
6. Пусть на стороне AB параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E, тогда $S_{CDE} = S_{ADE} + S_{CBE}$.



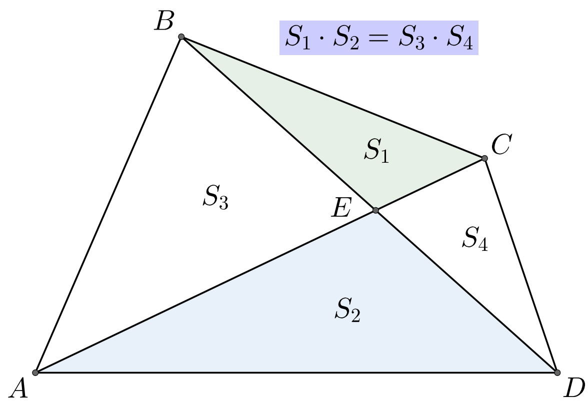
7. Пусть на стороне AC треугольника ABC отмечена точка M, на прямой AM отмечена точка E, тогда $S_{ABE} = S_{CBE} \iff BM$ – медиана.



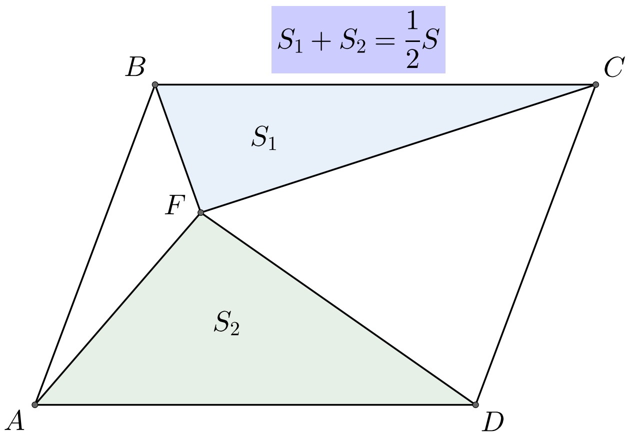
8. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ провели две прямые через середины противоположных сторон, тогда $ABCD$ разделился на 4 четырехугольника и $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$.



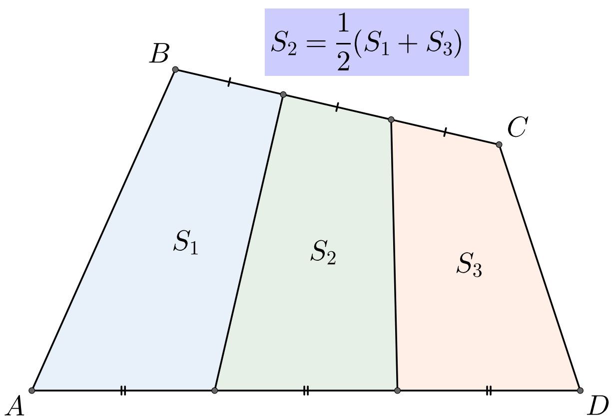
9. Пусть внутри четырехугольника $ABCD$ отметили точку E, тогда $S_{BEC} \cdot S_{AED} = S_{AEB} \cdot S_{DEC}$.



10. Пусть внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку F, тогда $S_{AFD} + S_{BFC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.



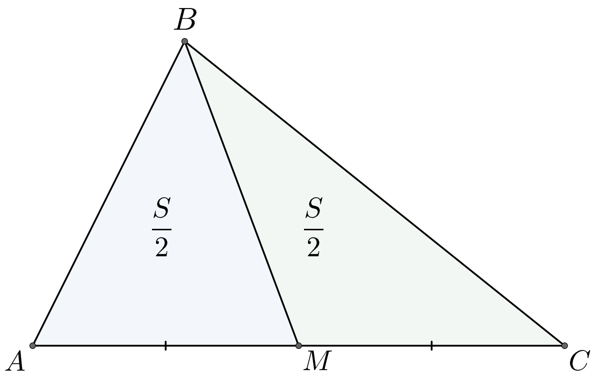
11. В четырехугольнике $ABCD$ разделим две противоположные стороны на 3 равные части, тогда $ABCD$ разделится на 3 четырехугольника и $S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_3)$.



6 Медиана

1. Медиана делит площадь треугольника на две равновеликие части, то есть пополам.

$$S_{ABM} = S_{MBC} = \frac{S}{2}.$$

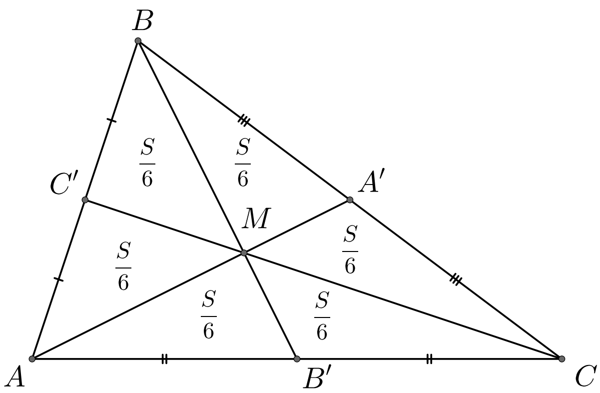


2. Медианы треугольника пересекаются в точке M – центре масс треугольника. Ещё эту точку называют **центроидом** треугольника.

3. Все три медианы делят площадь треугольника на 6 равновеликих частей.

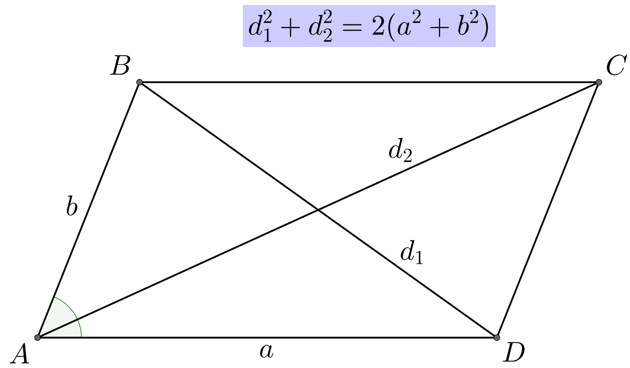
$$S_{AMC'} = S_{C'BM} = S_{MBA'} = S_{A'MC} = S_{CB'M}$$

$$= S_{MAB'} = \frac{S}{6}.$$



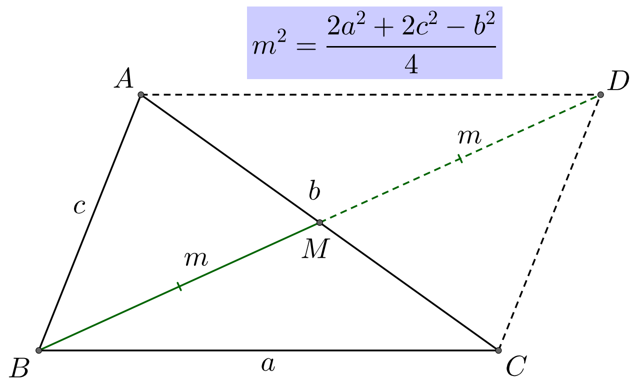
4. В параллелограмме со сторонами a, b и диагоналями d_1, d_2 выполняется **тождество параллелограмма**:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$



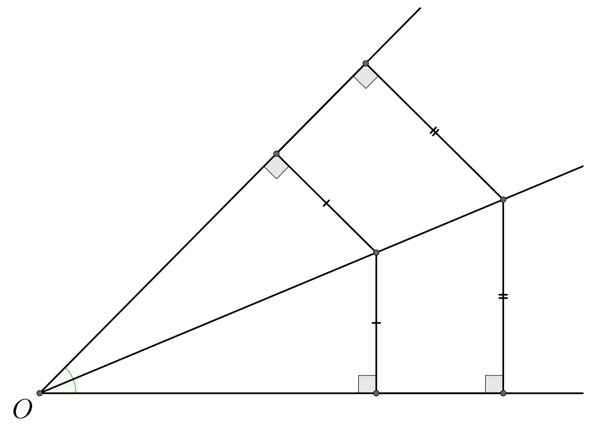
5. Формула для нахождения длины медианы:

$$m^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}.$$

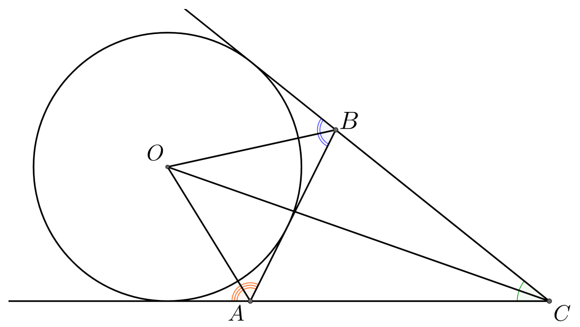


7 Биссектриса

1. Биссектриса – геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

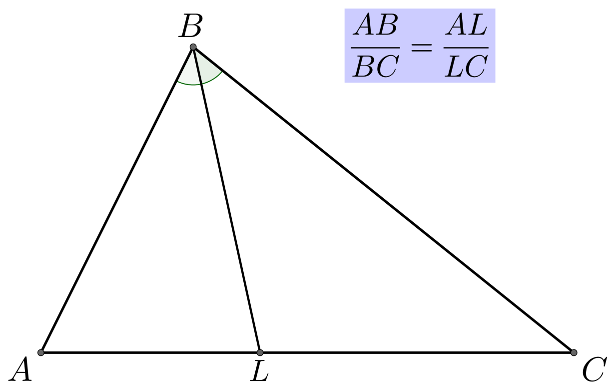


2. Биссектрисы двух внешних углов треугольника и одного внутреннего пересекаются в центре вневписанной окружности.



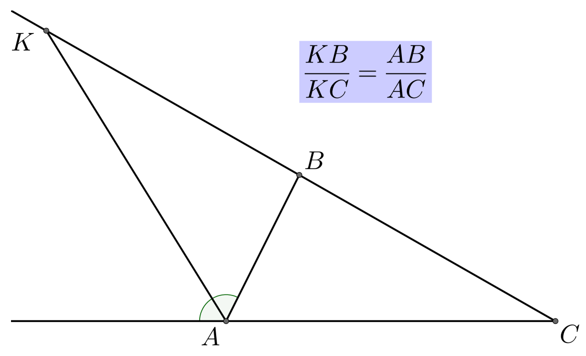
3. Биссектриса BL делит сторону AC так, что выполнено равенство:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}.$$



4. Биссектриса внешнего угла A пересекает продолжение стороны BC в точке K так, что выполнено равенство:

$$\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}.$$

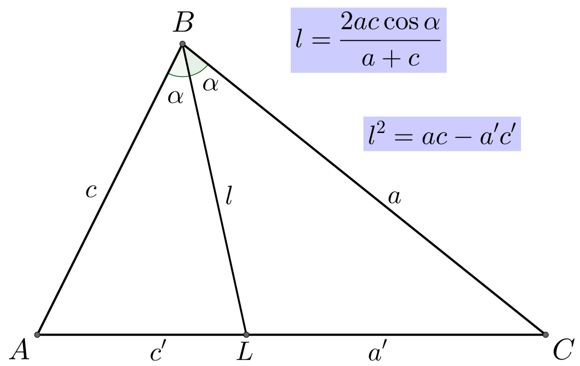


Замечание: Чтобы не путаться удобно запомнить следующее: стороны треугольника, выходящие из вершины угла из которого проведена биссектриса (не важно какая), относятся также как соответственные отрезки, выходящие из конца биссектрисы к другим вершинам.

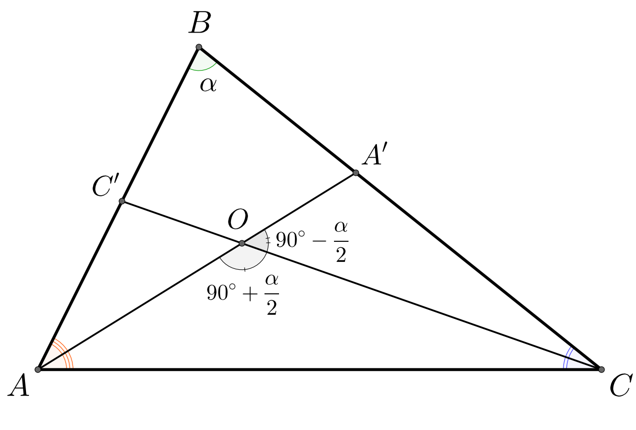
5. Формулы нахождения длины биссектрисы треугольника:

$$l = \frac{2ac\cos\alpha}{a+c};$$

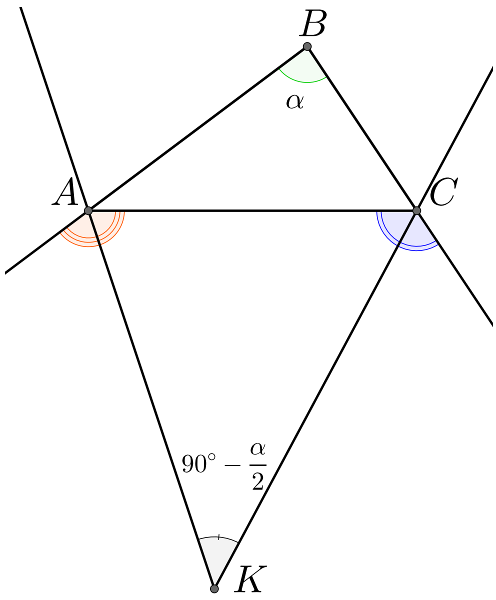
$$l^2 = ac - a'c'.$$



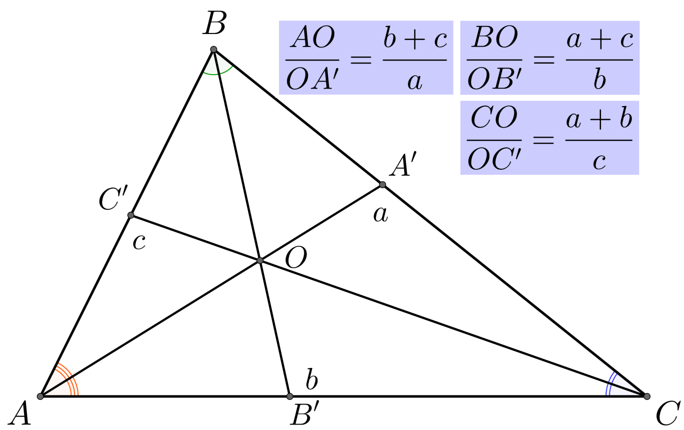
6. Угол между биссектрисами двух внутренних углов треугольника равен $90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$. Смежный ему угол равен $90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$.



7. Угол между биссектрисами 2 внешних углов треугольника равен $90° - \dfrac{\alpha}{2}$.



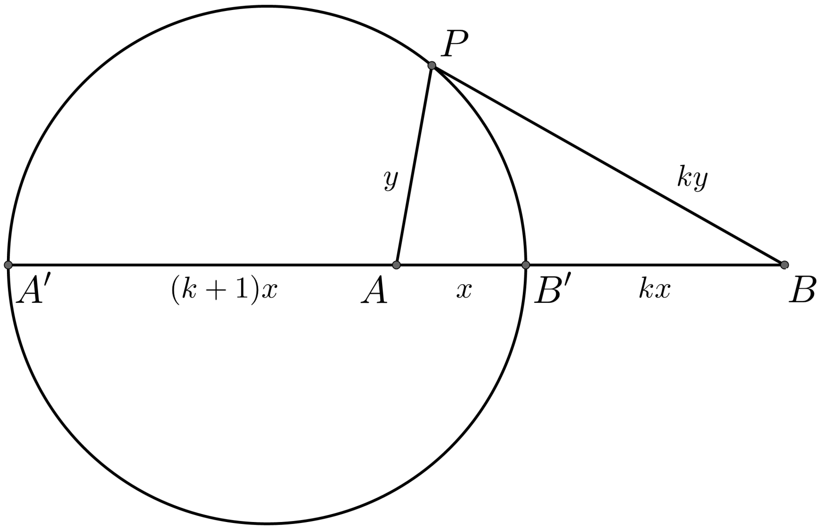
8. Биссектрисы треугольника точкой пересечения биссектрис делятся следующим образом:



9. Пусть на плоскости нам даны две точки A, B, а также $k > 0$, $k \neq 1$ – фиксированное число. Геометрическим множеством точек P таких, что

$$\frac{AP}{PB} = k$$

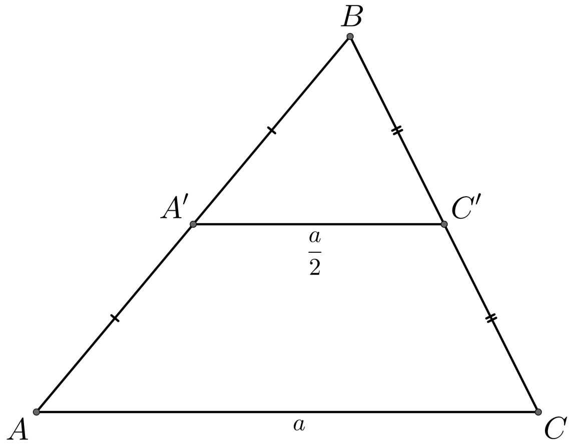
является окружность, проходящая через точки B', A'. Данная окружность называется **окружностью Апполония**.



8 Средняя линия

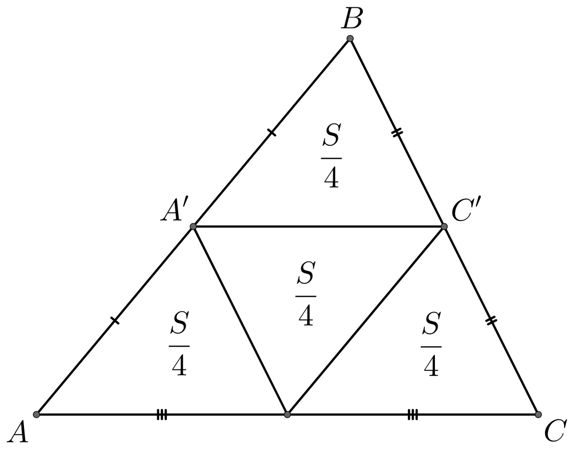
Средней линией треугольника будем называть отрезок, соединяющий середины двух сторон.

1. Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.



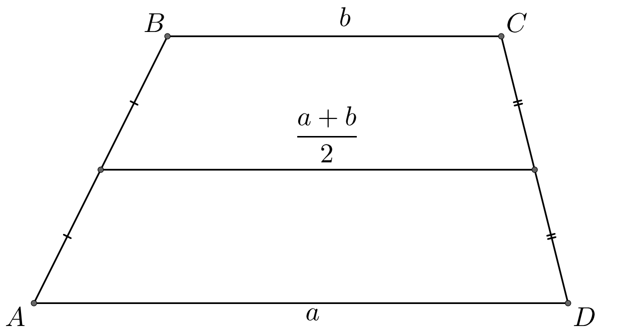
2. Средняя линия $A'C'$ треугольника ABC отсекает от него подобный треугольник $A'BC'$, причём коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$.

3. Средние линии делят треугольник на 4 равных треугольника площади $\frac{S}{4}$, где S – площадь исходного треугольника.

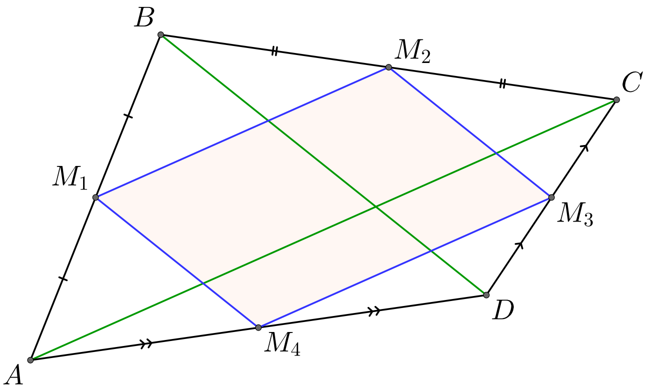


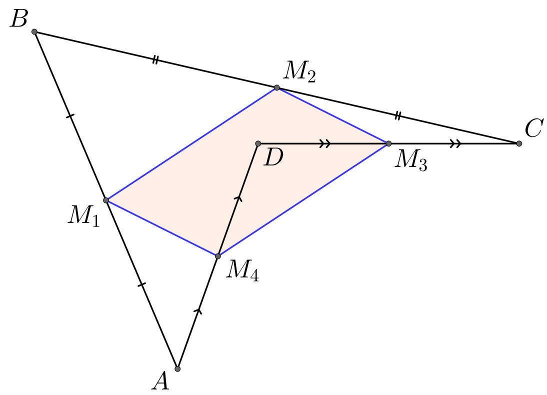
Средней линией трапеции будем называть отрезок, соединяющий середины двух боковых сторон трапеции.

4. Средняя линяя трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

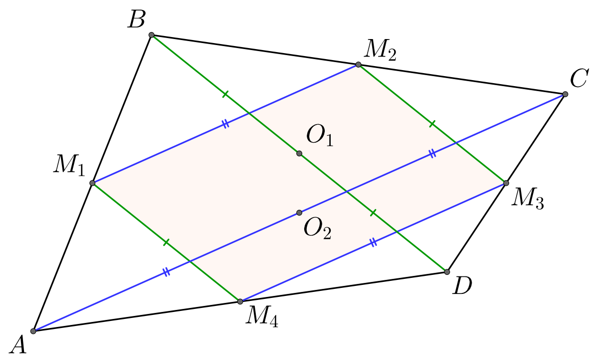


5. (**Теорема Вариньона**)
Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного четырехугольника (не обязательно выпуклого), является параллелограммом, площадь которого вдвое меньше площади четырехугольника. Полученный параллелограмм будем называть **параллелограммом Вариньона**.

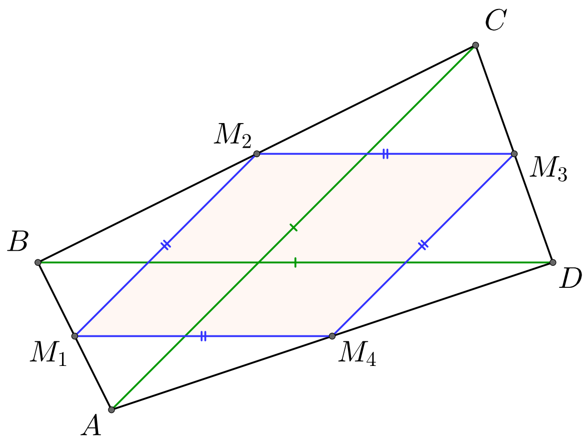




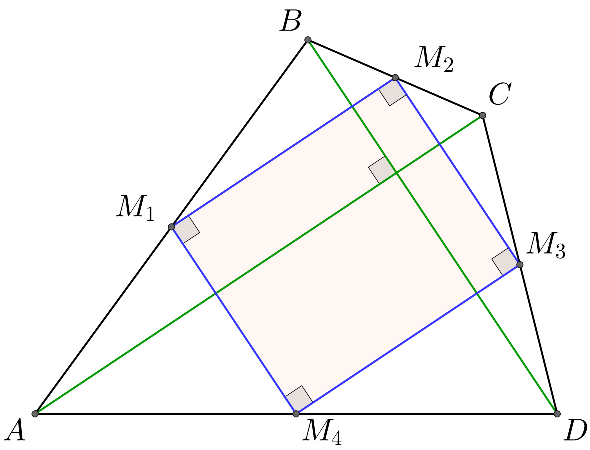
6. Стороны получившегося параллелограмма равны половинкам диагоналей исходного четырехугольника.



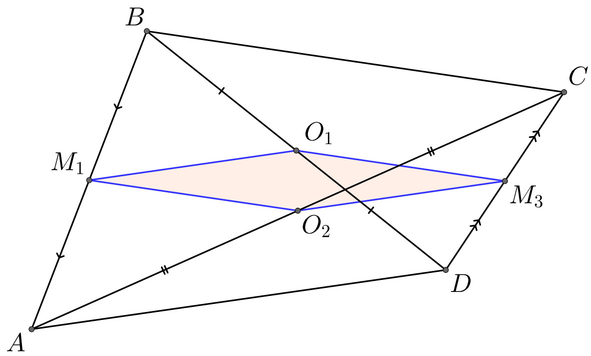
7. Если диагонали исходного четырехугольника равны, то параллелограмм Вариньона становится ромбом.



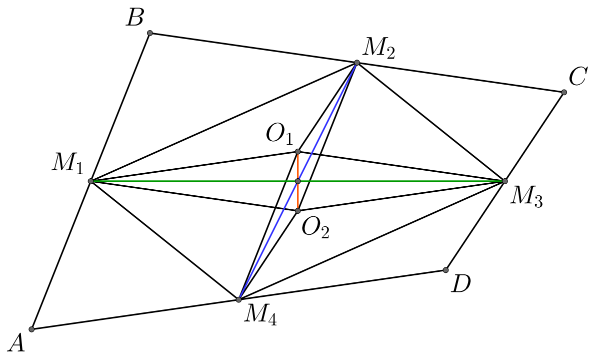
8. Если диагонали исходного четырехугольника перпендикулярны, то параллелограмм Вариньона становится прямоугольником.



9. Четырехугольник, вершинами которого являются середины противоположных сторон и диагоналей произвольного четырехугольника, является параллелограммом.

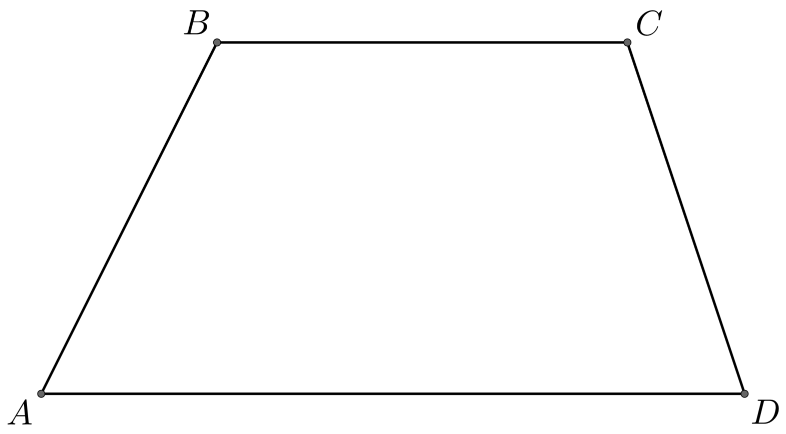


10. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 – середины сторон четырёхугольника, O_1, O_2 – середины диагоналей четырёхугольника, тогда центры параллелограммов $M_1M_2M_3M_4$, $M_1O_1M_3O_2$, $O_1M_2O_2M_4$ совпадают.

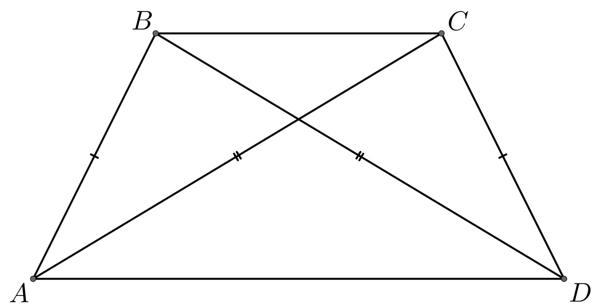


9 Трапеция

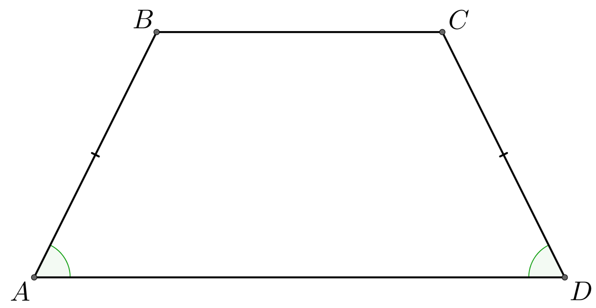
Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны (они называются *основаниями*), а две другие – нет (они называются *боковыми сторонами*). Если у трапеции боковые стороны равны, то она называется *равнобедренной*.



1. Трапеция является равнобедренной тогда и только тогда, когда её диагонали равны.

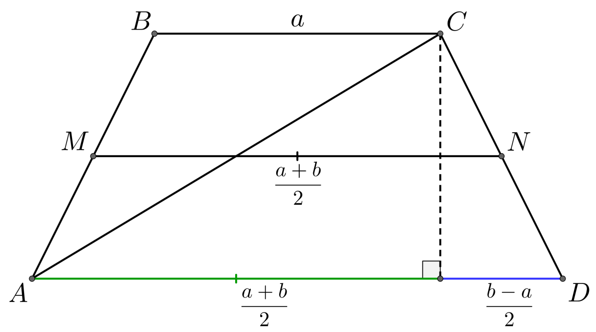


2. Трапеция является равнобедренной тогда и только тогда, когда углы при любом из оснований равны.

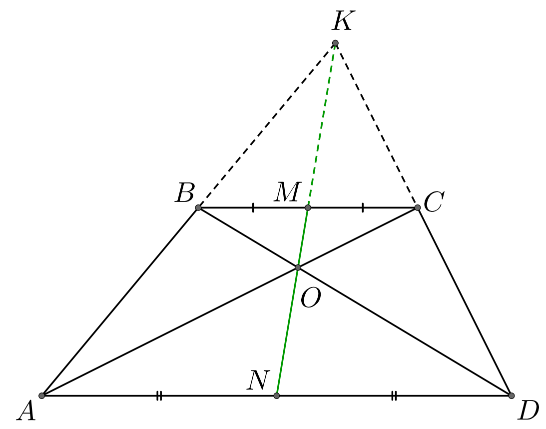


3. В равнобедренной трапеции проекция диагонали на бОльшее основание равна средней линии.

4. В равнобедренной трапеции проекция боковой стороны на бОльшее основание равна полуразности длин оснований.

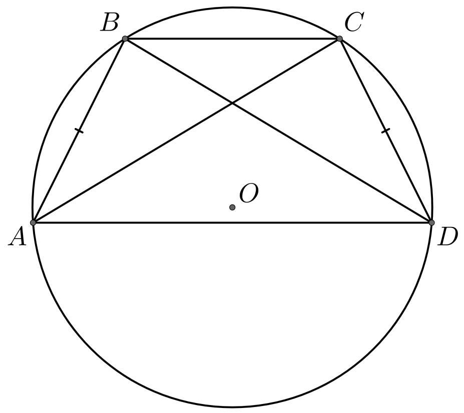


5. (**Замечательное свойство трапеции**). В трапеции середины оснований, точка пересечения продолжений боковых сторон и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой.



6. Вокруг равнобедренной трапеции можно описать окружность.

Обратно: Если вокруг трапеции можно описать окружность, то она является равнобедренной.

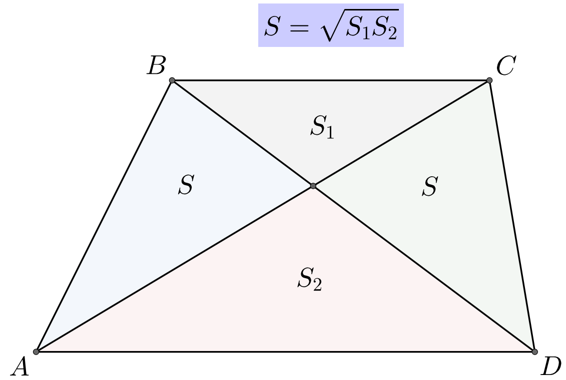


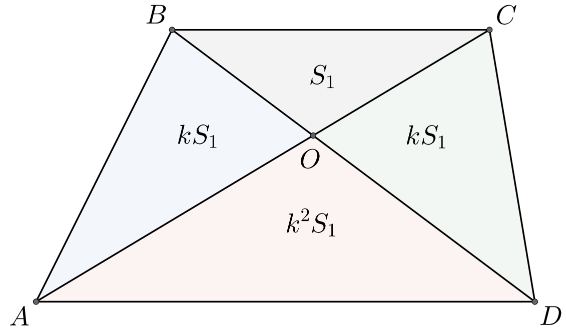
7. Треугольники при боковых сторонах трапеции, образованные диагоналями, равновелики. Их площади равны среднему геометрическому площадей треугольников при основаниях.

Замечание: Пусть k – коэффициент подобия треугольников BOC и DOA. Тогда $S_2 = k^2 S_1$, $S = kS_1$;

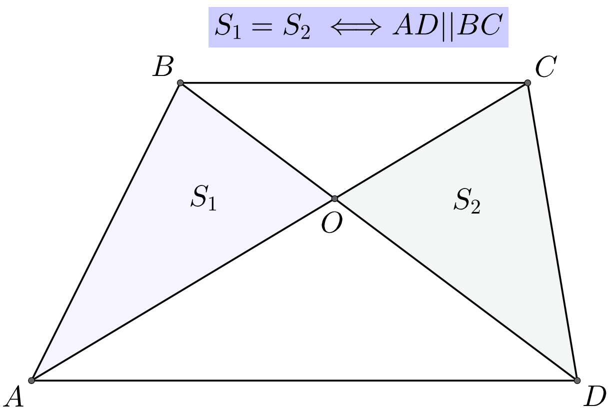
$S_{ABCD} = S_1 + 2kS_1 + k^2 S_1 = (k+1)^2 S_1$;

$\sqrt{S_{ABCD}} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.

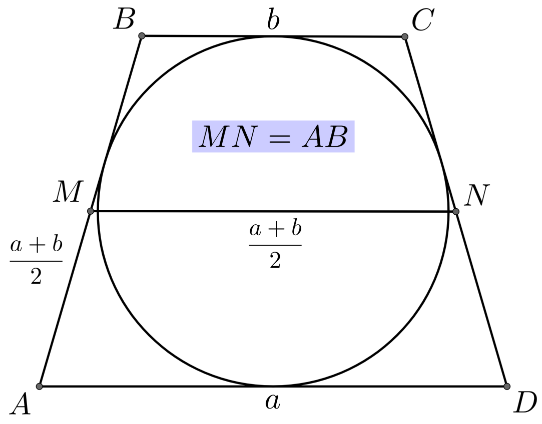




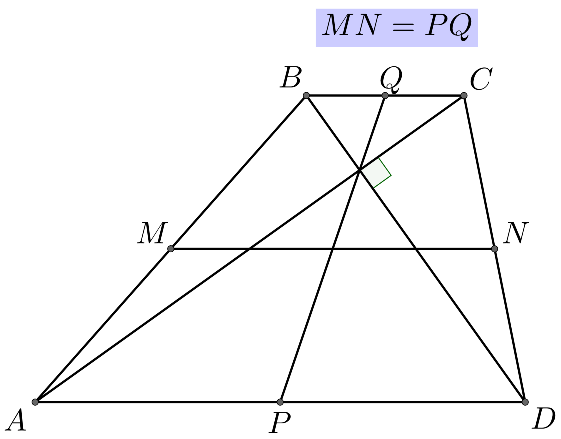
8. Если внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка O и $S_{ABO} = S_{CDO}$, то $ABCD$ – трапеция.



9. Если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона и средняя линия этой трапеции равны.

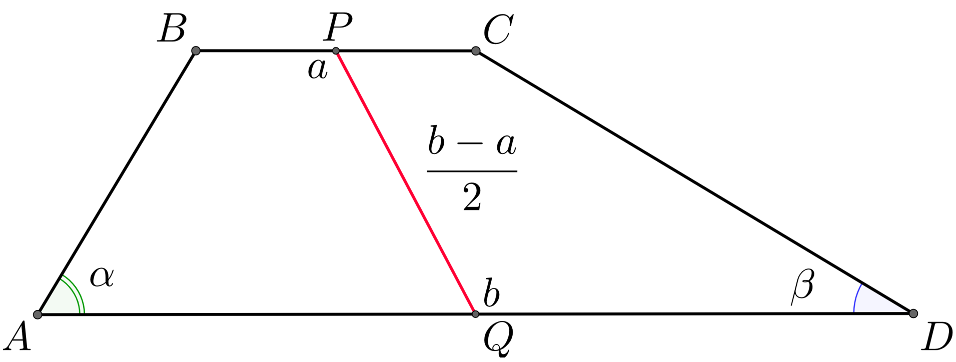


10. Если диагонали трапеции перпендикулярны, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен средней линии.



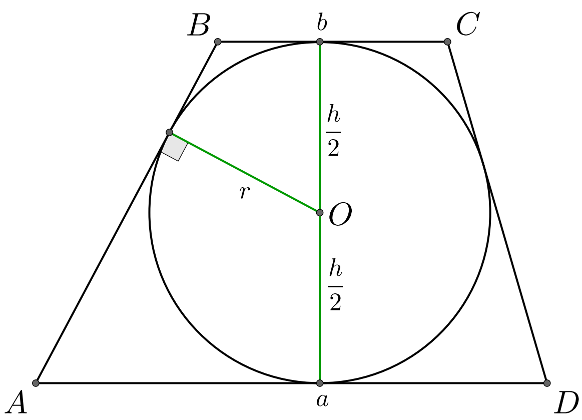
11. Если сумма углов при основании трапеции равна 90, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности.

$$\boxed{\alpha + \beta = 90^\circ} \implies \boxed{PQ = \frac{b-a}{2}}$$

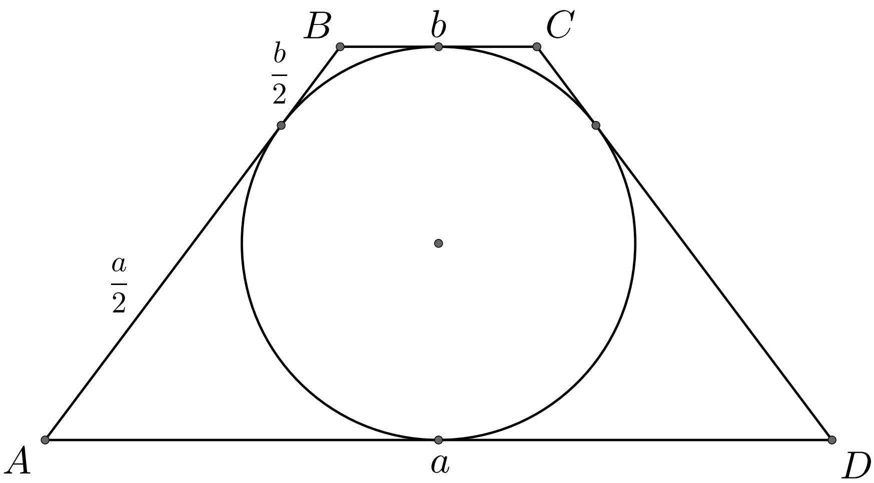


12. Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен половине высоты и половине среднего геометрического оснований трапеции.

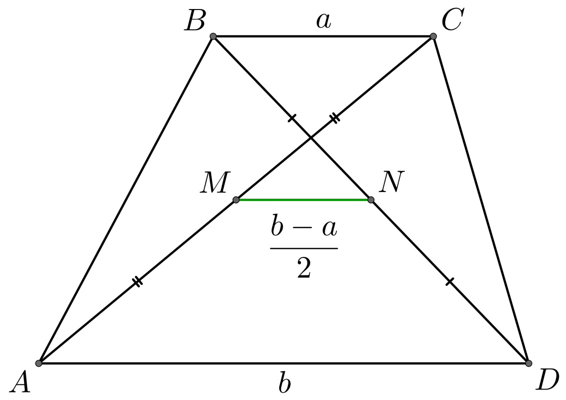
$$\boxed{r = \frac{\sqrt{ab}}{2}}$$



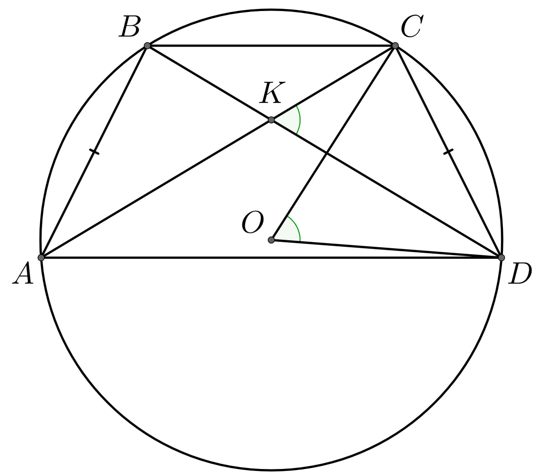
13. Если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то её боковые стороны равны полусумме оснований.



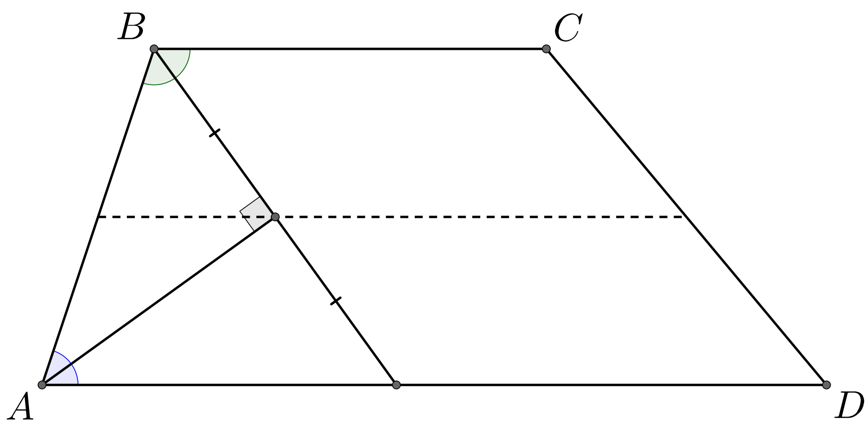
14. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности длин оснований.



15. Угол, под которым видна боковая сторона равнобедренной трапеции из точки пересечения диагоналей, равен углу, под которым она видна из центра описанной окружности.

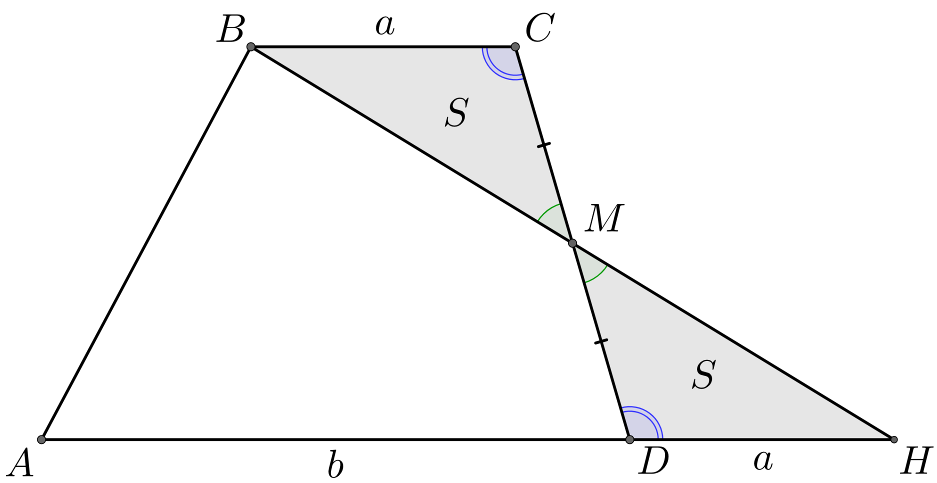


16. Биссектрисы односторонних углов трапеции пересекаются на средней линии под прямым углом.



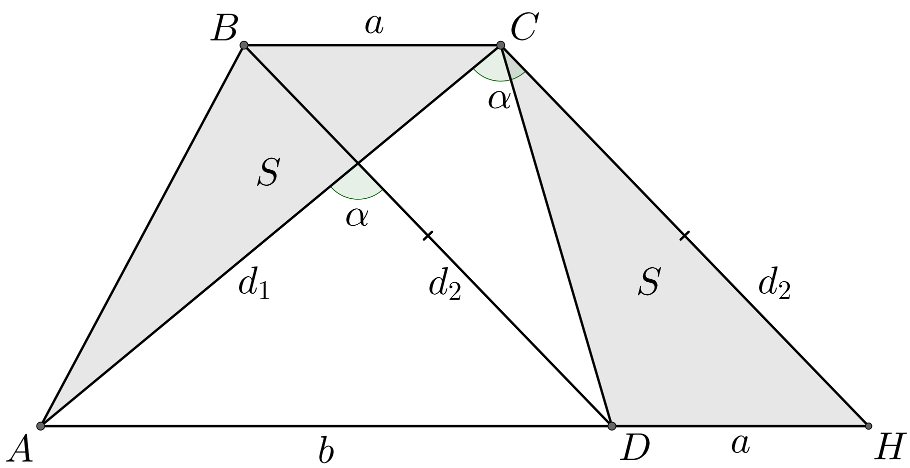
17. В трапеции проведём через середину M боковой стороны CD прямую BM до пересечения с прямой AD. Тогда треугольники BCM и HDM равны. Из этого следует, что

$S_{ABCD} = S_{ABH}$

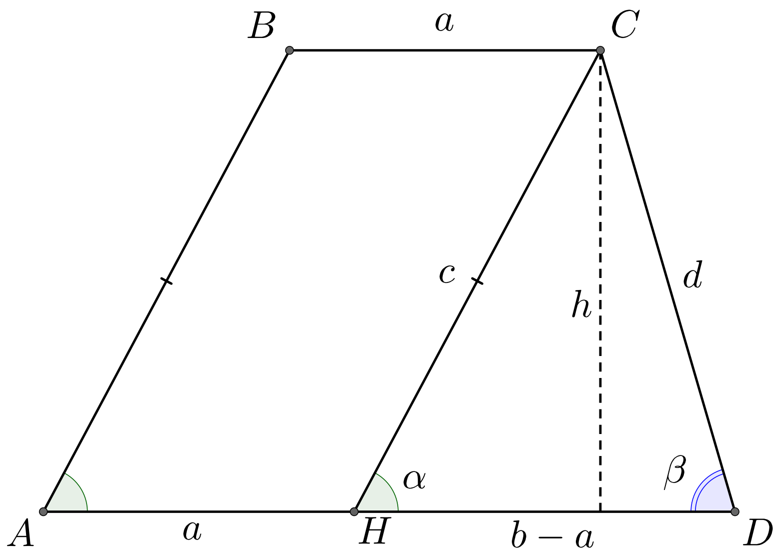


18. Заметим, что если мы знаем основания и диагонали трапеции, то в треугольнике ACH нам известны все три стороны, а значит, мы можем найти площадь трапеции и угол между её диагоналями.

$S_{ABCD} = S_{ACH}$

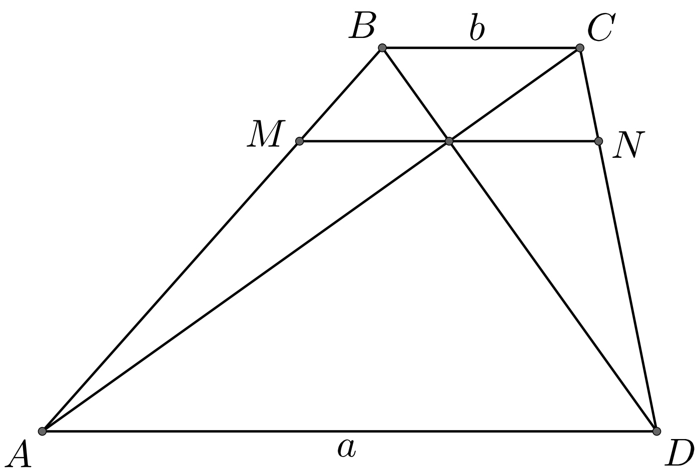


19. Через вершину C проведём отрезок CH параллельно боковой стороне AB. Тогда $ABCH$ – параллелограмм и $AH = a$, $HD = b - a$.
Заметим, что если мы знаем стороны трапеции, то мы знаем стороны треугольника CHD, поэтому мы можем найти углы α и β, а также высоту трапеции.



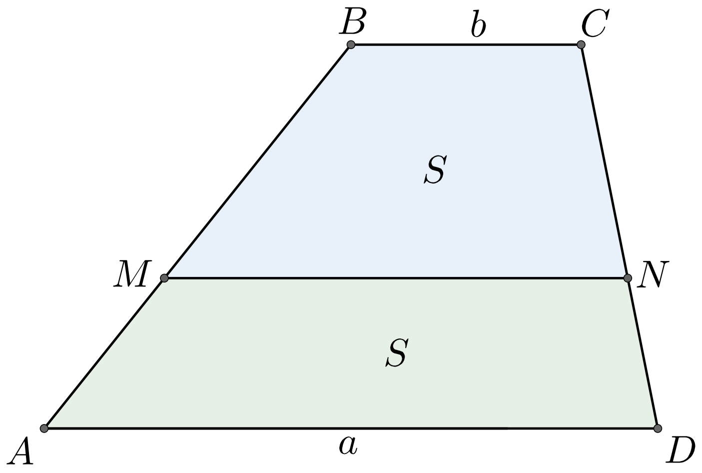
20. Длина отрезка MN, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно средней линии, равна среднему гармоническому длин оснований.

$$MN = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$



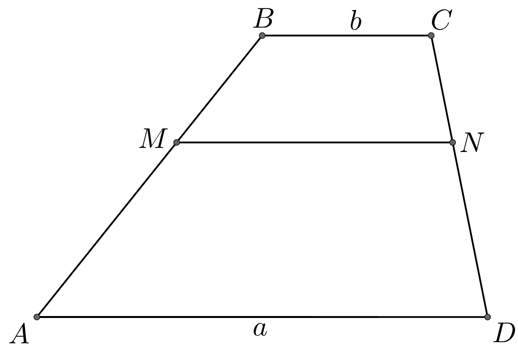
21. Длина отрезка MN, проходящего параллельно средней линии и делящего трапецию на две равновеликих, равна среднему квадратическому длин оснований.

$$MN = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$



22. Длина отрезка MN, проходящего параллельно средней линии и делящего трапецию на две подобные трапеции, равна среднему геометрическому длин оснований.

$$MN = \sqrt{ab}$$



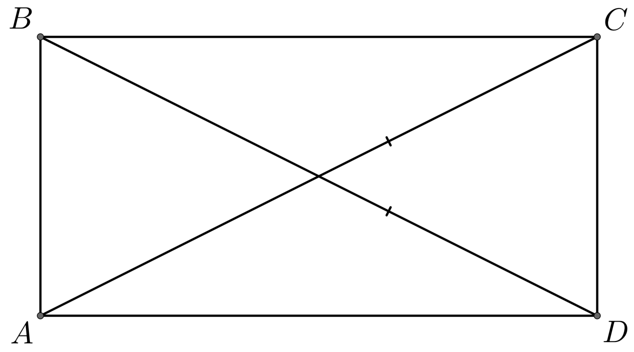
10 Основные четырёхугольники

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны.

Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

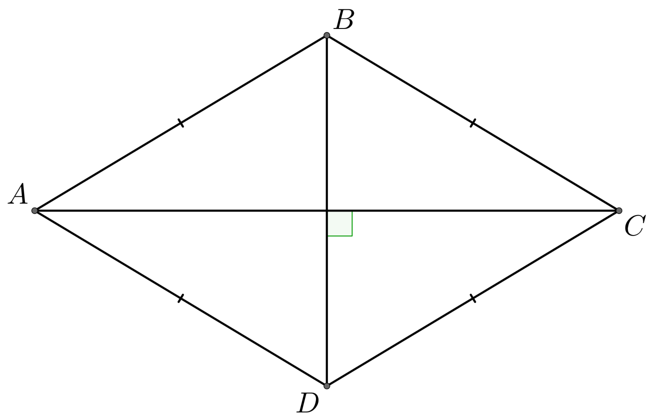
1. Диагонали прямоугольника равны.

2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.

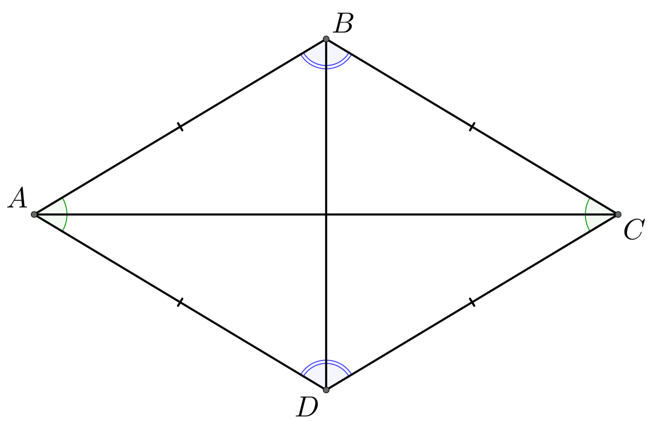


Ромбом называется параллелограмм у которого все стороны равны.

3. Диагонали ромба перпендикулярны.



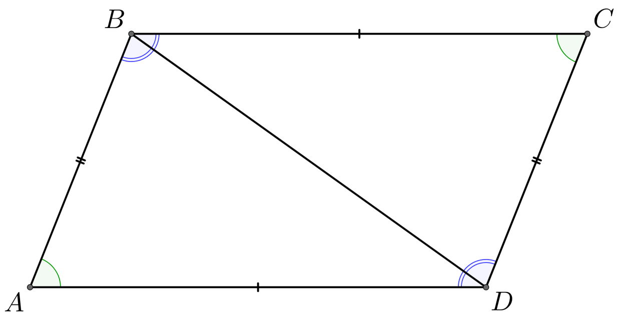
4. Диагонали ромба делят его углы пополам.



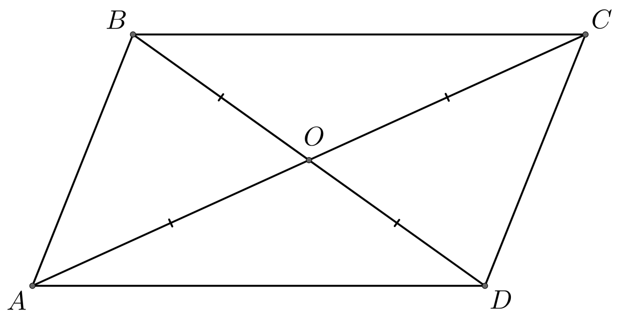
5. Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

6. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

7. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.



8. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

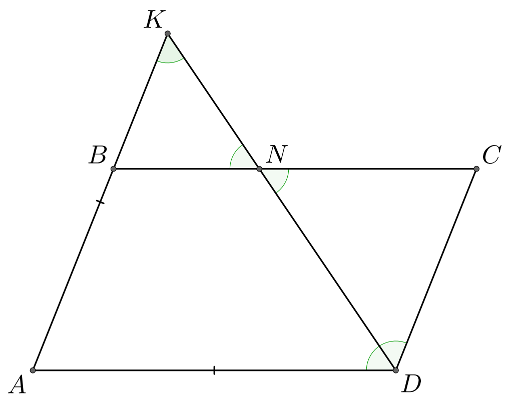


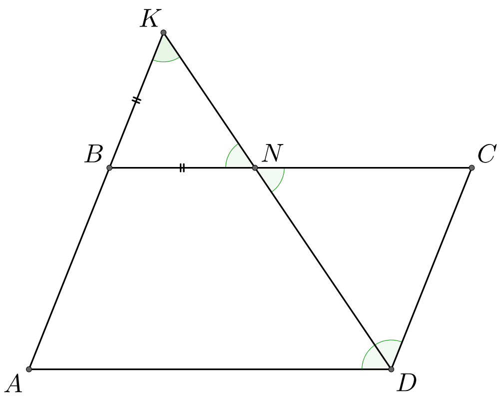
9. Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

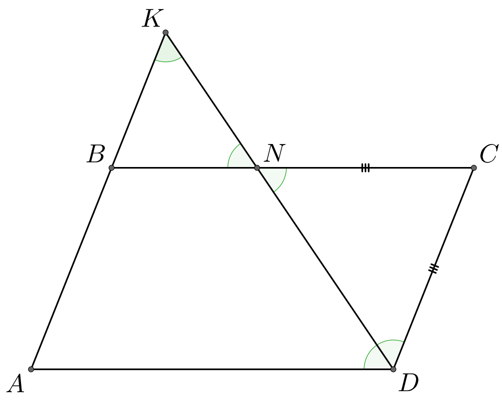
10. Если две противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

11. Если диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

12. Пусть в параллелограмме проведена биссектриса. Тогда треугольники DCN, NBK, DAK – равнобедренные.



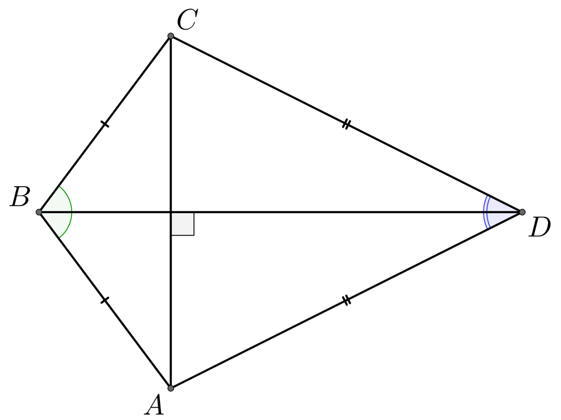




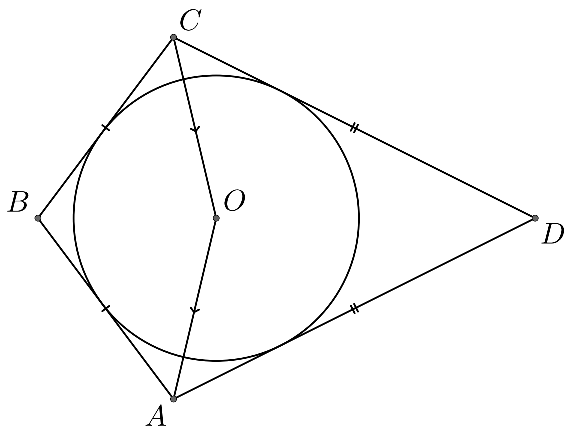
Дельтоидом называется четырёхугольник, у которого есть две пары равных соседних сторон.

13. Диагонали дельтоида перпендикулярны.

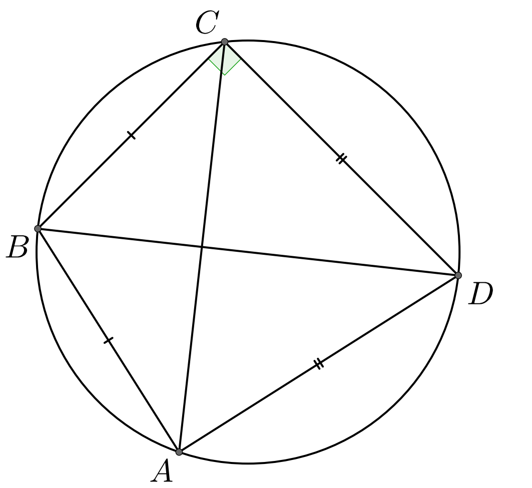
14. Одна из диагоналей дельтоида является биссектрисой двух углов дельтоида.



15. В дельтоид можно вписать окружность. Если O – центр вписанной окружности, то $CO = OA$



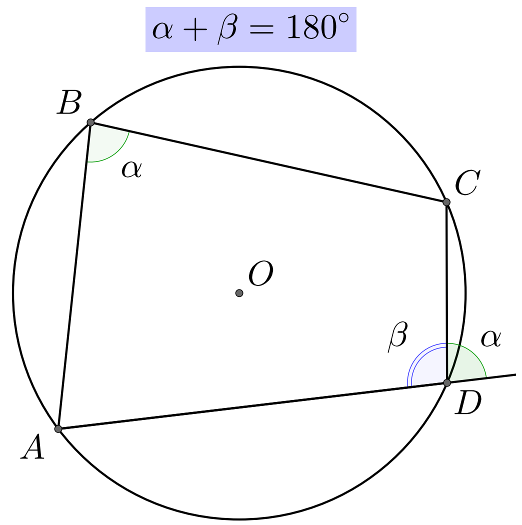
16. Вокруг дельтоида можно описать окружность тогда и только тогда, когда его неравные стороны образуют углы по $90°$.



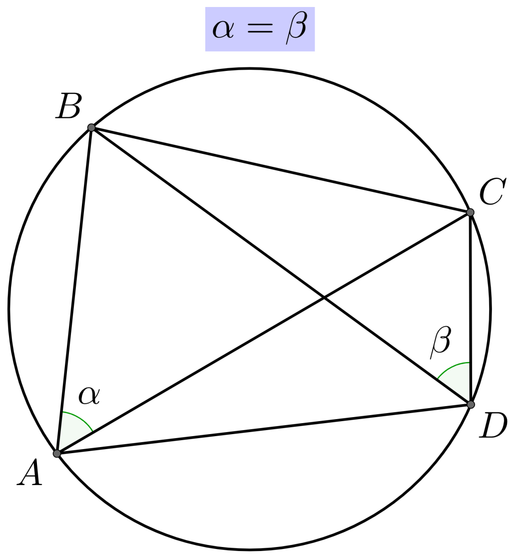
11 Вписанные и описанные четырехугольники

1. **(Первый признак).** Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны $180°$.

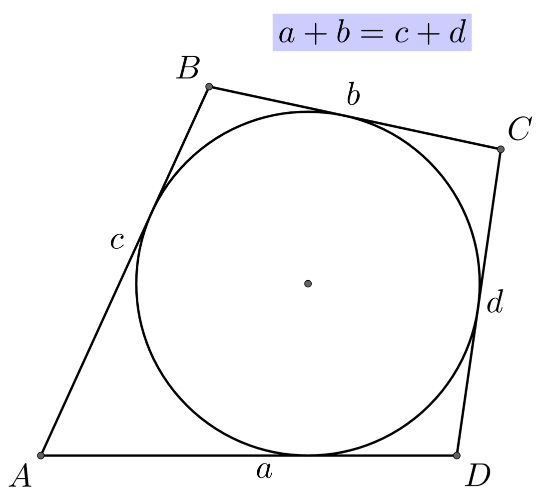
Другая формулировка: Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, всякий угол равен смежному к своему противоположному.



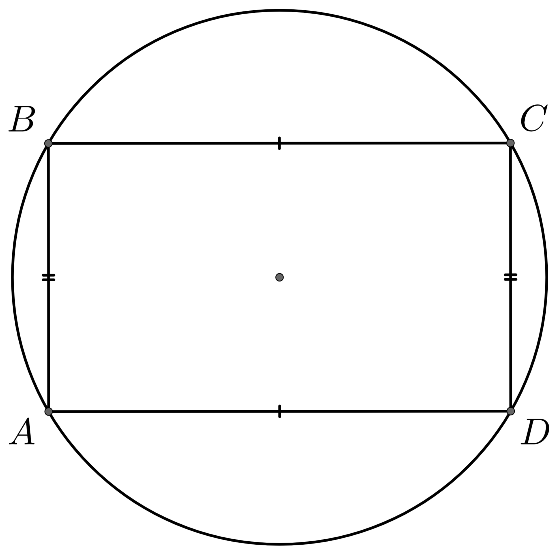
2. **(Второй признак).** Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда углы между диагональю и стороной, опирающиеся на одну сторону, равны.



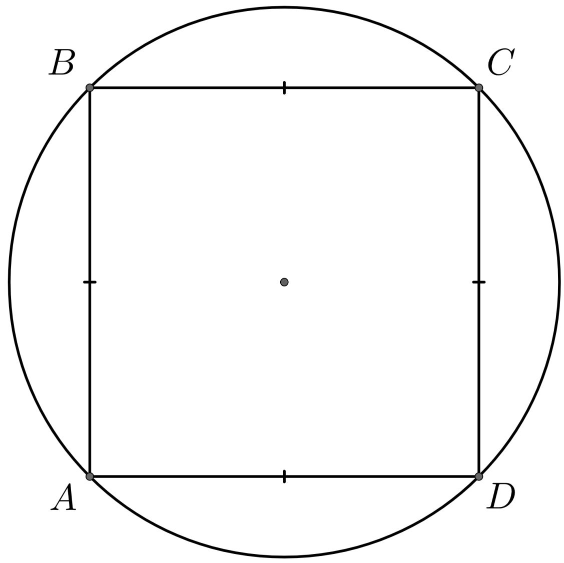
3. Четырёхугольник можно описать вокруг окружности тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.



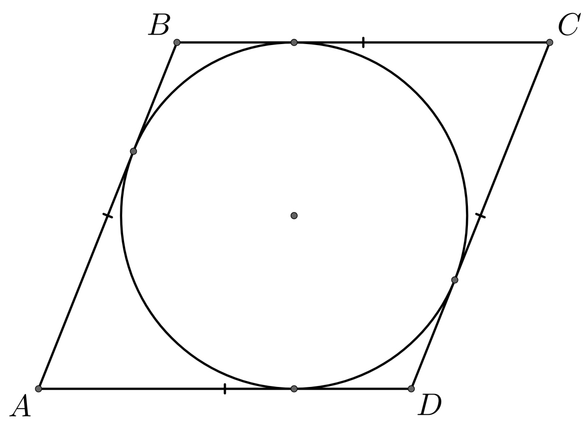
4. Окружность можно описать около параллелограмма тогда и только тогда, когда параллелограмм является прямоугольником.



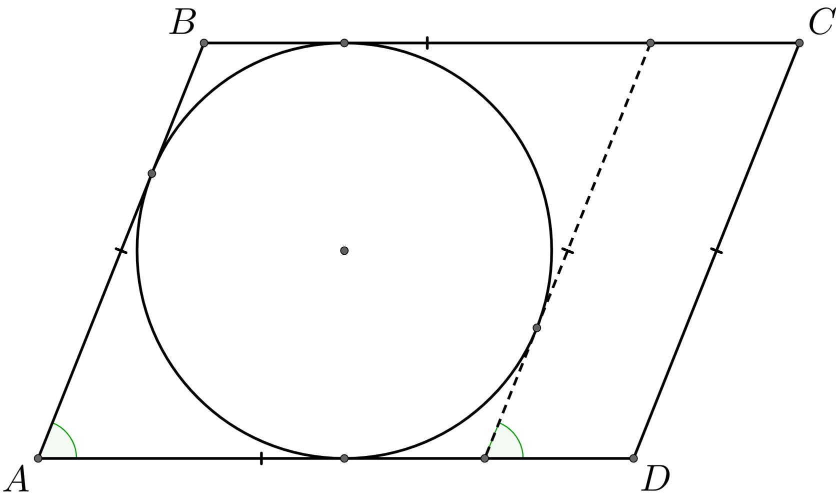
5. Окружность можно описать около ромба тогда и только тогда, когда ромб является квадратом.



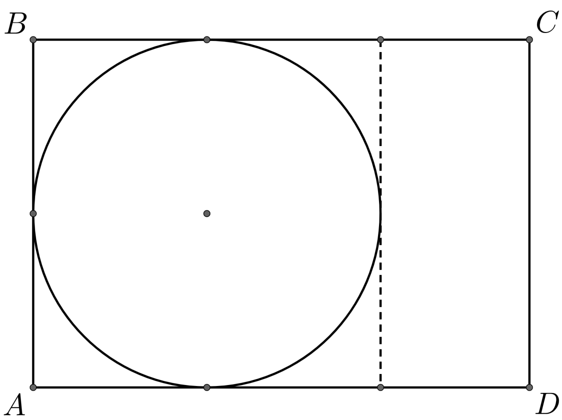
6. В любой ромб можно вписать окружность.



7. В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.



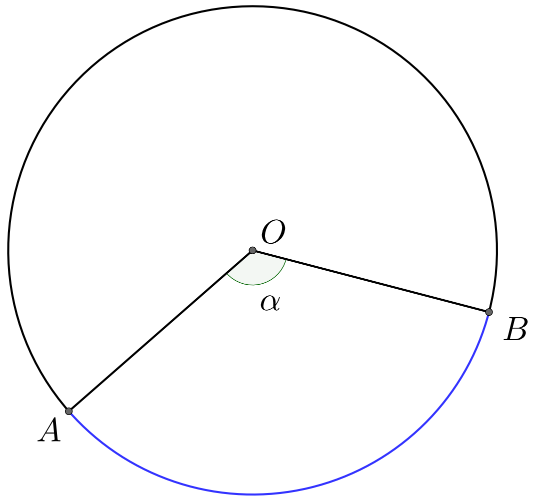
8. В прямоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является квадратом.



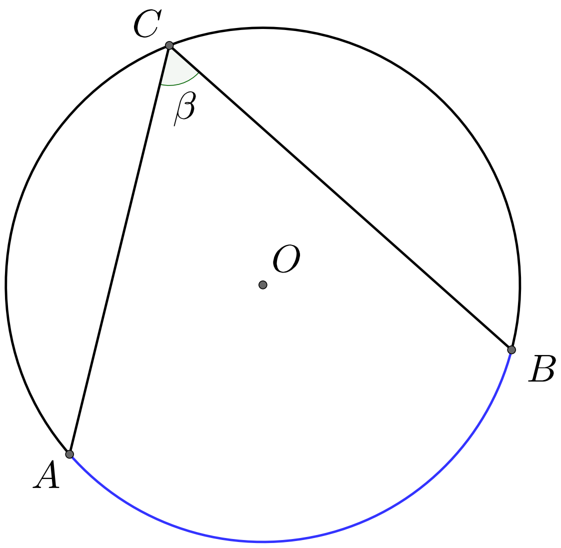
12 Центральные и вписанные углы

Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным**.

$$\angle\alpha = \smile{AB}.$$

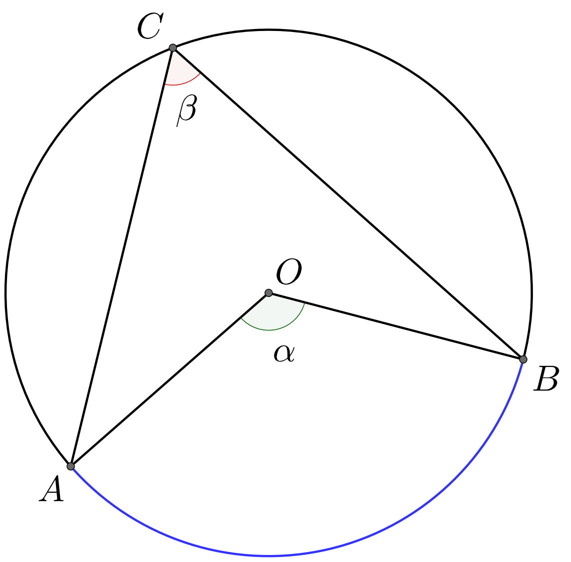


Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность называется **вписанным**.

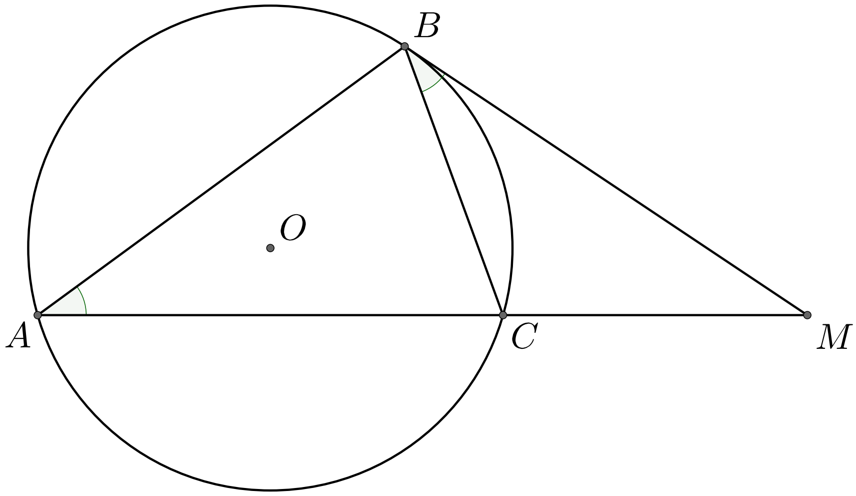


1. Вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, что и центральный, равен его половине.

$$\angle\beta = \frac{1}{2}\alpha.$$

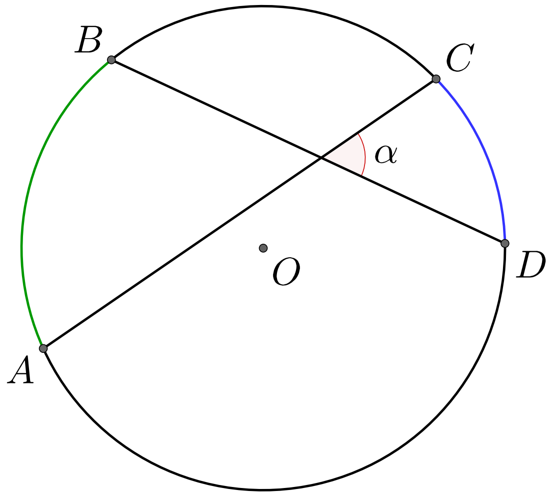


2. Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, который опирается на одну дугу с хордой.



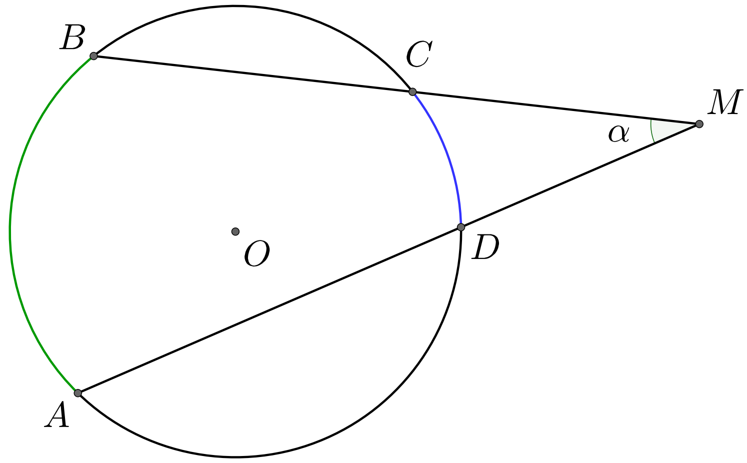
3. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме высекаемых ими дуг.

$$\alpha = \frac{\smile{AB} + \smile{CD}}{2}$$



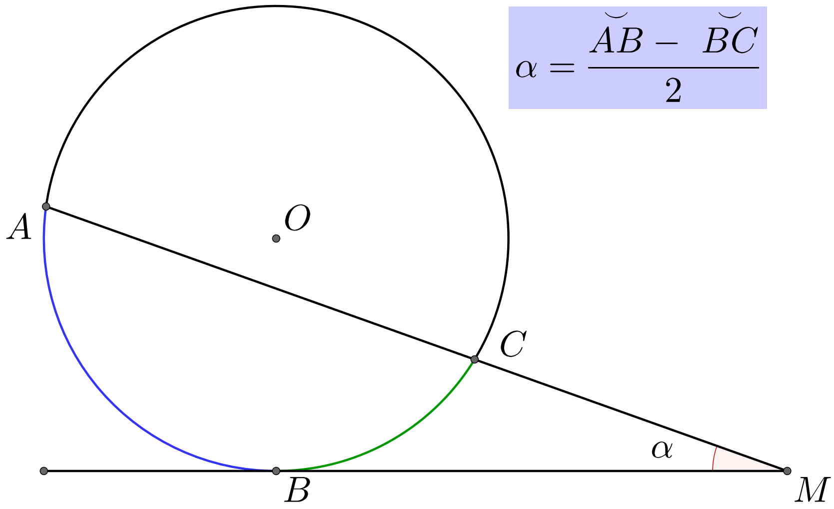
4. Угол между двумя секущими, проведенными из одной точки, равен полуразности градусных мер большей и меньшей высекаемых ими дуг.

$$\alpha = \frac{\smile{AB} - \smile{CD}}{2}$$



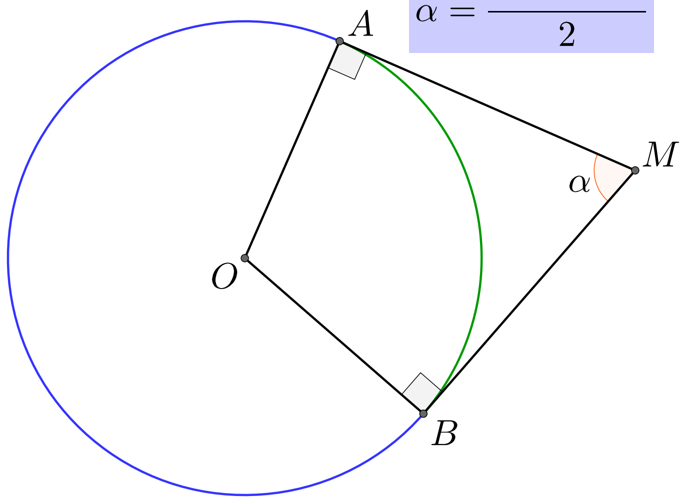
5. Угол между касательной и секущей, проведенными из одной точки, равен полуразности высекаемых ими дуг.

$$\alpha = \frac{\smile{AB} - \smile{BC}}{2}$$



6. Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки, равен полуразности высекаемых ими дуг.

$$\alpha = \frac{\smile{AB} - \smile{BA}}{2}$$

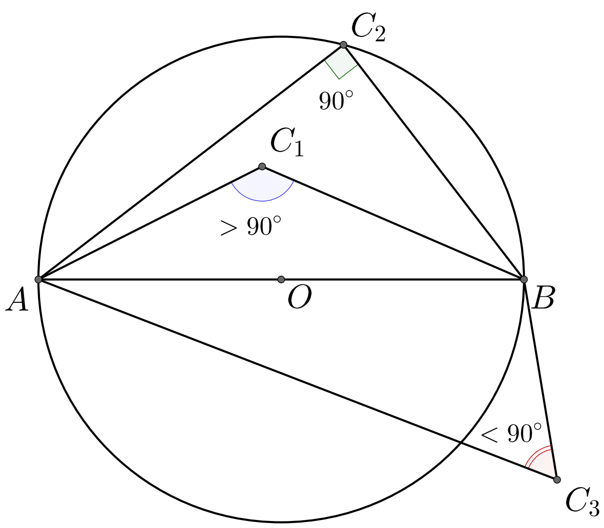


7. На отрезке AB как на диаметре построили окружность. Тогда:

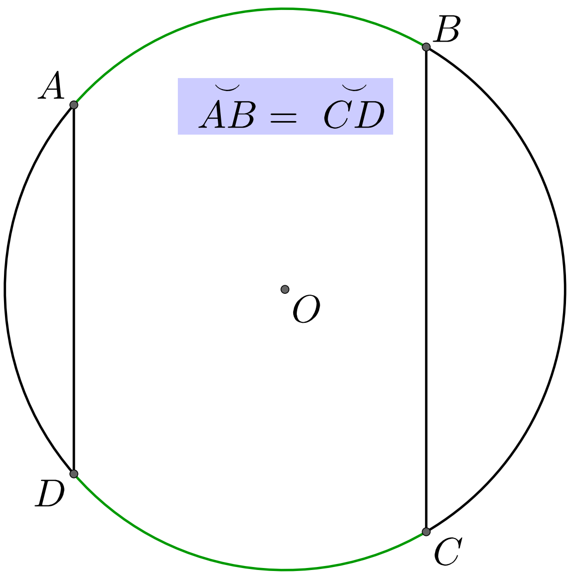
1) Из точек, лежащих строго внутри окружности, отрезок AB виден под тупым углом.

2) Из точек, лежащих на самой окружности, отрезок AB виден под прямым углом.

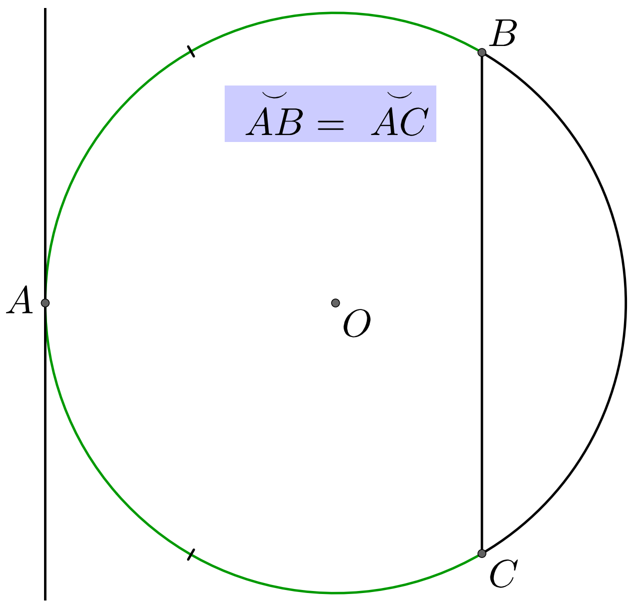
3) Из точек, лежащих вне окружности, отрезок AB виден под острым углом.



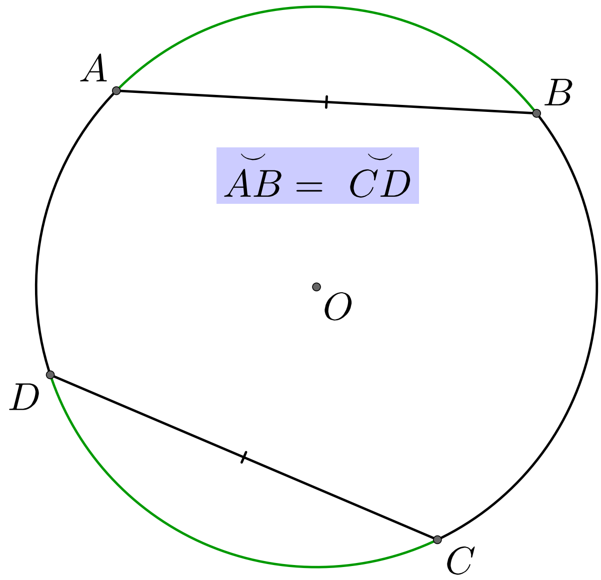
8. Дуги, заключенные между двумя параллельными хордами, равны.



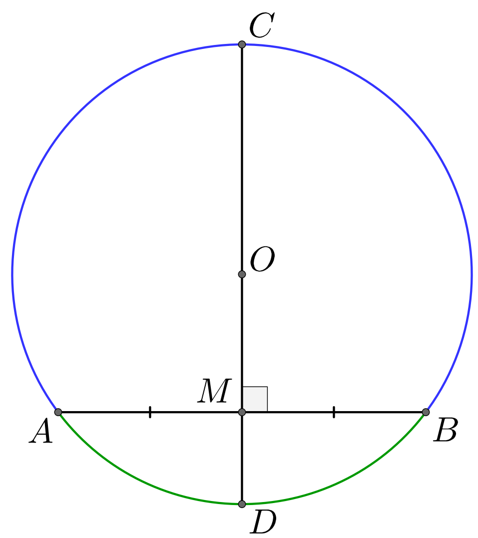
9. Дуги, заключенные между хордой и параллельной ей касательной, равны.



10. Дуги, стягиваемые равными хордами, равны.

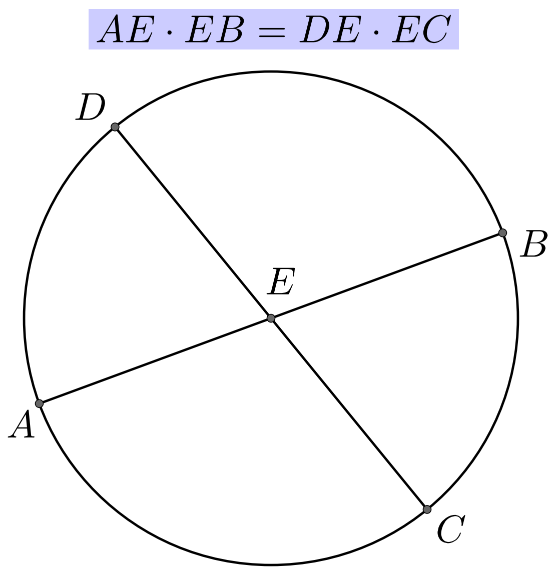


11. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит пополам саму хорду и дугу, стягиваемую ею. Обратно, диаметр, проходящий через середину хорды, делит её пополам.



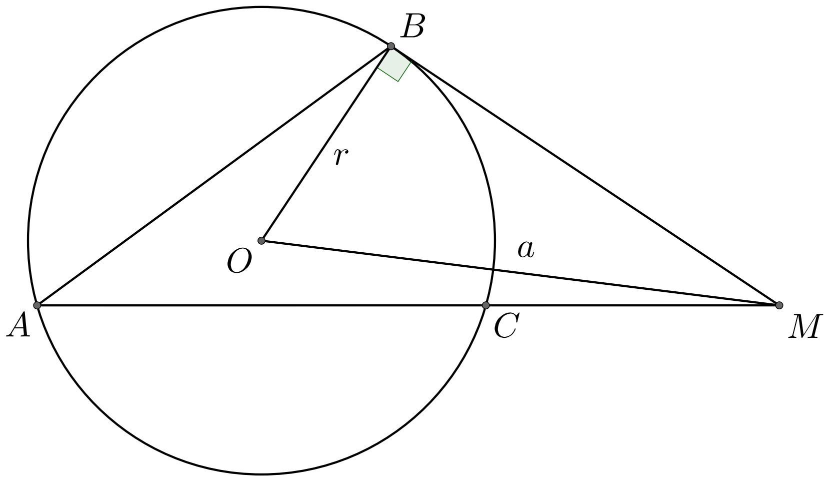
12. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке E, тогда

$$AE \cdot EB = DE \cdot EC.$$



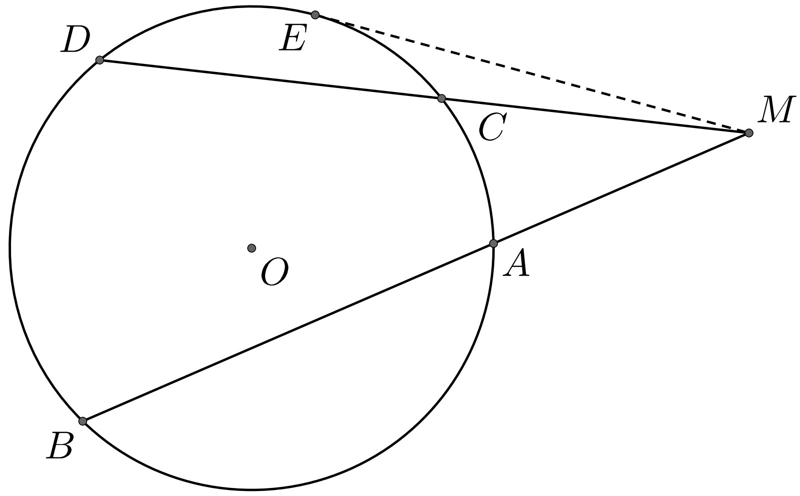
13. Пусть M – точка вне окружности, a – расстояние от точки M до центра окружности, r – радиус окружности. BM – касательная к окружности, секущая из точки M пересекает окружность в точках A и C, тогда

$$MB^2 = MC \cdot MA = a^2 - r^2$$



14. Пусть M – точка вне окружности. ME – касательная к окружности. Из точки M выходят две секущие: первая пересекает окружность в точках A и B, вторая – в точках C и D. Тогда:

$$ME^2 = MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

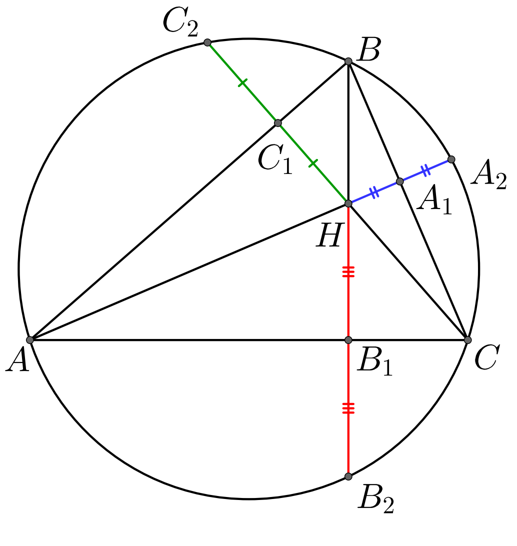


13 Свойства ортоцентра

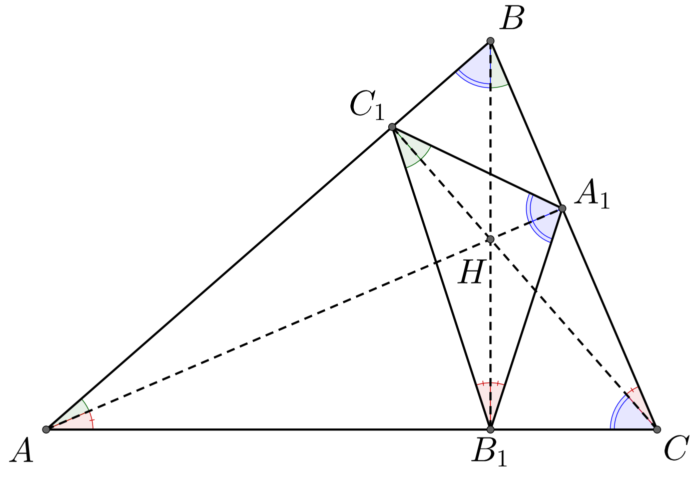
1. Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, которые пересекают описанную вокруг ABC окружность в точках A_2, B_2, C_2. Тогда

$$HA_1 = A_1A_2; \quad HB_1 = B_1B_2; \quad HC_1 = C_1C_2,$$

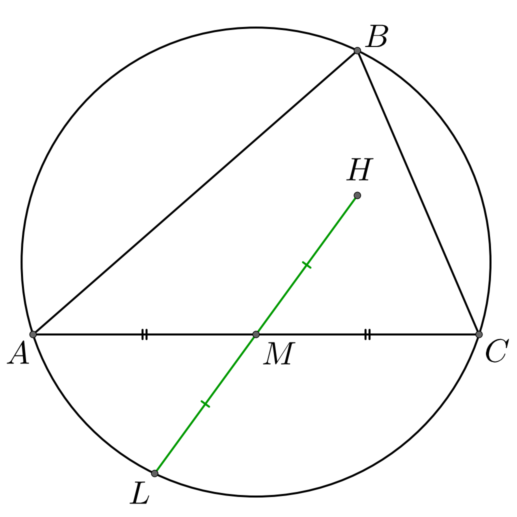
где H – ортоцентр треугольника.



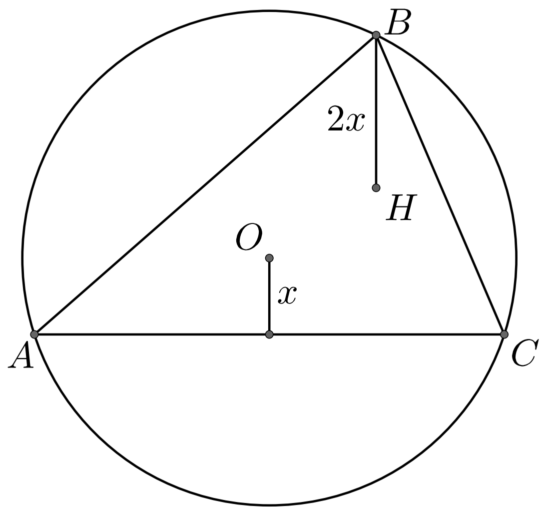
2. Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Треугольник $A_1B_1C_1$ называется **ортотреугольником** и высоты треугольника ABC содержат биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$.



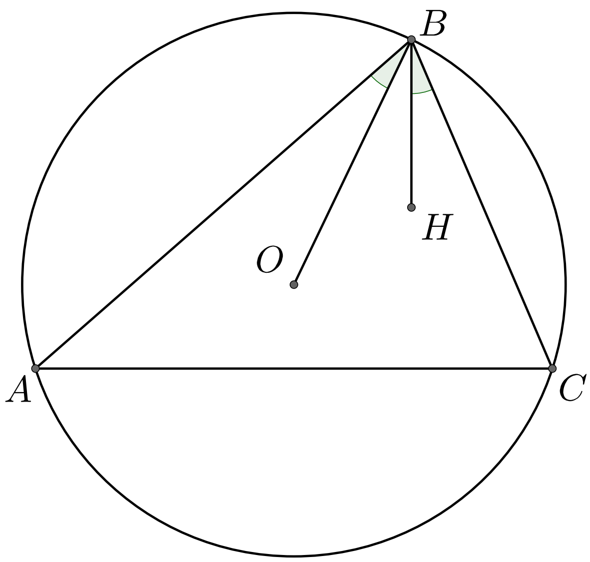
3. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC, M – середина стороны AB, L – точка пересечения прямой HM описанной вокруг ABC окружностью, тогда $HM = ML$.



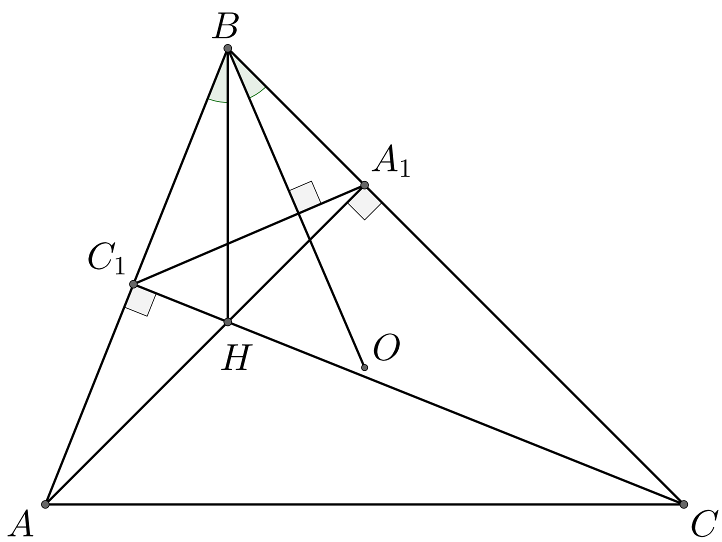
4. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC, O – центр описанной вокруг ABC окружности. Тогда расстояние от точки B до H вдвое больше, чем расстояние от точки O до стороны AC.



5. H – ортоцентр треугольника ABC, O – центр описанной вокруг ABC окружности, тогда $\angle ABO = \angle HBC$.



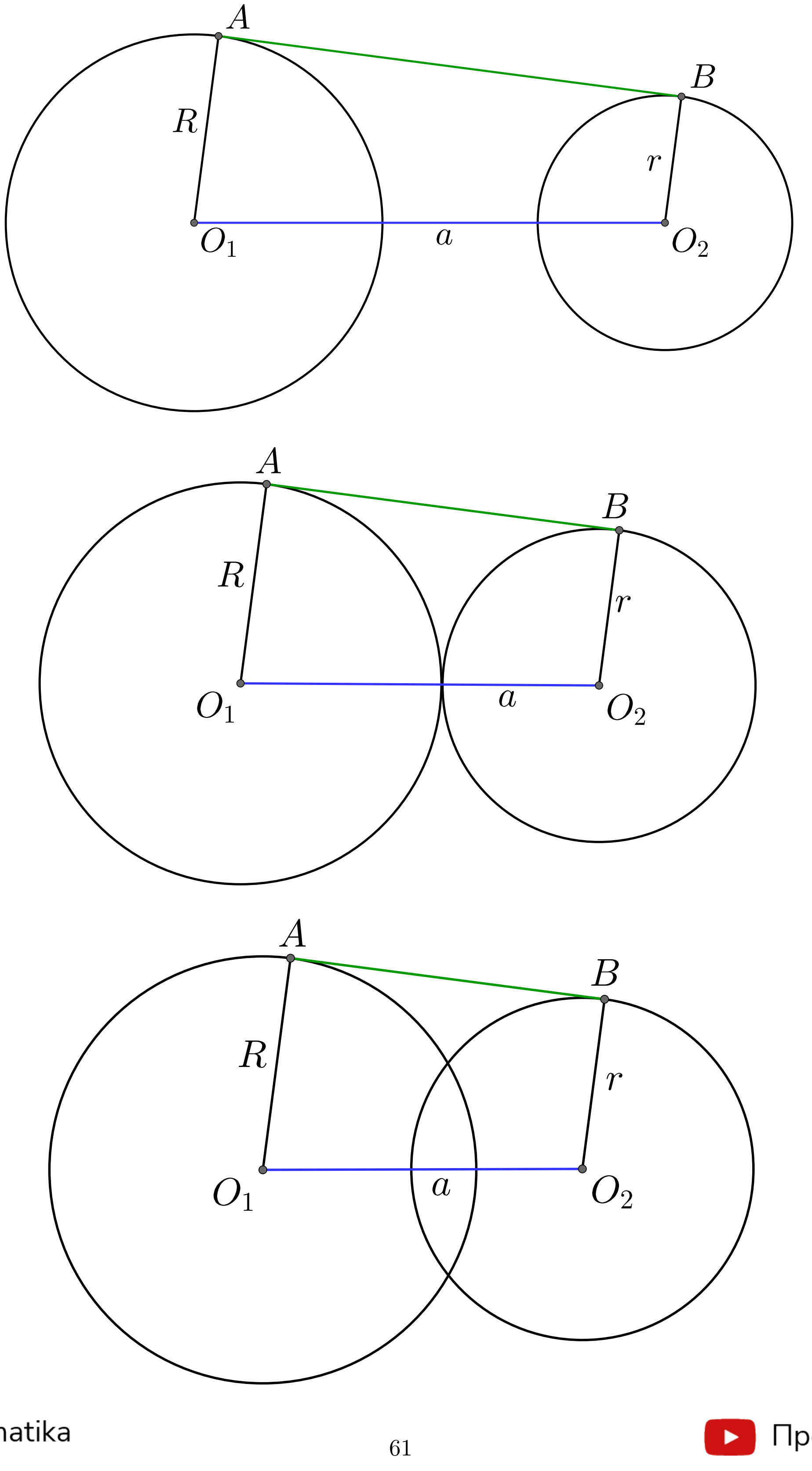
6. H – ортоцентр треугольника ABC, O – центр описанной вокруг ABC окружности, проведены высоты AA_1 и CC_1, тогда $BO \perp A_1C_1$.



14 Конструкции и теоремы

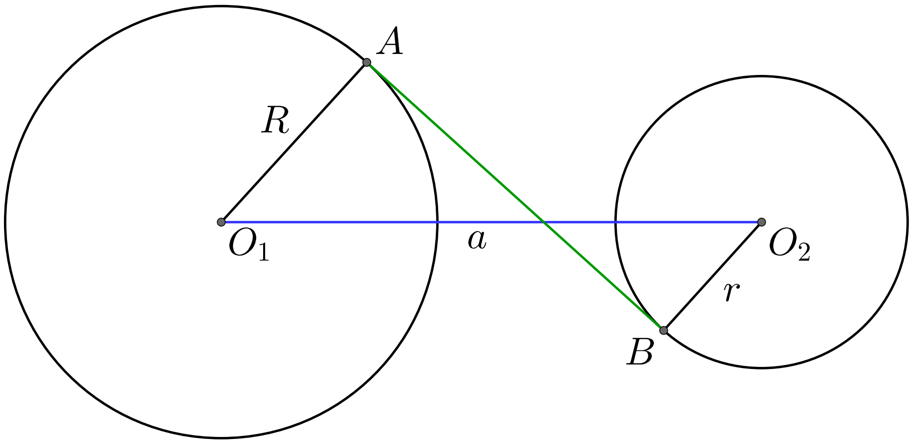
1. Если расстояние между центрами окружностей радиусов r и R равно a, то отрезок общей внешней касательной, заключённой между точками касания, равен $\sqrt{a^2 - (R-r)^2}$.

$$AB = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$$



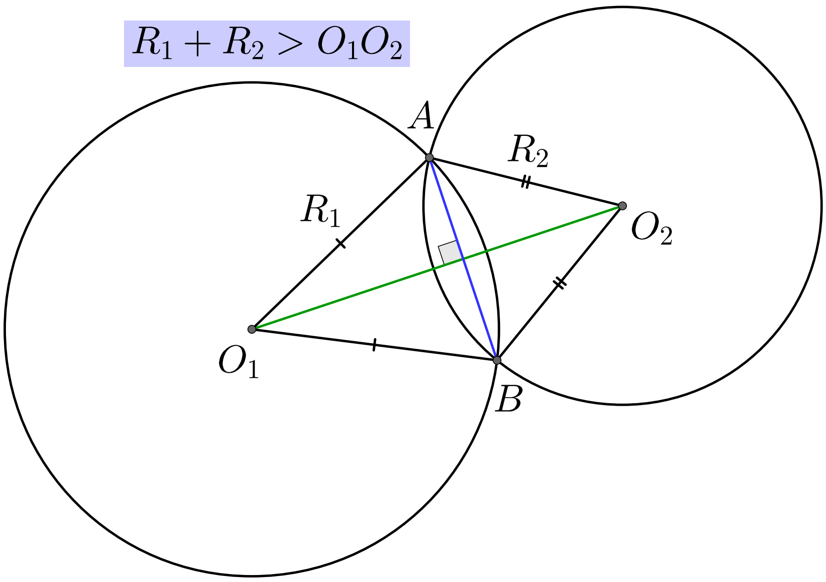
2. Если расстояние между центрами окружностей радиусов r и R равно a и $a > R + r$ (то есть окружности не пересекаются), то отрезок общей внутренней касательной, заключённой между точками касания, равен:

$$AB = \sqrt{a^2 - (R + r)^2}$$

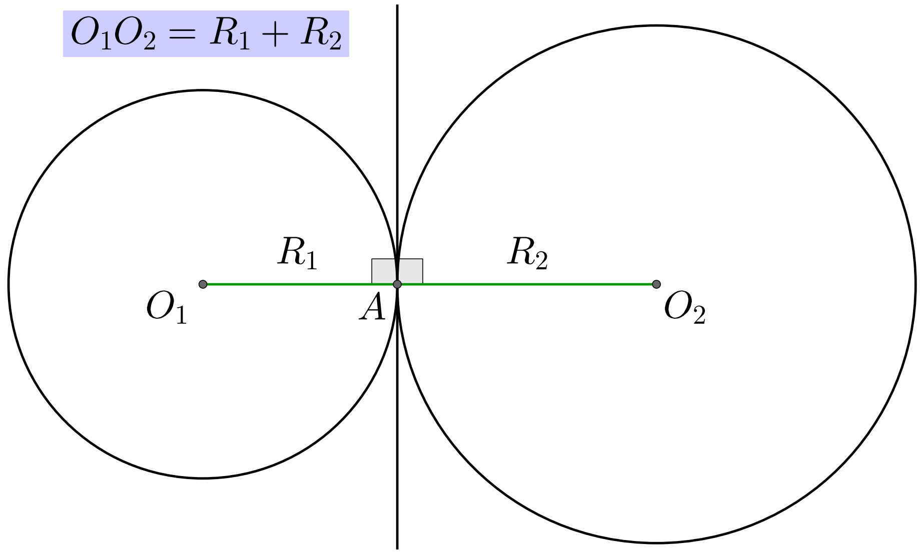


3. Если две окружности пересекаются в двух точках, то расстояние между их центрами не превосходит суммы их радиусов.
Если O_1, O_2 – центры окружностей, A, B – точки пересечения окружностей, то четырёхугольник AO_1BO_2 – дельтоид ($O_1A = O_1B$, $O_2A = O_2B$, $AB \perp O_1O_2$).

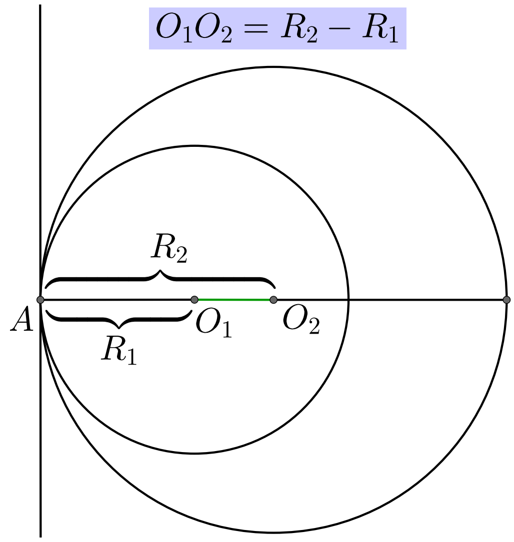
$$R_1 + R_2 > O_1O_2$$



4. Если две окружности касаются внешним образом, то расстояние между их центрами равно сумме их радиусов.



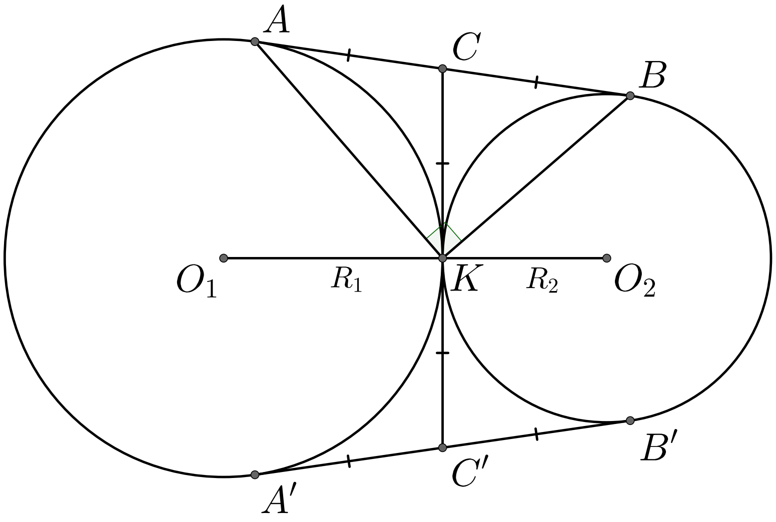
5. Если две окружности касаются внутренним образом, то расстояние между их центрами равно разности их радиусов. Причём в точке пересечения окружности имеют общую касательную

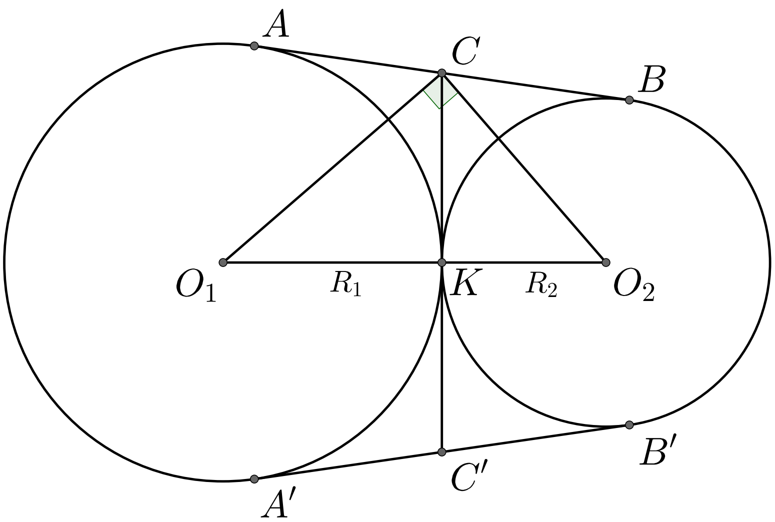


6. Если окружности радиусов R_1 и R_2 с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K, а прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K, в точке C, тогда $\angle AKB = 90^\circ$ и $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$;

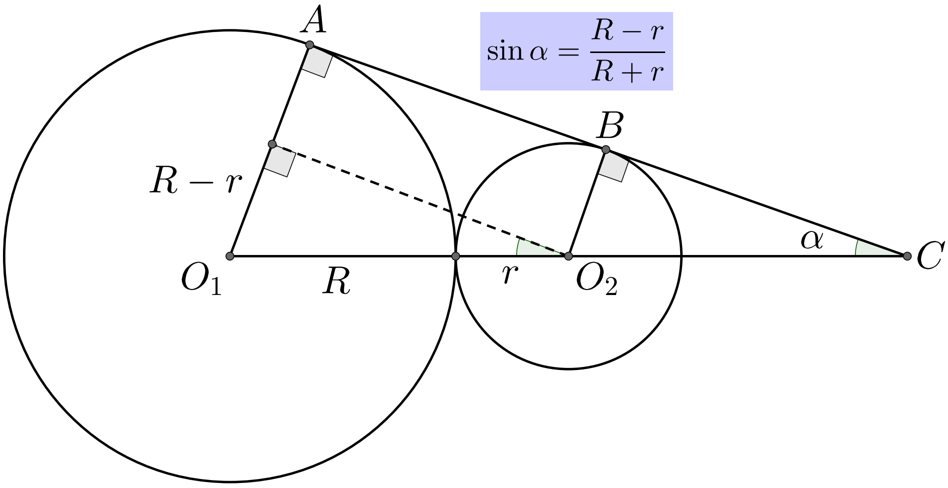
7. Общая внутренняя касательная CK окружностей делит отрезок общей внешней касательной AB пополам;

8. Отрезок AB равен отрезку CC' – общей внутренней касательной, заключённой между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

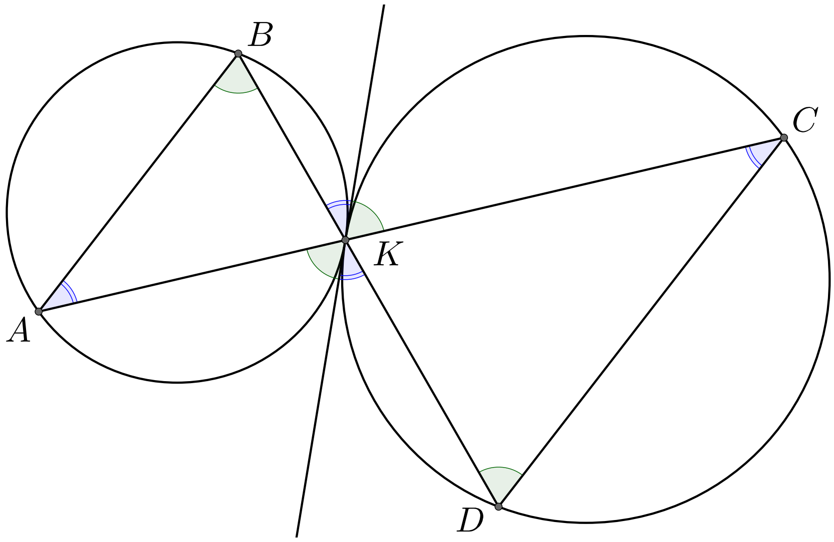




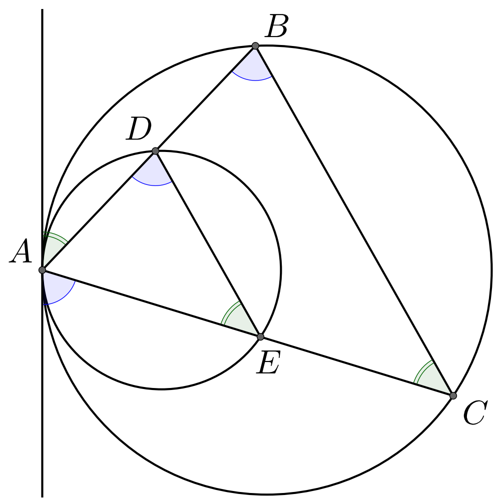
9. Пусть две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом, AB – общая касательная двух окружностей, C – точка пересечения прямых AB и O_1O_2. $\alpha = \angle O_1CA$, тогда



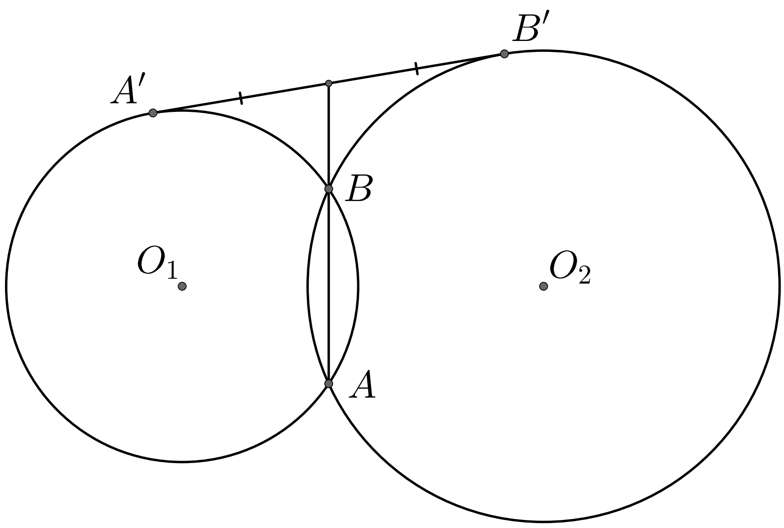
10. Пусть две окружности касаются внешним образом в точке K, через эту точку проходят две секущие. Первая секущая пересекает окружности в точках A и C, вторая – в точках B и D, тогда треугольники AKB и CKD подобны, причём AB и CD параллельны.



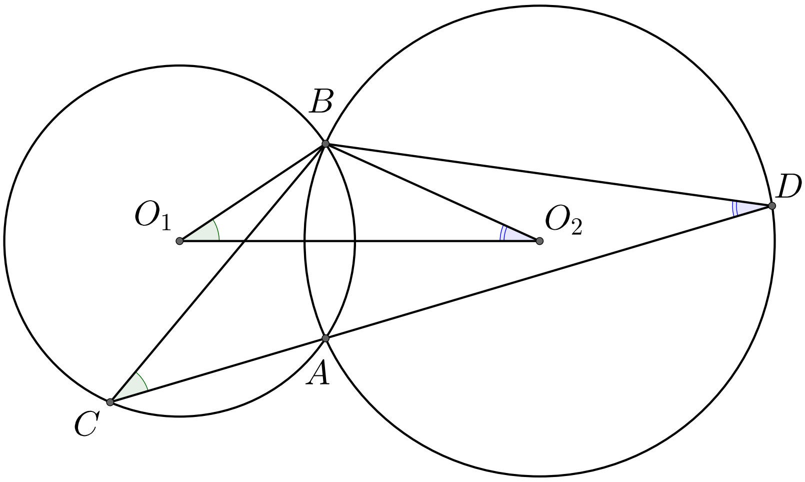
11. Пусть две окружности касаются внутренним образом в точке A, через эту точку проходят две секущие. Первая секущая пересекает окружности в точках D и B, вторая – в точках E и C, тогда треугольники ADE и ABC подобны.



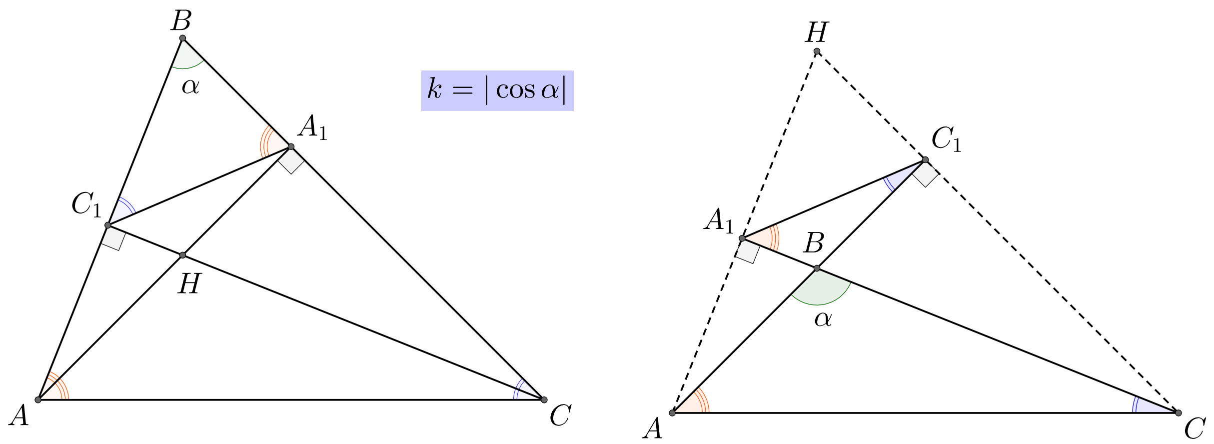
12. Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит общую касательную пополам.



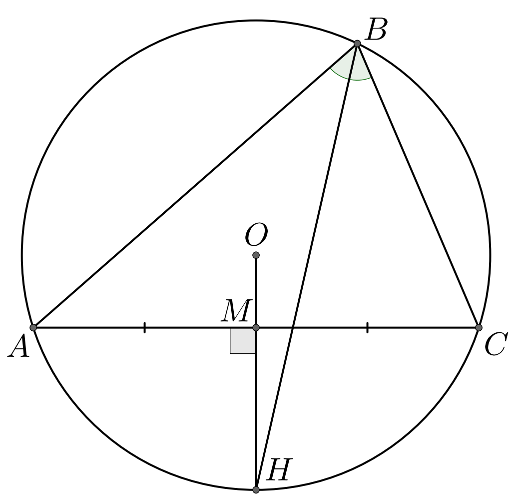
13. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Точка C лежит на первой окружности, прямая AC пересекает вторую окружность в точке D. Тогда $\angle BO_1O_2 = \angle BCD$, $\angle BO_2O_1 = \angle BDC$, а значит треугольники BO_1O_2 и BCD подобны.



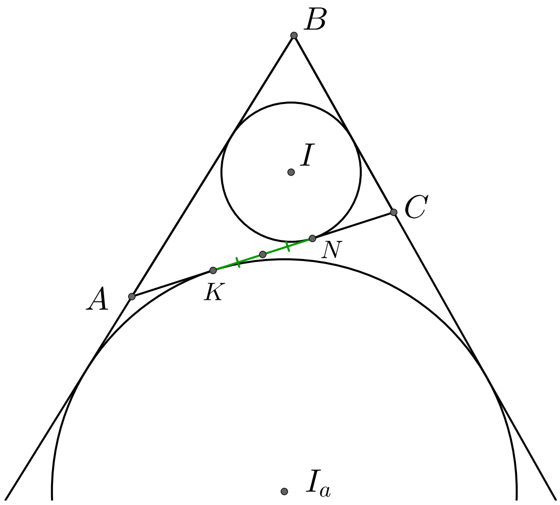
14. Пусть в треугольнике ABC проведены две высоты AA' и CC'. Тогда треугольники ABC и $A'BC'$ подобны с коэффициентом подобия $k = |\cos\alpha|$.



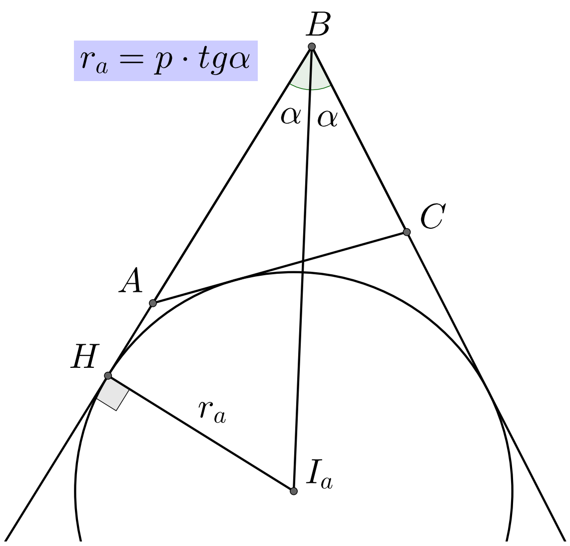
15. Биссектриса угла B треугольника ABC и серединный перпендикуляр к стороне AC пересекаются на описанной вокруг ABC окружности.



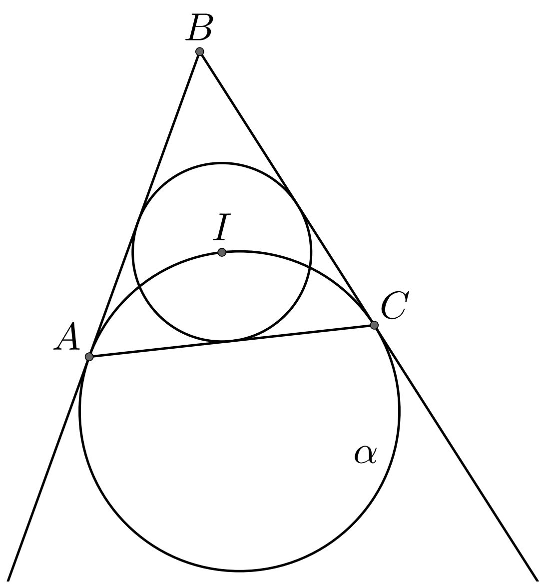
16. Пусть вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AC в точке N, вневписанная окружность касается стороны AC в точке K, тогда середина отрезка AC является серединой отрезка NK.



17. Радиус вневписанной окружности можно найти по формуле:

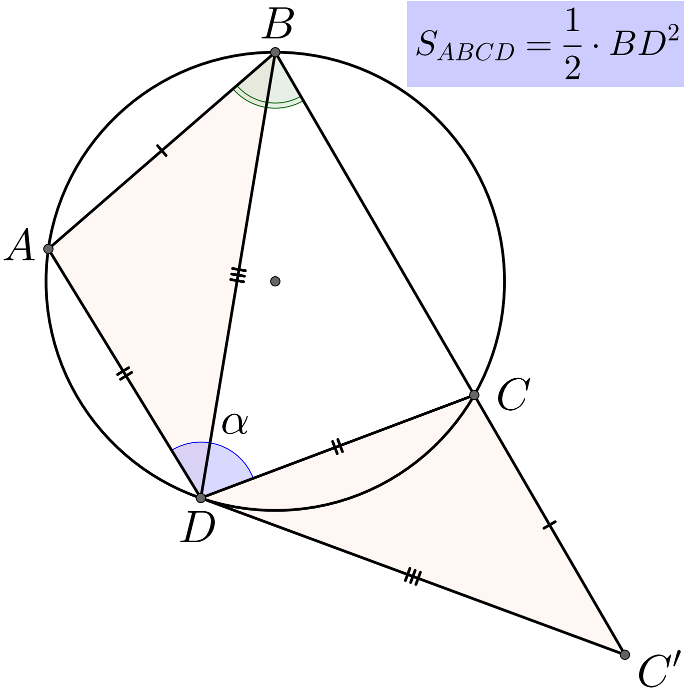


18. Центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на окружности, касающейся лучей BA и BC в точках A и C окружности α.



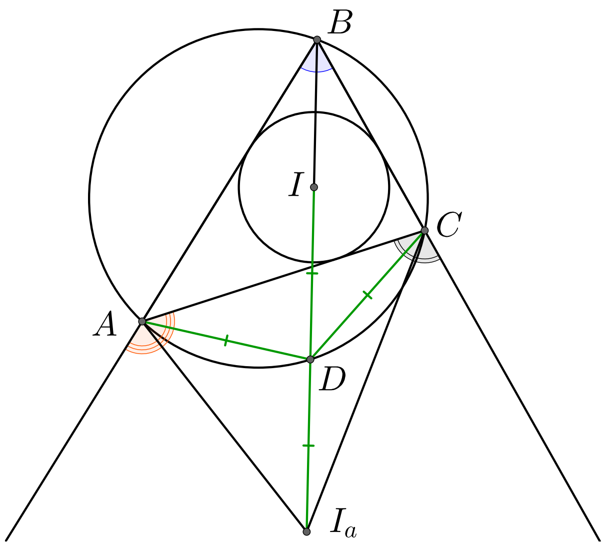
19. Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник, у которого диагональ является биссектрисой одного из углов, $\alpha = \angle ADC$, тогда данный четырехугольник имеет площадь:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BD^2 \cdot \sin\alpha$$

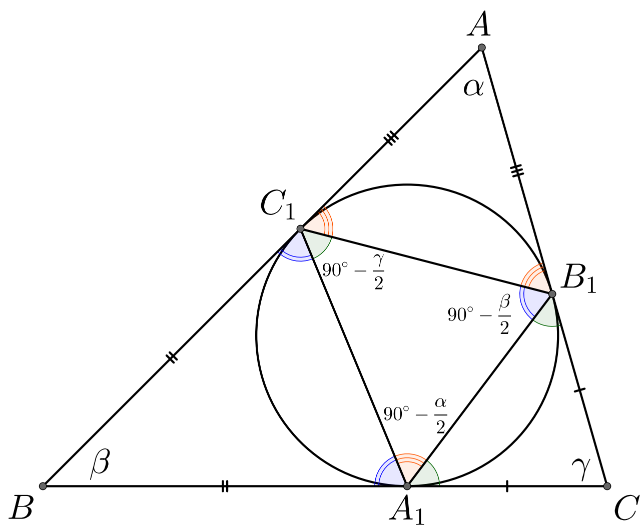


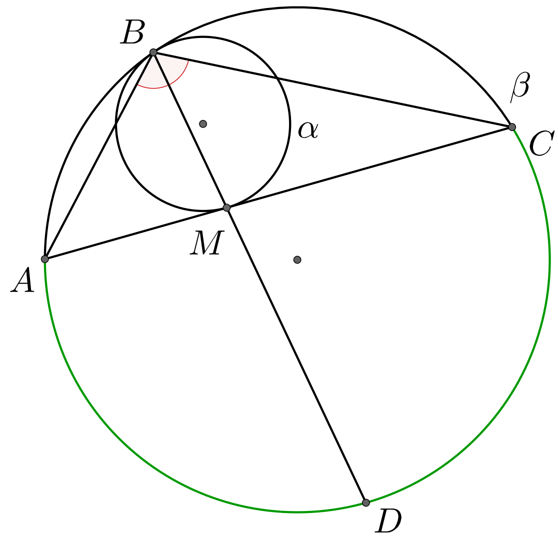
20. **(Лемма о трезубце)** Пусть биссектриса угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D, I – центр вписанной в ABC окружности, а I_a – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC, тогда

$$AD = DC = ID = I_aD.$$

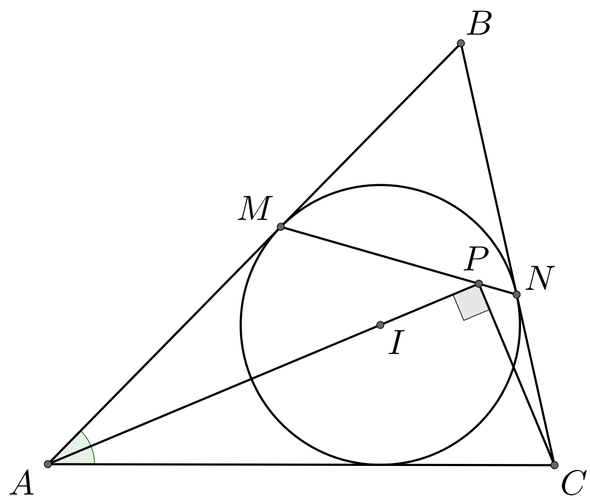


21. Пусть в треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, A_1, B_1, C_1 – точки касания вписанной в треугольник окружности (A_1 лежит напротив A, B_1 лежит напротив B, C_1 лежит напротив C). Тогда в треугольнике $A_1B_1C_1$ $\angle A_1 = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle B_1 = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$, $\angle C_1 = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$.



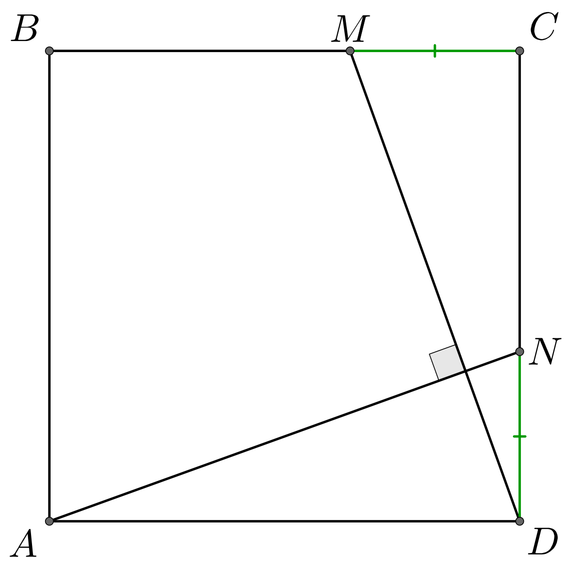


22. **(Лемма Архимеда)** Окружности α и β касаются в точке B, окружность α касается хорды AC окружности β в точке M, BM пересекает окружность α в точке D. Тогда прямая BM является биссектрисой угла ABC, а точка D делит дугу $\overset{\frown}{AC}$ пополам.



23. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках M и N соответственно, а биссектриса угла BAC пересекает отрезок MN в точке P. Тогда $\angle APC = 90°$.

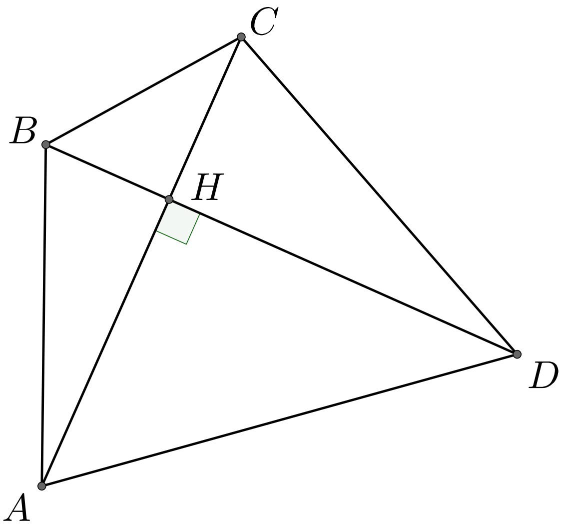
24. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отметили точки M и N соответственно, так что $MC = ND$, тогда $AN \perp DM$.



25. $ABCD$ – четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями тогда и только тогда когда

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

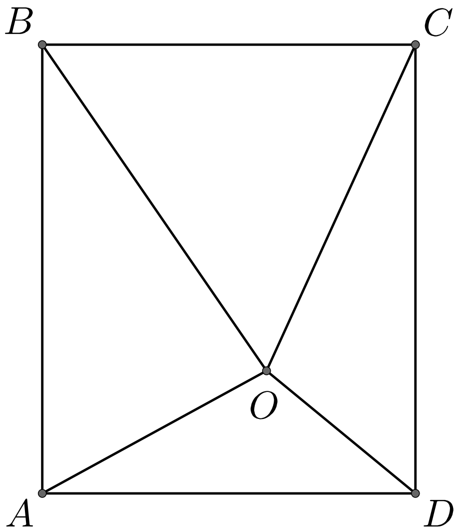
$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

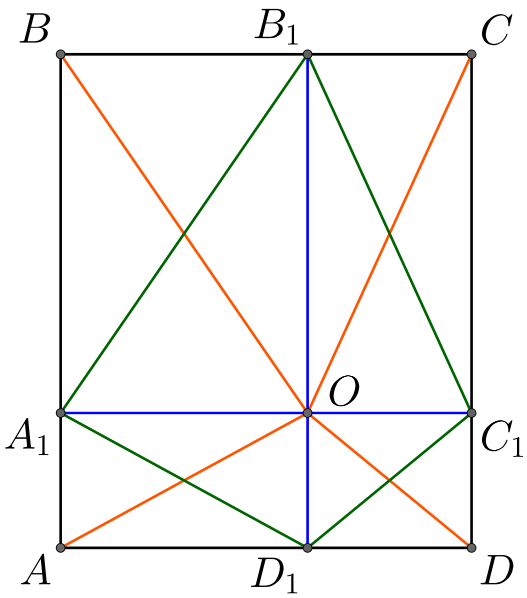


26. $ABCD$ – прямоугольник, точка O лежит внутри данного прямоугольника, тогда

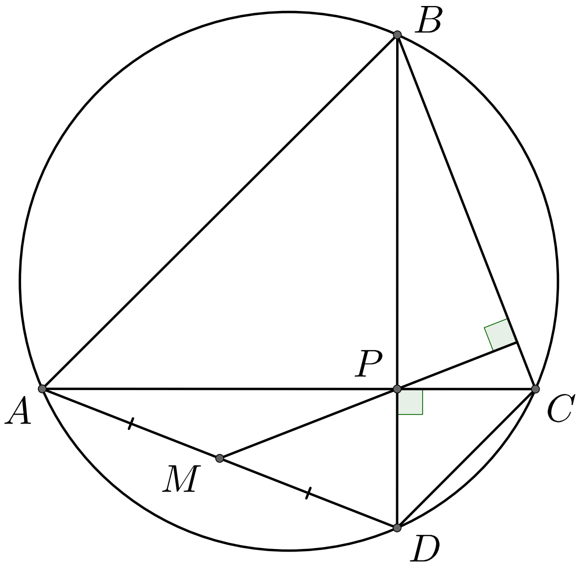
$$AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2.$$

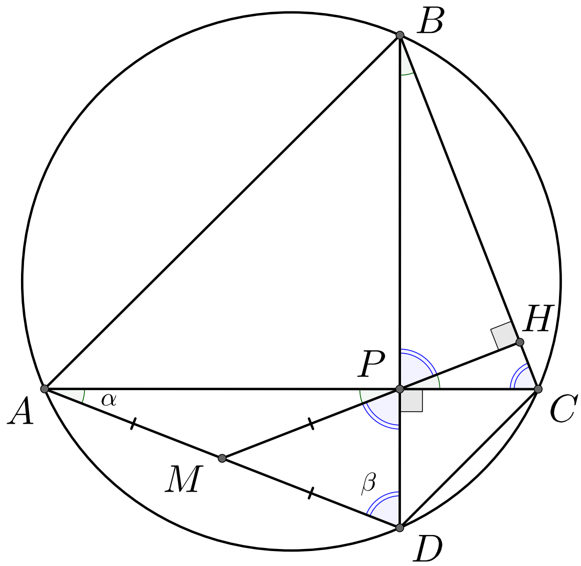
$AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2$



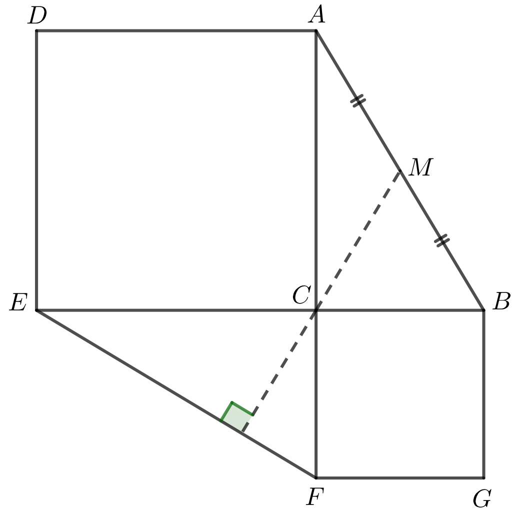


27. $ABCD$ – вписанный четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями, тогда прямая, проходящая через середину одной из сторон четырёхугольника, перпендикулярна противоположной ей стороне.



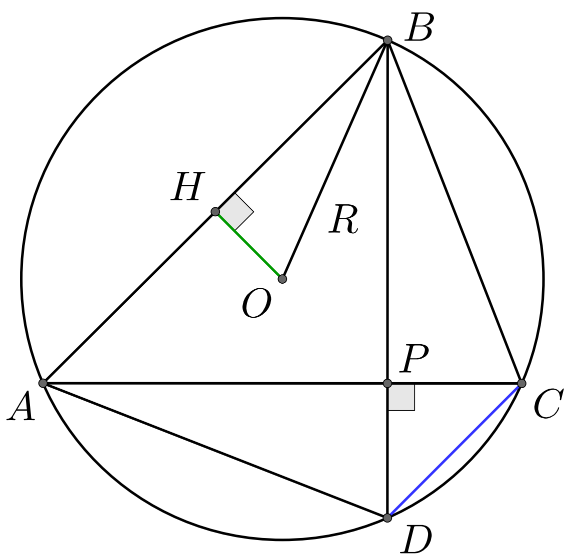


28. На катетах прямоугольного треугольника $\triangle ABC$ с $\angle C = 90^\circ$ построены квадраты $ADEC$ и $BCFG$. Медиана CM $\triangle ABC$ лежит на одной прямой с высотой CH $\triangle CEF$.



29. Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность с центром O, тогда расстояние от точки O до стороны AB вдвое меньше стороны CD.

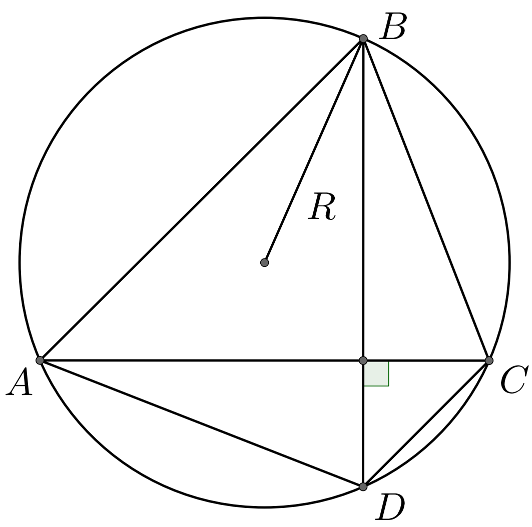
$CD = 2 \cdot OH$



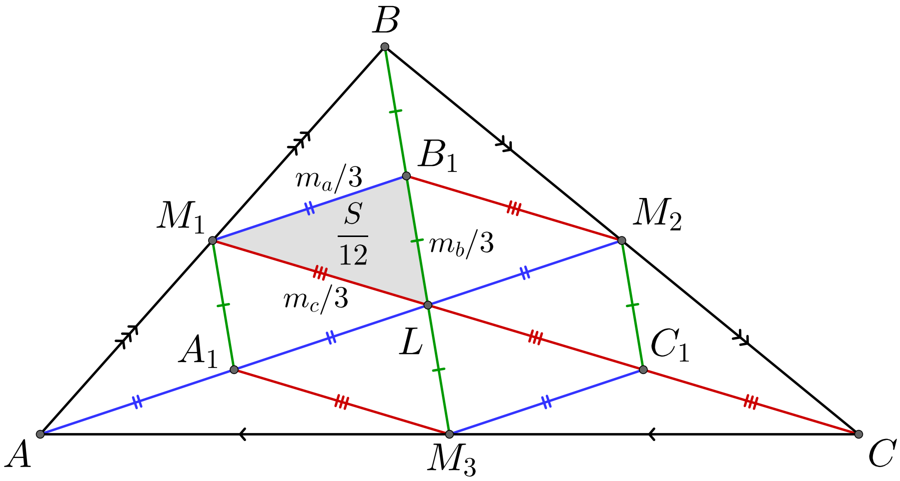
30. Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность с центром O, тогда

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8R^2.$$

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8R^2$

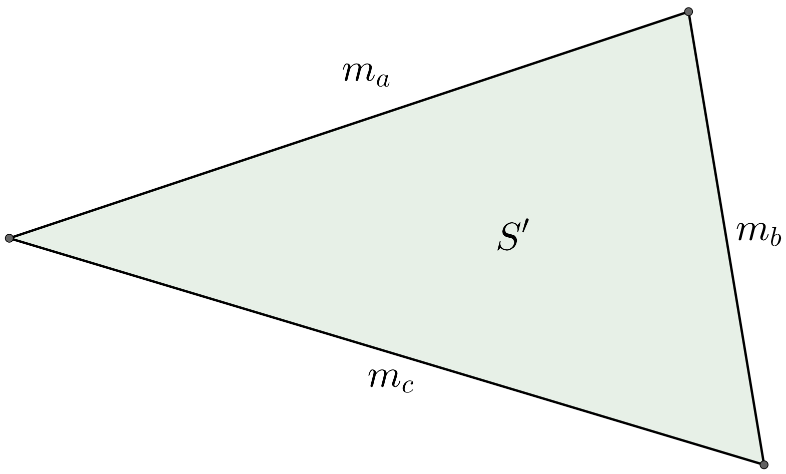


31. Пусть L – точка пересечения медиан треугольника ABC (M_1, M_2, M_3 – середины сторон треугольника), A_1, B_1, C_1 – середины отрезков AL, BL, CL. Тогда треугольник ABC делится на 12 равновеликих треугольников следующим образом:



32. Построим треугольник со сторонами, равными длинам медиан треугольника ABC (m_a, m_b, m_c – длины этих медиан, $m = (m_a + m_b + m_c)/2$). По формуле Герона данный треугольник имеет площадь:

$$S' = \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}$$



Отсюда следует, что площадь треугольника ABC равна

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}.$$

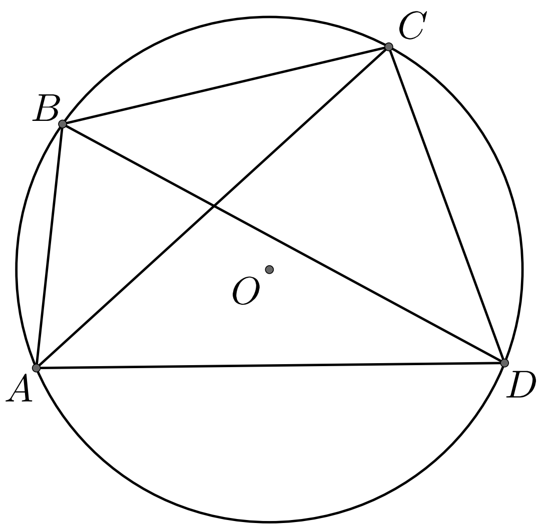
33. **(Теорема Птолемея).** Выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

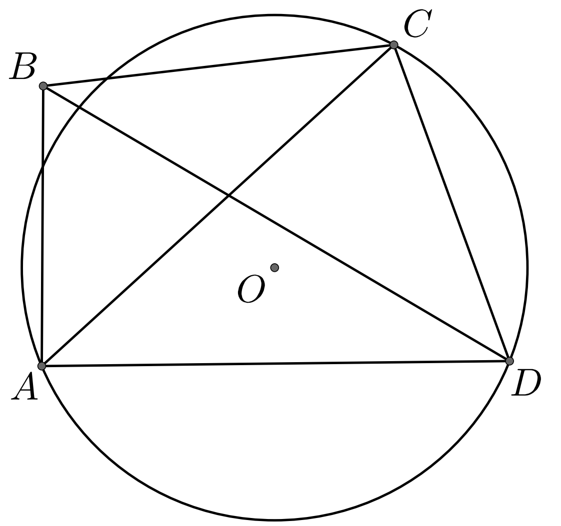
(Неравенство Птолемея). Если же четырёхугольник не является вписанным, то выполнено неравенство

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD.$$

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$



$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD$$

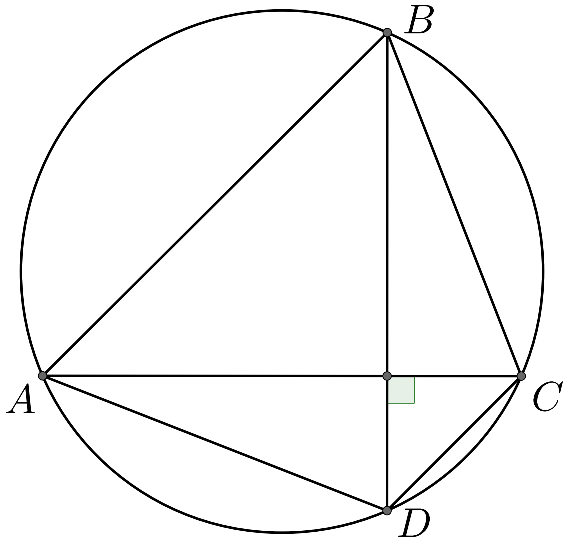


34. **(Следствие из теоремы Птолемея).** Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность с центром O, тогда

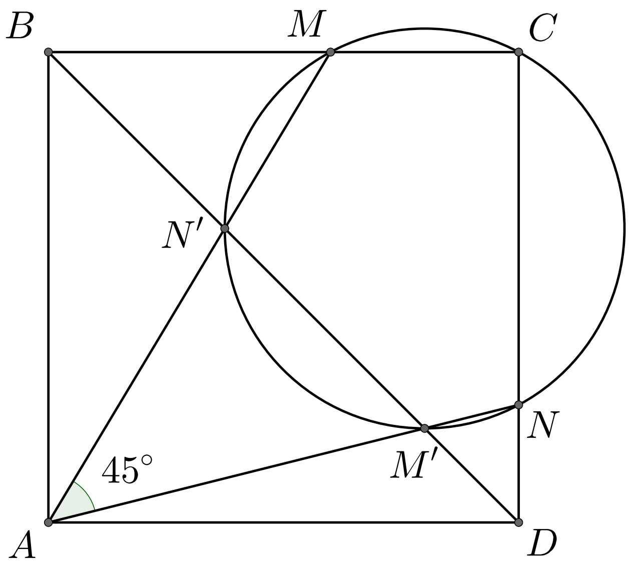
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC).$$

Причём для любого другого четырёхугольника $ABCD$ с теми же сторонами площадь меньше, чем $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC)$.

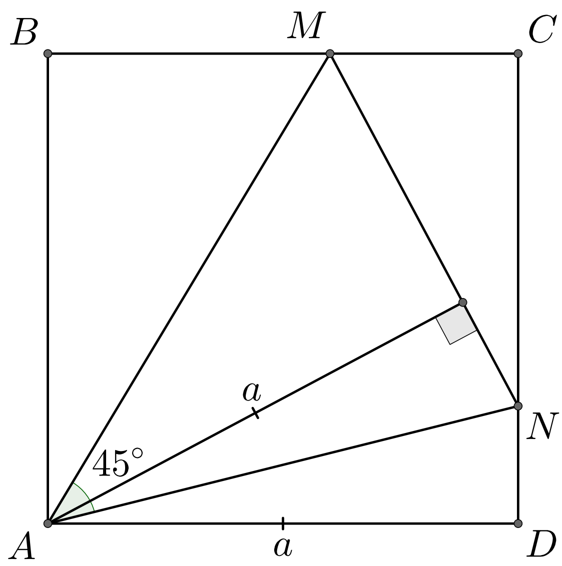
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC)$$



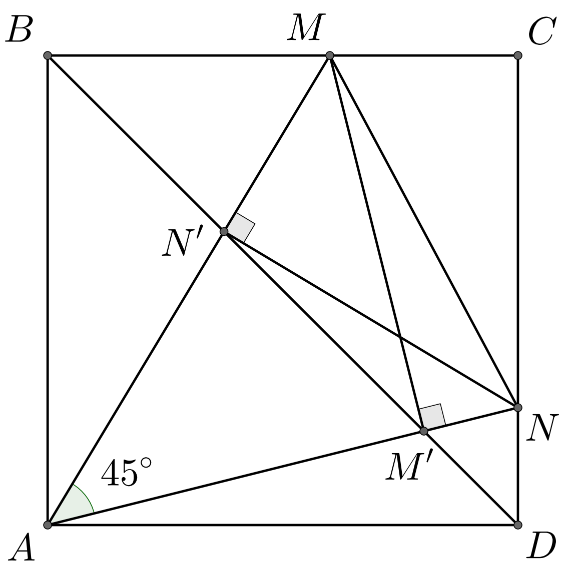
35. $ABCD$ – квадрат, точка M – лежит на стороне BC, N – лежит на стороне CD, $\angle MAN = 45^\circ$, диагональ BD пересекает отрезки AM и AN в точках N' и M' соответственно, тогда через точки M, M', N, N', C можно провести окружность.



36. Расстояние от точки A до прямой MN равно стороне квадрата.



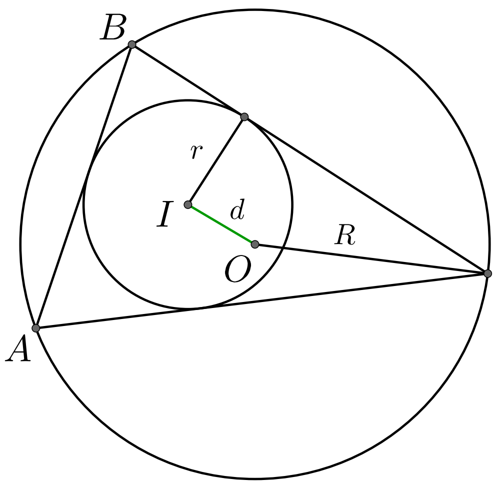
37. Прямые MM' и NN' являются высотами треугольника AMN.



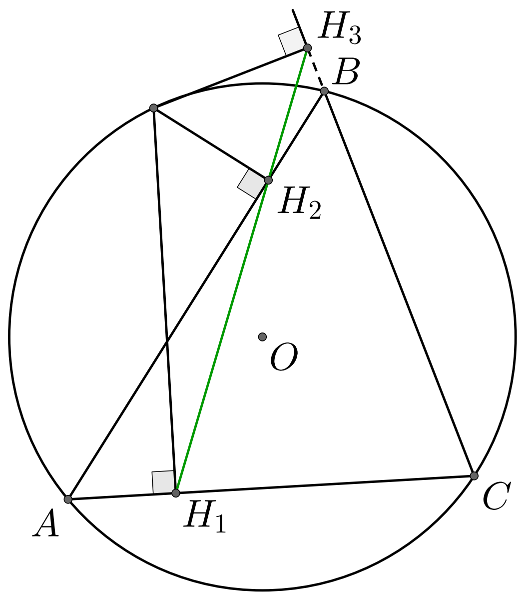
38. Пусть r – радиус вписанной в треугольник окружности, R – радиус описанной вокруг треугольника окружности, d –расстояние между центрами этих окружностей, тогда выполняется равенство:

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

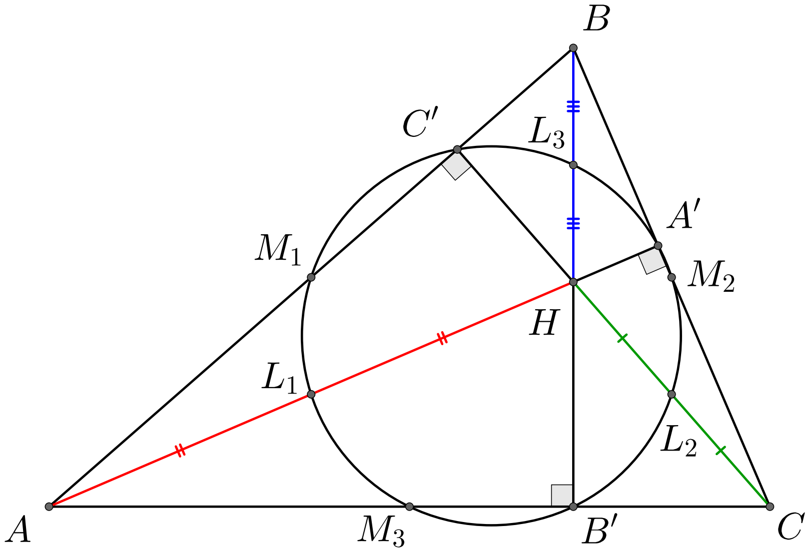
$d^2 = R^2 - 2Rr$



39. Основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности треугольника ABC на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой. Эта прямая называется **прямой Симсона**.



40. **(Окружность девяти точек).** Пусть H – ортоцентр треугольника ABC; A', B', C' – точки пересечения высот со сторонами треугольника; M_1, M_2, M_3 – середины сторон треугольника; L_1, L_2, L_3 – середины отрезков AH, CH, BH соответственно. Тогда через точки A', B', C', M_1, M_2, M_3, L_1, L_2, L_3 можно провести окружность.



41. **(Прямая Эйлера).** Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC, M – центроид треугольника, H – ортоцентр треугольника, тогда точки O, M, H лежат на одной прямой и $OM : MH = 1 : 2$.