Захарова Наталья Яковлевна

Казаров Бениамин Агопович

СБОРНИК РЕАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ С ОСНОВНОГО ЭТАПА ЕГЭ 2023 ПО ПРОФИЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

(С ОТВЕТАМИ)

https://www.youtube.com/@NataliaZakharova

https://egemathschool.ru/

Содержание

Задание №12 3
Задание №13 4
Задание №14 5
Задание №15 6
Задание №16 8
Задание №17 9
Задание №18 10

ЗАДАНИЕ №12

12.1. а) Решите уравнение $2\cos^3 x = \sqrt{3}\sin^2 x + 2\cos x$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z};$

б) $-3\pi;\ -2\pi;\ -\frac{17\pi}{6}$.

12.2. а) Решите уравнение $4\sin^3 x = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi k}{3},\ n, k \in \mathbb{Z};$

б) $\frac{11\pi}{3};\ 4\pi;\ \frac{13\pi}{3}$.

12.3. а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sin x = \sqrt{3}\cos^2 x$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ n, k, m \in \mathbb{Z};$

б) $\frac{3\pi}{2};\ \frac{7\pi}{3};\ \frac{5\pi}{2}$.

12.4.а) Решите уравнение $\cos x \cdot \cos 2x = \sqrt{3}\sin^2 x + \cos x$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z};$

б) $\pi;\ \frac{7\pi}{6};\ 2\pi$.

ЗАДАНИЕ №13

13.1. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=5$ и $BC=3$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M:MD_1=2:3$, а точка K – середина ребра DD_1.

а) Докажите, что плоскость MKC параллельна прямой BD.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания призмы, если $\angle MKC=90^0$, $\angle ADC=60^0$.

Ответ: б) $\frac{\sqrt{19}}{3}$.

13.2. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. На AB отмечена точка P такая, что $AP:PB=3:1$. Точка Q делит пополам ребро B_1C_1. Точка M делит пополам ребро BC. Через точку M проведена плоскость α, перпендикулярная PQ.
а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α.
б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ, если $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $\cos\angle ABC=\frac{3}{5}$.

Ответ: б) $\frac{16}{25}$.

13.2.1 В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. Точка P делит ребро AB в отношении $AP:PB=1:3$, а точка Q– середина ребра A_1C_1. Через середину M ребра BC провели плоскость α, перпендикулярную отрезку PQ.
а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC пополам.
б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок A_1C_1, считая от точки A_1, если известно, что $AB=AA_1$, $AB:BC=2:7$

Ответ: б) $1:2$.

13.3. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с углом 60^0 при вершине A. На ребрах A_1B_1, B_1C_1 и BC отмечены точки M, K и N соответственно так, что четырехугольник $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 4.
а) Докажите, что точка M – середина ребра A_1B_1.
б) Найдите высоту призмы, если ее объем равен 16 и известно, что точка K делит ребро B_1C_1 в отношении $B_1K:KC_1=1:3$.

Ответ: б) $\sqrt{3}$.

13.4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M является серединой ребра BB_1, а точка N – середина ребра A_1C_1. Плоскость α, параллельная прямым AM и B_1N, проходит через середину отрезка MN.
а) Докажите, что плоскость α проходит через середину отрезка B_1M.
б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, если все ребра призмы имеют длину 4.

Ответ: б) $\frac{7\sqrt{6}}{2}$.

ЗАДАНИЕ №14

14.1. Решите неравенство: $\left(\log^2_{0,25}(x+3)-\log_4(x^2+6x+9)+1\right)\cdot\log_4(x+2)\le 0$

Ответ: $(-2;-1]\cup\{1\}$

14.2. Решите неравенство: $\log_{25}((x-4)(x^2-2x-8))+1\ge 0{,}5\log_5(x-4)^2$

Ответ: $[-1{,}96;4)\cup(4;+\infty)$

14.3. Решите неравенство: $\log_{0,2}(x^3-2x^2-4x+8)\le\log_{0,04}(x-2)^4$

Ответ: $[-1;2)\cup(2;+\infty)$

14.4. Решите неравенство: $\log_8(x^3-3x^2+3x-1)\ge\log_2(x^2-1)-5$

Ответ: $(1;31]$

14.5. Решите неравенство: $\dfrac{\log_3(3-x)-\log_3(x+2)}{\log^2_3 x^2+\log_3 x^4+1}\ge 0$

Ответ: $\left(-2;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$

14.6. Решите неравенство: $\dfrac{\log_3 x^2-\log_5 x^2}{\log^2_{15}(2x^2-6x+4{,}5)+1}\ge 0$

Ответ: $(-\infty;-1]\cup[1;1{,}5)\cup(1{,}5;+\infty)$

14.7. Решите неравенство: $\log^2_3(x-4)-\log^2_3(x-6)\le 0$

Ответ: $(6;5+\sqrt{2}]$

ЗАДАНИЕ №15

15.1. В июле 2025 года планируется взять кредит в банке сумму 650 тыс. рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:
– в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 19% по сравнению с концом предыдущего года;
– в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.
– к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен.
Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Ответ: 1300 тыс. рублей

15.2. В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет под 10% годовых. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– в 2030 году долг составит 800 тыс. рублей;
– в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.
Найдите сумму кредита, если общая сумма выплат после полного погашения кредита будет равна 2090 тыс. рублей.

Ответ: 1300 тыс. рублей

15.3. В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1400 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2120 тыс. рублей. Сколько рублей составит платеж в 2026 году.

Ответ: 300000 рублей

15.4. В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 900 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1540 тыс. рублей. Сколько рублей составит платеж в 2035 году.
Ответ: 24000 рублей

15.5. В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле2030 года.
Ответ: 500 000 рублей.

15.6. В июле 2025 года планируется кредит на десять лет в размере 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг будет возрастать на r% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– в 2030 году долг составит 400 тыс. рублей;
– в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.
Найдите r, если общая сумма выплат после полного погашения кредита будет равна 1740 тыс. рублей.
Ответ: 30.

ЗАДАНИЕ №16

16.1. Прямая, перпендикулярная стороне AD ромба $ABCD$, пересекает его диагональ AC в точке M, диагональ BD в точке N, причем $AM:MC=1:2$, $BN:ND=1:3$.

а) Докажите, что $\cos\angle BAD=\frac{1}{5}$.

б) Найдите площадь ромба, если $MN=5$.

Ответ: б) $60\sqrt{6}$

16.2. Прямая, перпендикулярная стороне BC ромба $ABCD$, пересекает его диагональ AC в точке M, а диагональ BD в точке N, причем $AM:MC=1:2$, $BN:ND=1:3$.

а) Докажите, что прямая MN делит сторону ромба BC в отношении 1:4.

б) Найдите сторону ромба, если $MN=\sqrt{6}$.

Ответ: б) 6

16.3. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Биссектрисы углов BAD и BCD пересекаются в точке O. На боковых сторонах AB и CD отмечены точки M и N соответственно так, что $AM = MO$, $CN = NO$.

а) Докажите, точки M, N и O лежат на одной прямой.

б) Найдите $AM:MB$, если известно, что $AO=OC$ и $BC:AD=1:7$.

Ответ: б) 1:2

16.4. Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Через точку O провели прямую, параллельную основаниям трапеции.

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если известно, что $AO=OC$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM:MB=2:3$.

Ответ: б) 7:17

16.5. Дан равносторонний треугольник ABC. На стороне AC выбрана точка M, серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает сторону AB в точке E, а сторону BC в точке K.

а) Докажите, что угол AEM равен углу CMK.

б) Найдите отношение площадей треугольников AEM и CMK, если $AM:CM=1:4$.

Ответ: б) 4:9

16.6. Биссектриса AM острого угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ делит боковую сторону CD пополам. Отрезок DN перпендикулярен отрезку AM и делит сторону AB в отношении $AN:NB=7:1$.

а) Докажите, что прямые BM и CN перпендикулярны.

б) Найдите длину отрезка MN, если площадь трапеции равна $4\sqrt{55}$.

Ответ: б) 4

ЗАДАНИЕ №17

17.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(xy-x+8)\cdot\sqrt{y-x+8}=0\\ y=2x+a\end{cases}$$

имеет ровно дваразличныхрешения.

Ответ: $(-16;-9]\cup\{-7;9\}$

17.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(xy-x+7)\cdot(y-x+7)=0\\ y=3x+a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $\{-21;-9;1-2\sqrt{21};1+2\sqrt{21}\}$

17.3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x^2-6x-y+2)\cdot\sqrt{x-y+2}=0\\ y=ax+a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $\{-2;1\}\cup\left[\frac{9}{8};2\right)$

17.4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x^2+y^2+4x)\cdot\sqrt{2x+y+6}=0\\ y=ax-2a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\cup\left[-\frac{3}{14};\frac{1}{2}\right]$

17.5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x^2-2x-y+2)\cdot\sqrt{x-y+2}=0\\ y=4x+a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $(-7;2)$

17.6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(|x+2|+|x-1|-y\right)\cdot\sqrt{10-x-y}=0,\\ y=x+a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $\{2\}\cup[4;32)$

17.7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(xy-2x+16)\cdot\sqrt{y-2x+16}=0\\ y=ax-14\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{7}{4}\right]\cup\{2;4\}$

ЗАДАНИЕ №18

18.1. На доске написано трехзначное число A. Сережа зачеркивает одну цифру и получает двузначное число B, затем Коля записывает число A и зачеркивает 1 цифру (возможно ту же, что и Сережа), и получает число C.
а) Может ли быть верным равенство $A = B \cdot C$, если $A > 140$?
б) Может ли быть верным равенство $A = B \cdot C$ если $440 \le A < 550$?
в) Найдите наибольшее число $A \le 900$, чтобы было верным равенство $A = B \cdot C$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 810.

18.2. Из пары натуральных чисел (a;b), где $a > b$, за один ход получают пару (a+b; a-b).
а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары (50;9) пару, большее число в которой равно 200?
б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары (50;9) пару (408;370)?
в) Какое наименьшее a может быть в паре (a;b), из которой за несколько ходов можно получить пару (408;370)?

Ответ: а) да; б) нет; в) 204.

18.3. На столе лежат три карточки, на каждой из которых написана одна цифра. Ваня составил из написанных на карточках цифр трехзначное число A. Петя выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число B и вернул карточки на место. Коля тоже выбрал две из этих трёх карточек и составил из написанных на них цифр двузначное число C (возможно, что такое же, что и Петя).
а) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если $A > 150$?
б) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если числа B и C делятся на 9?
в) Найдите наименьшее числоA, для которого может быть верным равенство $A = B + C$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 109.

18.4. В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 46%.
а) Может ли в этом классе быть 9 девочек?
б) Может ли доля девочек составить 55% девочек, если в этот класс придёт новая девочка?
в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 48.

18.5. Для чисел A и B, состоящих из одинакового количества цифр, вычислили S – сумму произведений соответствующих цифр. Например, для чисел A = 123 и B = 579 получается сумма $S = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9 = 46$.
а) Существуют ли трёхзначные числа A и B, для которых S = 100?
б) Существуют ли пятизначные числа A и B, для которых S = 400?
в) Верно ли, что любое натуральное число от 1 до 260 является суммой для некоторых четырёхзначных чисел A и B?

Ответ: а) да; б) нет; в) верно.

18.6. Из пары натуральных чисел $(a;b)$ за один ход можно получить пару $(a+2;b-1)$ или $(a-1;b+2)$, при условии, что оба числа в новой паре положительны. Сначала есть пара (7;11).

а) Можно ли за 20 таких ходов получить пару, в которой одно из чисел равно50?

б) За какое число ходов получится пара, сумма чисел в которой равна600?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать так, чтобы после каждого хода оба числа в паре не превосходили 50?

Ответ: а) нет; б) 582; в) 81.

18.7. Из правильной дроби $\frac{a}{b}$, где a и b – натуральные числа, за один ход получают дробь $\frac{a+b}{2a+b}$.

а) Можно ли за несколько таких ходов из дроби $\frac{2}{3}$ получить дробь $\frac{29}{41}$?

б) Можно ли за два таких хода из некоторой дроби получить дробь $\frac{6}{7}$?

в) Несократимая дробь $\frac{c}{d}$ меньше 0,7. Найдите наибольшую дробь $\frac{c}{d}$, которую нельзя получить ни из какой правильной несократимой дроби за 2 таких хода.

или

в) Несократимая дробь $\frac{c}{d}$ больше 0,7. Найдите наименьшую дробь $\frac{c}{d}$, которую нельзя получить ни из какой правильной несократимой дроби за 2 таких хода.

Ответ: а) да; б) нет; в.1) 3/4; в.2) 2/3.