Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$2\sin^2 x\cdot\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=\sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

13 Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм. На рёбрах A_1B_1, B_1C_1 и BC отмечены точки M, K и N соответственно, причём $B_1K:KC_1=1:2$, а $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.
а) Докажите, что N — середина BC.
б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12, а её высота равна 2.

14 Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x^2-\log_3 x^2}{\log_6^2\left(2x^2-10x+12{,}5\right)+1}\geq 0.$$

15 В июле 2025 взяли кредит на 10 лет на 800 тыс. руб.
— в январе начисляется r% по кредиту;
— с февраля по июнь в 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 долг уменьшается равномерно на какую то сумму;
— в конце 2030 года долг составляет 200 тыс. руб;
— с февраля по июнь в 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 долг уменьшается равномерно на другую сумму;
— к 2035 году кредит должен быть выплачен.
Найдите r, если общая сумма выплат составила 1480 тыс. руб.

2023

16 Дан равносторонний треугольник ABC. На стороне AC выбрана точка M, серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает сторону AB в точке E, а сторону BC в точке K.
а) Докажите, что $\angle AEM=\angle CMK$.
б) Найдите отношение площадей треугольников AEM и CMK, если $AM:CM=1:4$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2+6x\right)\sqrt{x+y+6}=0,\\ y=x+a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18 На доске написано трёхзначное число A. Серёжа зачёркивает одну цифру и получает двузначное число B, затем Коля записывает число A и зачёркивает одну цифру (возможно ту же, что Серёжа) и получает число C.
а) Может ли быть верным уравнение $A=B\cdot C$, если $A>140$?
б) Может ли быть верным уравнение $A=B\cdot C$, если $440\leq A<500$?
в) Найдите наибольшее число A до 900, для которого выполняется $A=B\cdot C$.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Номер задания	Ответ
12	а) $\pi k;\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n;k,n\in Z$ б) $3\pi;\frac{23\pi}{6};4\pi$
13	б) $1{,}5\sqrt{37}$
14	$(-\infty;-1]\cup[1;2{,}5)\cup(2{,}5;+\infty)$
15	20
16	б) $4:9$
17	$\left\{3\pm 3\sqrt{2}\right\}\cup[0;6]$
18	а) да; б) нет; в) 810

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$\sin 2x - 2\sin(-x) - \cos(-x) - 1 = 0.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

13 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены середины M и N отрезков AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $B_1N = 3\sqrt{5}$.

14 Решите неравенство

$$5^x + \frac{125}{5^x - 126} \geq 0.$$

15 В июле 2022 планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите сумму кредита, если известно, что кредит будет полностью выплачен за 3 года, причём в первый и второй год будет выплачено по 300 тыс. рублей, а в третий 421,2 тыс. руб.

2022

16 На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка M такая, что треугольник AMC — равнобедренный, так, что $AM = MC$.

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник AMD лежит на диагонали параллелограмма.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AMD, если известно, что $AB = 7$, $BC = 21$ а $\angle DAB = 60^\circ$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 + a^2 - 5x - 4a\right| = x + a$$

имеет 4 решения.

18 С натуральным трёхзначным числом проводят следующую операцию: из числа вычитают его сумму цифр, и полученный результат делят на 3.

а) Может ли результатом выполнения операции быть число 300?

б) Может ли результатом выполнения операции быть число 151?

в) Сколько различных результатов можно получить, если применить данную операцию для всех трёхзначных чисел от 100 до 600?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Номер задания	Ответ
12	а) $\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi l; n,k,l \in Z$ б) $\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}; 3\pi$
13	б) 2
14	$[0; 3] \cup (\log_5 126; +\infty)$
15	600 тыс. руб.
16	б) $\frac{147\sqrt{3}}{2\left(34 + \sqrt{127}\right)}$
17	$a \in (-1; -0{,}5) \cup (0; 4)$
18	а) да; б) нет; в) 51

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$4\sin^3 x + 2\sqrt{3}\cos 2x + 3\sin x = 2\sqrt{3}.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14 В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* сторона основания равна 14, высота *SH* равна 24. Точка *K* — середина бокового ребра *SD*, а точка *N* — середина ребра *CD*. Плоскость *AKB* пересекает боковое ребро *SC* в точке *P*.
а) Докажите, что прямая *KP* пересекает отрезок *SN* в его середине.
б) Найдите расстояние от точки *P* до плоскости *ABS*.

15 Решите неравенство

$$9^{\frac{1}{x}-1} + 2\cdot 3^{\frac{1}{x}-1} - 3 \geq 0.$$

16 Около трапеции *ABCD* с бóльшим основанием *AD* описана окружность. *BH* — высота трапеции, вторично пересекающая описанную окружность в точке *K*.
а) Докажите, что прямые *AC* и *AK* перпендикулярны.
б) Прямые *CK* и *AD* пересекаются в точке *N*. Найдите *AD*, если радиус описанной около трапеции *ABCD* окружности равен 6, $\angle BAC = 30°$, а площадь четырёхугольника *BCNH* в 35 раз больше площади треугольника *NKH*.

2021

17 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 900 тыс. рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:
— в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 12% по сравнением с концом предыдущего года;
— в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 8% по сравнением с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен.
Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 - a^2\right| = |x + a| \cdot \sqrt{x^2 - ax + 4a}$$

имеет два различных корня.

19 На доске написаны три различных числа. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго.
а) Может ли сумма этих чисел быть равна 420?
б) Может ли сумма этих чисел быть равна 419?
в) В тройке чисел первое число трёхзначное, а третье число равно 5. Сколько существует таких троёк чисел?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Номер задания	Ответ
13	а) $\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; б) $-3\pi; -2\pi; -\frac{5\pi}{3}$.
14	б) $\frac{168}{25}$
15	$(0; 1]$
16	б) $2\sqrt{24}$
17	1 440 000 рублей
18	$a \in (-\infty; -2] \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$
19	а) да, например 398, 20 и 2; б) нет; в) 85

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sqrt{2}\cos x=0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=5$, $SK:KB=4:3$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K.

а) Докажите, что плоскость α содержит точку C.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α.

15 Решите неравенство

$$x^2\log_{343}(x+3)\le\log_7\left(x^2+6x+9\right).$$

16 В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC, а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C, причём $CM=BC$ и $CN=AC$.

а) Отрезки CH и CF — высоты треугольников ACB и NCM соответственно. Докажите, что прямые CH и CF перпендикулярны.

б) Прямые BM и AN пересекаются в точке L. Найдите LM, если $BC=4$, а $AC=8$.

2020

17 В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 220 тыс. рублей. Условия его возвраты таковы:

— каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 220 тыс. рублей;

— выплаты в 2030 и 2031 годах равны;

— к июлю 2031 года долг будет погашен полностью.

Найдите r, если известно, что долг будет выплачен полностью и общий размер выплат составит 420 тыс. рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{16-y^2}=\sqrt{16-a^2x^2}\\ x^2+y^2=8x+4y\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

19 На доске написано несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 6.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 198?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 270?

в) Какое наибольшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1518?

Номер задания	Ответ
13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k, \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$; б) $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{13\pi}{4}; -\frac{11\pi}{4}; -\frac{5\pi}{2}$
14	б) $\frac{9\sqrt{31}}{7}$
15	$\left(-3;-\sqrt{6}\right]\cup\left[-2;\sqrt{6}\right]$
16	б) $2\sqrt{2}$
17	20
18	$(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\frac{1}{2}\right)\cup\{0\}\cup\left(\frac{1}{2};2\right)\cup(2;+\infty)$
19	а) да; б) нет; в) 8

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}75.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 7, а боковое ребро SA равно 14. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причем $DN:NC = SK:KC = 2:5$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой AS.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой BC.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α.

15 Решите неравенство $\log_4(6-6x) \ge \log_4\left(x^2-5x+4\right) - \log_4(x+3)$.

16 Около остроугольного ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN. Высота BH пересекает эту окружность в точке K. Известно, что $\angle BAC = 35^\circ$, $\angle ACB = 65^\circ$.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите KN, если радиус окружности равен 12.

2019

Составитель: Ягубов Р.Б. Оформление: Рязанов Н.А.

МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень. Вариант 290520191

17 В июле планируется взять кредит в банке на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что за весь период кредитования выплатили на 15% больше, чем взяли в кредит.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|4x| - x - 3 - a}{x^2 - x - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

19 Есть синие и красные карточки. Всего карточек 50 штук. На каждой написаны натуральные числа, среднее арифметическое которых равно 16. Все числа на синих карточках разные. При этом любое число на синей карточке больше, чем любое на красной. Числа на синих увеличили в 2 раза, после чего среднее арифметическое стало равно 31,2.

а) Может ли быть 10 синих карточек?

б) Может ли быть 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть?

Номер задания	Ответ
13	а) $\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$ б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$
14	б) $\frac{\sqrt{210}}{3}$
15	$[-2; 1)$
16	б) 12
17	1,875 %
18	$(-3; +\infty) \setminus \{0; 2; 6; 12\}$
19	а) да б) нет в) 35

Для записи решений и ответов на задания 13−19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin x + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin 2x + 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

14 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причем BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.
а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$.

15 Решите неравенство $\log_7(2x^2 + 12) - \log_7(x^2 - x + 12) \ge \log_7\left(2 - \frac{1}{x}\right)$.

16 Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC, CD и AD. Известно, что $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 30$, $AD = 39$.
а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
б) Найдите O_1O_2.

17 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысяч рублей?

18 Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(a+1)x - 2ay + 5a^2 + 8a + 3 = 0, \\ y^2 = x^2. \end{cases}$$
имеет ровно четыре различных решения.

19 В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
а) Мог ли средний балл в школе № 1 вырасти в два раза?
б) Средний балл в школе № 1 вырос на 10%, средний балл в школе № 2 также вырос на 10%. Мог ли первоначальный балл в школе № 2 равняться 1?
в) Средний балл в школе № 1 вырос на 10%, средний балл в школе № 2 также вырос на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

2018

Автор: Никита Андреевич Рязанов

Для записи решений и ответов на задания 13−19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $3\log_8^2(\sin x)-5\log_8(\sin x)-2=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

14 Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что $AA_1=AC$

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 если $AC=6$, $BC=3$.

15 Решите неравенство $\dfrac{3^x+9}{3^x-9}+\dfrac{3^x-9}{3^x+9}\geq\dfrac{4\cdot3^{x+1}+144}{9^x-81}$.

16 Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B, причём точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB. Продолжения диаметра CA первой окружности и хорды CB этой окружности пересекают вторую окружности в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите AD, если $\angle DAE=\angle BAC$, радиус второй окружности втрое больше радиуса первой и $AB = 3$.

17 15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условие его выплаты таковы:

— 1-го числа k-ого месяца долго возрастёт на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число k-ого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа k-того месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\ln(3a-x)\ln(2x+2a-5)=\ln(3a-x)\ln(x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке [0; 2].

19 Каждый из 28 студентов писал или одну из двух контрольных работ, или написал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 15. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов равно S.

а) Приведите пример, когда $S < 15$.

б) Могло ли оказаться, что только два студента написали обе контрольные работы, если $S = 13$?

в) Какое наименьшее количество студентов могло написать обе контрольные работы, если $S = 13$?

2017

13. а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\pi + 2\pi n$; $n \in Z$ б) $-\frac{5\pi}{3}; -3\pi$

14. На ребрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем DP=4, а $B_1Q=3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.
а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ

Ответ: $\frac{12\sqrt{26}}{13}$

15. Решите неравенство:

$$\frac{9^x - 3^{x+1} - 19}{3^x - 6} + \frac{9^{x+1} - 3^{x+4} + 2}{3^x - 9} \le 10 \cdot 3^x + 3$$

Ответ: $(-\infty; 1]; (\log_3 6; 2)$

16. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N – середины катетов AC и BC соответственно, CH – высота.
а) Докажите, что прямые MH и NH перпендикулярны
б) Пусть P – точка пересечения прямых AC и NH, а Q – точка пересечения прямых BC и MH. Найдите площадь треугольника PQM, если AH=4 и BH=2.

Ответ: $18\sqrt{2}$.

17. Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x – целое число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

Ответ: 8.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)(y+3x-9) = |x-3|^3 \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения

Ответ: $(-7;-3); (-3;1)$

19. На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A, среднее арифметическое чисел во второй группе равно B. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу)
а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$
б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 15 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$
в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$

Ответ: а) например, в первой группе все «5», во второй – все «3» и «4»; в) $4\frac{14}{29}$

15. а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x}=9^{2\sin 2x}$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,-\frac{\pi}{6}+2\pi n,-\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\quad k,n,m\in Z$ б) $-\frac{\pi}{2};-\frac{3\pi}{2};-\frac{5\pi}{6}$

16. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины ребер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану основания CE в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

17. Решите неравенство:

$$\left(\log_2^2 x-2\log_2 x\right)^2<11\log_2^2 x-22\log_2 x-24$$

Ответ: $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right);(8;16)$

18. Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырехугольника ABCD, причем B и C – вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырехугольника ABCD пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N – точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырехугольника ABCD, если известно, что BM:MC=1:3, а площадь четырехугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

Ответ: 96.

19. Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2+2x+6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-\left(0,5x^2+2x+6\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Ответ: $p=10$

20. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2+x-2=\left|x^2+x-2\right| \\ x-y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений

Ответ: $a=0;\quad 2<a<-1+\sqrt{10}$

21. В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600000 рублей (размер премии каждого сотрудника – целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

Ответ: а) да; б) нет; в) 26

C1. а) Решите уравнение $3\cdot 9^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^{x}+3\cdot 4^{x+1}=0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;3]$

Ответ: а) $\log_{\frac{3}{2}}3;\log_{\frac{3}{2}}4$ б) $\log_{\frac{3}{2}}3$

C2 Высота цилиндра равна 3. Равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной 10 и углом А, равным 120 градусов, расположен так, что его вершина А лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины В и С – на окружности верхнего основания. Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра.

Ответ: $\arcsin\frac{3}{5}$

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 16^{x-\frac{5}{4}}-3\cdot 4^{x-\frac{3}{2}}+1\ge 0 \\ \log_2\dfrac{2x^2+5x-7}{3x-2}\le 1 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{7}{2};-1\right];\frac{3}{2}$

C4 К двум непересекающимся окружностям равных радиусов проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках A и B. Через точку C, лежащую на отрезке AB, проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках D и E, причем отрезки CA и CD касаются одной окружности, а отрезки CB и CE – другой.
а) Докажите, что периметр треугольника CDE вдвое больше расстояния между центрами окружностей.
б) Найдите DE, если радиусы окружностей равны 5, расстояние между их центрами равно 18, а AC=8

Ответ: 12,375.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(tgx+6)^2-(a^2+2a+8)(tgx+6)+a^2(2a+8)=0$$

имеет на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ ровно два решения

Ответ: $\left(-\sqrt{6};-2\right);\left(-2;-1\right);4$

C6 В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причем и тех, и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.
а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?
б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?
в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?

Ответ: а) да; б) 17; в) 41

2014

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x} \dfrac{x-4}{(x-3)^2} \geq -2, \\ x^3 + 6x^2 + \dfrac{21x^2 + 3x - 12}{x-4} \leq 3. \end{cases}$$

C4 Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$$

имеет единственный корень.

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

2013

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1 *а)* Решите уравнение $36^{\sin 2x} = 6^{2\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

С2 Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью A_1BE, если ребра куба равны 2.

С3 Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{9^x - 3^x - 90}{3^x - 82} \le 1, \\ \log_2 16x \ge \log_{0,5x} 2 \cdot \log_4 16x^4. \end{cases}$

С4 Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 7. Найдите радиус окружности касающейся окружностей, описанных около треугольников BOD, DOF, BOF.

С5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $|x^2 - 4x + a| \le 10$, выполняется для всех $x \in [a; a+5]$.

С6 Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности полученных сумм и полученные 6 чисел складывают.
а) может ли в результате получиться 0?
б) может ли в результате получиться 1?
в) какое наименьшее возможное значение полученного результата?

2012

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1 Решите уравнение $(4\cos^2 x + 8\cos x - 5) \cdot \log_{17}(\sin x) = 0$.

С2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 4, а боковые рёбра равны 3, найдите расстояние от точки B до прямой A_1F_1.

С3 Решите неравенство $5\log_{11}\left(x^2 + 11x + 18\right) \le 6 + \log_{11}\dfrac{(x+9)^5}{x+2}$.

С4 Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 24, а синус угла при основании равен $\frac{4}{5}$.

С5 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left(|x| - 4\right)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ (x+1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

2011

С6 На доске написано более 56, но менее 72 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 8, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -16.
а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?