Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2023 года

ВАРИАНТ 231

1. Найдите наименьшее целое число, превосходящее $\dfrac{\sqrt{8}}{\dfrac{\sqrt{2}}{20}+\dfrac{\sqrt{2}}{23}}$.

2. Дана последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ действительных чисел. Найдите a_8, если известно, что $a_1 = 1$ и что для любой пары индексов n, m, таких что $n \geqslant m \geqslant 0$, справедливо равенство $a_{n+m} + a_{n-m} = 2(a_n + a_m)$.

3. Решите неравенство

$$x^{\log_3 \sqrt{x}} > 9.$$

4. Решите уравнение

$$\cos 3x + 2\sin 2x + 2\cos x = 0.$$

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AF, BD и CE. Найдите все возможные значения разности углов $\angle A$ и $\angle B$ треугольника, если известно, что $DE : EF = BC : AC$.

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{a}{2+a^2} + \dfrac{b}{2+b^2} + \dfrac{c}{2+c^2}$.

7. В правильной треугольной пирамиде $ABCS$ проведено сечение через ребро основания AB перпендикулярно боковому ребру CS. Найдите его площадь, если известно, что площадь основания пирамиды равна 3, а площадь каждой боковой грани равна $\sqrt{5}$.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2023 года

ВАРИАНТ 233

1. Найдите целое число, задающееся выражением $\dfrac{3}{\sqrt[4]{16}} + \dfrac{5}{\sqrt[3]{27}} + \dfrac{11}{\sqrt{36}}$.

2. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ получается из последовательности натуральных чисел вычёркиванием всех полных квадратов (то есть $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 6$, $a_5 = 7$, $a_6 = 8$, $a_7 = 10$ и т.д.). Найдите a_{2023}.

3. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{3-x}}(3+x) \leqslant 2.$$

4. Решите уравнение

$$\cos^4 x - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

5. Прямая ℓ касается окружности, описанной около треугольника ABC, в точке A. Известно, что $AB > AC$ и что $AC = 1$. На стороне AB отмечена точка D так, что $AD = AC$. Прямая, проходящая через точку D и через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, пересекает прямую ℓ в точке E. Найдите длину отрезка AE.

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $ab + bc\sqrt{3}$.

7. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания равной 1, если известно, что плоские углы при вершине равны углам наклона боковых рёбер к плоскости основания.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2023 года

ВАРИАНТ 234

1. Найдите $f\left(\dfrac{3}{5}\right)$, если $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{x^2}}$.

2. Дана последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ действительных чисел. Найдите a_1, если известно, что $a_8=8$ и что для любого индекса n справедливо равенство

$$a_{n+1}=\sqrt[7]{2}\,a_n+\left(\sqrt[7]{2}-1\right)n-1.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x}\right)^{3+\log_3 x}\geqslant 3^{1+\log_3 x}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}=4.$$

5. На сторонах AB, BC, CD, AD вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки E, F, G, H. Известно, что $AE=EB$, $2BF=FC$, $CG=GD$, $DH=2HA$ и что площадь четырёхугольника $ABCD$ в два раза больше площади четырёхугольника $EFGH$. Найдите отношение $AC:BD$.

6. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{c-b}{a+2b+c}+\frac{2b}{a+b+2c}-\frac{4c}{a+b+3c}$$

при положительных a, b, c.

7. Расстояния от (внутренней) диагонали прямоугольного параллелепипеда до его рёбер, не имеющих с этой диагональю общих точек, равны $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{\dfrac{6}{5}}$. Найдите объём этого параллелепипеда.