Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»

И.Ю. Черникова
Н.С. Шабрыкина

ТВОРЧЕСКИЕ И ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО КОМБИНАТОРИКЕ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

СЕРИЯ: ИНЖЕНЕРНЫЙ ВУЗ ШКОЛЕ

Издательство «ПУШКА»
2015

УДК 372.85
ББК 22.14/Я 72-6
Т 28

Рецензенты:
Н.Д. Няшина (канд. физ.-мат. наук, доцент ПНИПУ)
О.В. Трегубова (Лицей № 1 г. Перми)

Черникова И.Ю., Шабрыкина Н.С.

Т 28 ТВОРЧЕСКИЕ И ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО КОМБИНАТОРИКЕ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ: Учебное пособие / И. Ю. Черникова, Н. С. Шабрыкина – Пермь: Издательство «Пушка», 2015. – 55 с.

Приведены сведения по дополнительным разделам школьной математики – комбинаторике и основам теории вероятностей. Предложены творческие и исследовательских заданий интегративного характера для классной и самостоятельной работы учащихся 9–11-х профильных естественнонаучных классов и классов с углубленным изучением математики, физики, информатики.

УДК 372.85

Учебное пособие подготовлено в рамках государственного задания Минобрнауки России для ФГБОУ ВПО «ПНИПУ» в 2015 г. по НИР «Разработка и апробация программного комплекса творческих и исследовательских заданий по математическим и естественнонаучным дисциплинам для профильных школ и классов с углублённым изучением предметов».

ISBN 978-5-98799-141-1

Оглавление

Введение

Учебный курс «Творческие и исследовательские задания по комбинаторике и теории вероятностей» предназначен для учащихся 9–11-х профильных классов и классов с углубленным изучением математики, физики, информатики и предметов химико-биологического цикла.

Сложные вопросы дискретной математики станут понятными старшеклассникам не только через освоение теоретического материала, осознанного с помощью учителя, но и при решении творческих задач в микрогруппах, выполнении заданий самостоятельной работы, решении домашних исследовательских заданий с пояснениями к задачам авторов пособия.

Этот курс поможет учащимся, заинтересованным в продолжение образования в инженерном вузе, изучить теоретический материал, освоить новые методы исследования научных знаний и прикладных вопросов математики, физики, информатики и биологии.

Материал курса будет полезен учащимся 10–11-х профильных классов, а также 8-9-х предпрофильных классов, где курс выбран в качестве факультатива.

Учебный курс состоит из следующих тем:

1. Введение в комбинаторику. Факториал. Основное правило комбинаторики.
2. Перестановки. Размещения.
3. Сочетания.

4. Соединения с повторениями.
5. Решение комбинаторных задач.
6. Введение в теорию вероятностей. Классическое определение вероятности.
7. Виды случайных событий и действия над ними.
8. Сложение и умножение вероятностей.
9. Использование графов для вычисления вероятностей.
10. Формула полной вероятности. Теорема Байеса.
11. Примеры практического применения теории вероятностей.

Предлагаемое учебное пособие имеет целью дать учащемуся материал, необходимый для работы. В сборнике содержатся несложные учебные, домашние задания, отмеченные знаком ○, сложные задачи или задания повышенного уровня, отмеченные знаком ●.

В пособии предлагается большое количество заданий с той целью, чтобы учащийся имел возможность свободного выбора их – в соответствии со своим уровнем знаний.

КОМБИНАТОРИКА

Основные понятия

Факториал

Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел меньших или равных n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

При этом полагают, что $0! = 1$.

Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Следует отметить, что факториал очень быстро возрастает при увеличении числа n.

Из определения факториала вытекает следующее свойство:

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) = n!(n+1).$$

Например, $6! = 5! \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720$.

<u>Пример 1</u>. Доказать формулу $(n+1)! - n! = n! \cdot n$.

Воспользуемся свойством факториала:

$$(n+1)! - n! = (n+1) \cdot n! - n! = ((n+1) - 1)n! = n! \cdot n.$$

<u>Пример 2</u>. Преобразовать выражение $\dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$.

По свойству факториала:

$$\frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!} = \frac{(n+2)(n+1)! + (n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!} =$$

$$= \frac{(n+2+1)(n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!} = \frac{(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{n+2}.$$

Основное правило комбинаторики

Рассмотрим несколько примеров.

<u>Пример 3</u>. Для того, чтобы доехать от дома до школы, ученику надо сделать одну пересадку. От дома до места

пересадки ходит три вида транспорта, от места пересадки до школы – четыре. Сколько существует различных способов ученику добраться от дома до школы?

Если ученик доехал до места пересадки на первом виде транспорта, то от места пересадки он может добраться до школы на одном из четырех видов транспорта, таким образом, получится четыре варианта добраться до школы. Аналогично по четыре варианта будет получаться, если ученик до места пересадки поедет на транспорте № 2 или № 3. А значит, общее количество вариантов $3\cdot 4=12$.

Пример 4. Участникам олимпиады выдают комплект из блокнота, ручки и карандаша. При этом каждый предмет случайным образом достают из трех коробок: в первой коробке лежат блокноты трех различных цветов, во второй – ручки четырех цветов, в третьей – карандаши шести цветов. Сколько различных вариантов комплектов можно составить?

Поскольку в коробках есть блокноты 3 цветов, ручки 4 цветов и карандаши 6 цветов, общее количество вариантов составления комплектов $3\cdot 4\cdot 6=72$.

Обобщая приведенные выше примеры, можно сформулировать следующее правило.

Основное правило комбинаторики. Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и т.д. k-ое – n_k способами, то все n действий могут быть выполнены $n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Соединения

Одним из основных понятий комбинаторики являются соединения. *Соединениями* называют подмножества, составленные из элементов некоторого множества по определенным правилам. Различают три вида соединений: перестановки, размещения и сочетания.

Перестановки

Рассмотрим множество из n различных элементов. Будем переставлять эти элементы всевозможными способами, сохраняя неизменным их количество, и только меняя их местами. Все получившиеся таким образом различные комбинации носят названия *перестановок* из n элементов. Их количество обозначаются P_n.

Например, составим перестановки из трех элементов множества $\{a,b,c\}$:

$$\{a,b,c\},\ \{a,c,b\},\ \{b,a,c\},\ \{b,c,a\},\ \{c,a,b\},\ \{c,b,a\}.$$

Как видно, таких перестановок шесть, т. е. $P_3 = 6$.

Выясним, чему равняется число перестановок из n элементов. На первом месте в перестановке может стоять любой из n элементов множества. Поскольку элементы не должны повторяться, на втором месте может стоять любой из $n-1$ элементов, на третьем – любой из $n-2$, и так далее. На предпоследнем месте придется выбирать уже только из двух элементов, а на последнем месте может стоять только один оставшийся элемент. Таким образом, по основному правилу комбинаторики всего имеем:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

<u>Пример 5</u>. Сколькими способами можно рассадить за столом с шестью стульями шестерых человек?

Поскольку каждый человек может занять только одно место, и важен только порядок их рассадки, а не количество человек, количество вариантов определяется формулой $P_6 = 6! = 720$.

Пример 6. Доказать тождество $P_n = (n-1)\left(P_{n-1} + P_{n-2}\right)$.

Преобразуем правую часть выражения:

$$(n-1)\left(P_{n-1} + P_{n-2}\right) = (n-1)\left((n-1)! + (n-2)!\right) =$$

$$= (n-1)\left((n-2)!(n-1) + (n-2)!\right) = (n-1)(n-2)!\left((n-1)+1\right) =$$

$$= (n-1)(n-2)!n = n! = P_n.$$

Размещения

Рассмотрим множество из n различных элементов и будем составлять из элементов этого множества группы по k элементов в каждой ($k \le n$), располагая взятые k элементов в различном порядке. Получающиеся при этом подмножества называются *размещениями* из n элементов по k. Их общее число обозначается A_n^k.

Например, составим размещения из трех элементов множества $\{a,b,c\}$ по два элемента:

$$\{a,b\},\ \{b,a\},\ \{a,c\},\ \{c,a\},\ \{b,c\},\ \{b,a\}.$$

Как видно, таких размещений шесть, т. е. $A_3^2 = 6$.

Общая формула для размещений из n по k элементов A_n^k имеет вид:

$$A_n^k = n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-\left(k-1\right)\right) = \frac{n!}{\left(n-k\right)!}.$$

Пример 7. Из десяти кандидатов надо выбрать троих на три различные должности. Сколькими способами это можно сделать?

Поскольку должности разные, порядок расположения кандидатов имеет значение. Поэтому надо определить количество размещений из десяти элементов по три $A_{10}^{3}=\frac{10!}{7!}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!}=720$.

<u>Пример 8</u>. Решить уравнение $A_{x+1}^{x-1}+2P_{x-1}=\frac{30}{7}P_x$.

По определению размещений и перестановок $x\geq 1$, $x\in\mathbb{N}$. Воспользуемся формулами для числа размещений и перестановок:

$$\frac{(x+1)!}{(x+1-(x-1))!}+2(x-1)!=\frac{30}{7}x!$$

$$\frac{(x+1)!}{2!}+2(x-1)!=\frac{30}{7}x!$$

По свойству факториала:

$$\frac{(x+1)x(x-1)!}{2}+2(x-1)!=\frac{30}{7}x(x-1)!$$

Так как $x=1$ не удовлетворяет данному уравнению, можно сократить на $(x-1)!$. Получаем:

$$\frac{(x+1)x}{2}+2=\frac{30}{7}x,$$

$$7x^2-53x+28=0.$$

Корни данного уравнения $x_1=7$, $x_2=\frac{4}{7}$. Поскольку $x\in\mathbb{N}$, значит $x=7$.

<u>Пример 9</u>. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

Поскольку число должно делиться на 5, оно должно заканчиваться либо на 0, либо на 5. Для каждого из этих случаев на остальные места из четырех оставшихся цифр нужно поставить три, значит количество вариантов равно A_4^3. Значит всего вариантов расположения чисел, заканчивающихся на 0 или 5 – $2A_4^3$. Но на первом месте в числе не может стоять ноль, значит из этого количества нужно вычесть варианты расстановки, при которых ноль стоит на первом месте, а 5 – на последнем. Таких вариантов A_3^2. Окончательно получаем:

$$2A_4^3 - A_3^2 = 2\frac{4!}{1!} - \frac{3!}{1!} = 2\cdot 4! - 3! = 3!(2\cdot 4 - 1) = 6\cdot 7 = 42.$$

В заключение следует отметить, что перестановки являются частным случаем размещений при $k = n$:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Сочетания

Рассмотрим множество из n различных элементов и будем составлять из элементов этого множества группы по k элементов в каждой ($k \le n$), не обращая внимания на порядок элементов в группе. Получающиеся при этом подмножества называются *сочетаниями* из n элементов по k. Их общее число обозначается C_n^k.

Например, составим сочетания из трех элементов множества $\{a,b,c\}$ по два элемента:

$$\{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\}.$$

Как видно, таких сочетаний 3, т.е. $C_3^2 = 3$.

Найдем общую формулу для нахождения C_n^k. Пусть составлены все сочетания C_n^k из n элементов по k в каждом.

Если в каждом из этих сочетаний переставлять элементы всевозможными способами (а таких способов P_k), то получим все размещения из элементов по k:

$$A_n^k = C_n^k P_k,$$

или

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Для сочетаний справедливы следующие свойства:

$$C_n^k = C_n^{n-k},$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

<u>Пример 10</u>. Из десяти кандидатов надо выбрать трех на три одинаковые должности. Сколькими способами это можно сделать?

Поскольку должности одинаковые, порядок кандидатов не важен. Поэтому используются сочетания $C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!6} = \frac{720}{6} = 120$.

<u>Пример 11</u>. Класс из 30 человек разбивают на три группы по 10 человек в каждой. Сколько существует различных составов групп?

Сначала из 30 человек выбирают группу в 10 человек. Вариантов таких групп C_{30}^{10}, затем из оставшихся 20 человек выбирают еще 10: C_{20}^{10}. В конце остается 10 человек, которые и составят последнюю группу. По основному правилу комбинаторики общее количество групп $C_{30}^{10}C_{20}^{10}C_{10}^{10} = \frac{30!}{20!10!}\cdot\frac{20!}{10!10!}\cdot 1 = \frac{30!}{(10!)^3}$.

Пример 12. В чемпионате мира по футболу участвует 20 команд. Их необходимо разбить на несколько групп с одинаковым количеством участников для проведения группового турнира по круговой системе (внутри группы каждая команда должно сыграть с каждой только один раз). На сколько групп необходимо разбить команды, чтобы общее количество игр было наименьшим.

Команды можно разбить либо на 4 группы по 5 команд, либо на 5 групп по 4 команды, либо на 2 группы по 10 команд. В каждом из случаев количество игр равно $4C_5^2 = 4\dfrac{5!}{3!2!} = 40$, $5C_4^2 = 5\dfrac{4!}{2!2!} = 30$, $2C_{10}^2 = 2\dfrac{10!}{8!2!} = 90$. Наименьшее количество игр – 30 при разбиении на 5 группы по 4 команды.

Пример 13. Найти сумму всех решений неравенства $C_{x+1}^{x-1} < 21$.

Отметим, что $x \geq 1$, $x \in \mathbb{N}$. По формуле для вычисления числа сочетаний:

$$\frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} < 21,$$

$$\frac{(x+1)x}{2} < 21,$$

$$x^2 + x - 42 < 0,$$

$$x \in (-7;6).$$

Учитывая ограничения на значения переменной, решение данного неравенства $x \in \{1,2,3,4,5\}$. Сумма чисел равна 15.

Соединения с повторениями

Во всех предыдущих типах соединений были рассмотрены случаи, когда выбирались подмножества из множества, содержащего различные элементы, причем элементы получающихся подмножеств также были различны.

Тем не менее, в комбинаторике нередко приходится иметь дело с повторяющимися элементами. При этом используют размещения, перестановки и сочетания с повторениями.

Перестановки с повторениями

Рассмотрим множество, состоящее из n элементов, причем в нем n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, и т. д., n_k элементов k-го типа. Тогда из элементов этого множества можно составить следующее количество различных *перестановок с повторениями*:

$$\frac{P_n}{P_{n_1}\cdot P_{n_2}\cdot\ldots\cdot P_{n_k}}=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}.$$

<u>Пример 14</u>. Вычислить количество различных перестановок букв $aaabbcc$. Данное множество содержит три группы одинаковых букв: по 3, по 2 и по 2 буквы, всего 7. Тогда количество различных перестановок равно:

$$\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 2}=5\cdot 6\cdot 7=210.$$

Размещения и сочетания с повторениями

Размещения и сочетания с повторениями определяются аналогично размещениями и сочетаниям без повторений с той лишь разницей, что в каждом подмножестве допускается присутствие повторяющихся элементов.

Например, из двух элементов $\{a,b\}$ можно составить следующие размещения с повторениями по три элемента:

$$\{a,a,a\},\ \{a,a,b\},\ \{a,b,a\},\ \{b,a,a\},\ \{a,b,b\},\ \{b,a,b\},$$
$$\{b,b,a\},\ \{b,b,b\}.$$

Из тех же элементов сочетания с повторениями по три элемента будут следующими:

$$\{a,a,a\},\ \{a,a,b\},\ \{a,b,b\},\ \{b,b,b\}.$$

Количество размещений и сочетаний с повторениями обозначаются $\tilde{A}_n^k$ и $\tilde{C}_n^k$ соответственно и вычисляются по следующим формулам:

$$\tilde{A}_n^k = n^k,$$

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Для приведенных выше примеров $\tilde{A}_2^3 = 2^3 = 8$, $\tilde{C}_2^3 = \frac{(2+3-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3!} = 4$.

Пример 15. В лифт на первом этаже девятиэтажного дома вошло 4 человека. Сколькими способами они могут выйти из лифта?

Рассмотрим в качестве исходного множество 8 возможных этажей и будем составлять множества из 4 элементов, числа в которых будут означать номер этажа, на котором выйдет данный человек. Например, множество $\{3,3,4,7\}$ означает, что первые два человека вышли на 3 этаже, третий – на 4 и последний на 7. Поскольку на одном этаже может выйти несколько человек, количество вариантов равно $\tilde{A}_8^4 = 8^4 = 4096$.

Пример 16. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр от 1 до 8, так чтобы в каждом числе была только одна единица. Остальные цифры могут повторяться.

Единицу можно поставить на любое из 4 мест. Затем их семи оставшихся цифр надо выбрать 3, причем цифры могут повторяться. Получится $4\tilde{A}_7^3 = 4 \cdot 7^3 = 1372$ чисел.

Пример 17. Сколькими способами можно распределить 10 одинаковых шаров по 7 ящикам?

Поскольку шары одинаковые, количество вариантов определяется как $\tilde{C}_{10}^7 = \dfrac{16!}{7!9!} = 11440$.

Задания для самостоятельной работы

1. ○ $\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$.
2. ○Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи так, чтобы одна не могла взять другою? Одна ладья может взять другую, если они расположены на одной вертикали или на одной горизонтали шахматной доски.
3. ●В некотором классе в среду семь уроков: алгебра, геометрия, литература, русский язык, английский, биология и физкультура. В скольких вариантах расписания предметы естественнонаучного и гуманитарного цикла будут идти блоками, разделенными физкультурой.

4. ●За круглым столом надо рассадить 5 мальчиков и 5 девочек так, чтобы рядом не сидели люди одного пола. Сколькими способами это можно сделать?
5. ●Доказать, что $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.
6. ○В цветочном магазине есть 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать букет из 5 гвоздик одного цвета?
7. ○Собрание из 80 человек избирает председателя, секретаря и трех членов ревизионной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?
8. ●Сколькими способами можно 10 одинаковых подарков распределить между 6 детьми так, чтобы каждый получил хотя бы один подарок?
9. ○Шесть ящиков различных материалов доставляют на пять этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам, если на пятый этаж будет доставлен только один ящик.
10. ●Сколько различных семизначных чисел можно записать, используя только три цифры 1, 2, 3, при условии, что цифра 2 в каждом числе встречается два раза?

Ответы и рекомендации

1. $$\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}=\frac{(2n+1)!(1+2n+2)}{(2n+2)!(2n+3-1)}=\frac{2n+3}{(2n+2)(2n+2)}=\frac{2n+3}{(2n+2)^2}$$
2. 3136. Первую ладью можно поставить на любую из 64 клеток, тогда вторую ладью нельзя ставить на ту же вертикаль и горизонталь, что первую.
3. 72. В каждом блоке по три предмета. Физкультура обязательно должна стоять четвертым уроком, а расположение блоков до и после физкультуры может меняться.

4. 28800. Стулья за столом можно условно разделить на четные и нечетные. Тогда девочки садятся только на четные стулья, а мальчики – на нечетные (или наоборот).
5. Левая часть:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\big((k+1)+(n-k)\big) =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.$$

Правая часть:

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.$$

6. 253. Можно выбрать либо все розовые гвоздики (1 вариант), либо 5 из десяти красных гвоздик. На выбор порядок цветов в букете не влияет.
7. $\dfrac{C_{16}^2 C_{14}^2 \ldots C_2^2}{8!} = \dfrac{16!}{2^8 \cdot 8!} = 2027025.$
8. 126. Любой возможный способ дележа подарков можно изобразить как 10 клеток, разделенных 5 перегородками. Здесь перегородка отделяет, сколько подарков достанется каждому из детей. Все возможные варианты дележа подарков определяются количеством вариантов расположения 5 перегородок на 9 возможных местах.
9. 6144. На пятый этаж можно доставить один из шести ящиков. Тогда остальные 5 надо распределить по оставшимся 4 этажам.

10. 672. Сначала из имеющихся свободных 7 разрядов числа выберем два для размещения двух двоек, затем оставшиеся 5 мест заполним набором из 2 цифр, которые могут повторяться.

Задания для домашней работы

1. ○Вычислите $1!+4!+5!$

   Упростить выражения:
2. ○ $\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$,
3. ● $\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$,
4. ● $\dfrac{4n!-3(n-1)!}{3n\cdot n!+(n-1)!}$,
5. ○Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 4, 5, 9?
6. ○16 участников шахматного турнира играют в зале, где имеется 8 столиков. Сколькими способами можно расположить за столами шахматистов, если участники всех партий известны?
7. ●На книжной полке располагается собрание сочинений из 30 томов. Сколькими способами можно расставить книги на полке, чтобы первый и второй том не стояли рядом?
8. ●Решить уравнение $A_x^{x-3}=x\cdot P_{x-2}$.
9. ○Расписание одного учебного дня содержит 5 уроков по разным предметам. Сколько вариантов расписания можно составить, если ученики изучают 11 предметов.

10. ●Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, содержат цифру 3 (цифры в числе не повторяются)?
11. ●На первом этаже в лифт садится 3 человека. Сколькими способами люди могут выйти на разных этажах, если в доме 12 этажей, а кнопка второго этажа сломана?
12. ●Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, чтобы цифры не повторялись и крайние цифры были четными?
13. ○Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?
14. ●Из 20 вопросов к экзамену ученик хорошо выучил 12. Билет на экзамене состоит из трех вопросов. Найти а) общее количество различных билетов, б) количество билетов, в которых ученик знает большую часть вопросов.
15. ○Из группы в 15 человек выбирают четырех участников эстафеты 800+400+200+100 м. Сколькими способами можно распределить участников эстафеты по этапам?
16. ○Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи так, чтобы одна могла взять другою?
17. ●Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (по две каждый). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?
18. ○В турнире участвуют 16 шахматистов. Определить количество различных расписаний турнира. Расписания считаются разными, если отличаются участники хотя бы одной партии; цвет фигур и номер доски не учитывается.
19. ●Мама составила на холодильнике из букв-магнитов слово «колобок», после чего пришел ребенок стал переставлять буквы в слове. Сколько различных «слов» (не обязательно осмысленных) может получиться у ребенка?

20. ○Кодовый замок чемодана состоит из трех цифр. Сколько вариантов кодов существует для данного замка?
21. ●Автомобильный номер в каждом из регионов России состоит из трех букв и трех цифр. Причем используются только 12 букв, у которых есть аналоги в латинском алфавите. В цифровой части номера ноль может стоять на первом месте. Сколько существует вариантов таких номеров?

Ответы

1. 145.	8. 7.	15. 32760
2. $\frac{1}{n}$.	9. 55440.	16. 896
3. $\frac{n+3}{n+1}$.	10. 204.	17.2520
4. $\frac{4n-3}{3n^2+1}$.	11. 720.	18. 2027025
5. 15.	12. 720.	19. 420.
6. 40320.	13. 1140.	20. 1000.
7. $29!\cdot 28$.	14. а) 1140; б) 748.	21. 1728000.

Контрольная работа

1. Вычислите $A_8^4 - P_4$.
2. В цветочном магазине есть 10 белых и 5 красных роз. Определите, сколькими способами можно выбрать букет из 3 белых и 4 красных роз.
3. Сколькими способами можно распределить 5 учеников по трем параллельным классам?
4. Решите уравнение $A_x^2 - C_x^{x-1} = 24$.

В задачах 5-7 в ответ записать только формулу, вычислять количество вариантов не требуется.

5. Из 8 юношей и 6 девушек составляют три танцевальных пары. Сколькими способами это можно сделать?
6. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов распределения групп по аудиториям, при которых группы 1 и 2 находились бы в соседних аудиториях?
7. В шахматном турнире среди участников были две женщины. Каждый участник турнира сыграл с остальными по две партии. Число партий, сыгранных мужчинами между собой, оказалось на 66 больше числа партий, сыгранных мужчинами с женщинами. Сколько всего партий было сыграно в турнире?

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Классическое определение вероятности

В основе теории вероятности лежит понятие *события*. Под событием будет понимать любой результат опыта или наблюдения (*испытания*).

Исторически первым появилось так называемое *классическое определение вероятности*. Если событию A благоприятствует m из n возможных исходов испытания, то его вероятность находиться как отношение числа благоприятных исходов к общему их числу:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Например, вероятность того, что монетка упадет «орлом» вверх равна 1/2, т. к. возможны только два исхода (упадет вверх «орлом» или «решкой») и благоприятным из них является только один.

Несмотря на интуитивность данного определения, следует понимать ряд ограничений, которые необходимо учитывать при его использовании:

1. число исходов конечно;
2. один из исходов обязательно произойдет;
3. два исхода одновременно произойти не могут;
4. все исходы равновозможны.

При использовании классического определения вероятности следует строго соблюдать все перечисленные выше условия. Так, например, нельзя сказать, что вероятность встретить на улице живого медведя равна 1/2, т. к. здесь два исхода (встретишь медведя или не встретишь его) не являются равновозможными.

Пример 1. Сравнить вероятности выпадения сумм 6 и 7 при бросании двух игральных костей.

Всего существует $6\cdot 6=36$ возможных исходов. Сумму в шесть очков можно получить при следующих сочетаниях очков: 1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1, итого 5 исходов, вероятность равна $5/36$; сумма в семь очков: 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1, всего 6 исходов, вероятность $6/36$. Следовательно, вероятность того, что выпадет 7 очков, больше.

Пример 2. На каждые 100 качественных кошельков, выпушенных фабрикой, приходятся 8 бракованных кошельков. Найти вероятность появления качественного кошелька среди продукции этой фабрики.

Всего выпущено 108 кошельков, из них 100 не имеют дефектов, значит вероятность купить качественный кошелек равна $\dfrac{100}{108}\approx 0,96$.

Пример 3. В конференции, продолжительность которой 5 дней, запланировано 75 докладов: первые три дня по 17 докладов, остальные доклады поровну распределены между оставшимися днями. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что ваш доклад, поданный на конференцию, выпадет на последний день.

В первые три дня пройдет 51 доклад, а на последний день останется $\frac{75-51}{2}=12$ докладов. Тогда вероятность, что доклад попадет на последний день конференции, равна $\frac{12}{75}=0{,}16$.

<u>Пример 4</u>. Куб, все грани которого окрашены, разрезан на 1000 кубиков одинакового размера. Маленькие кубики тщательно перемешаны и из них наугад выбран один. Найти вероятность того, что этот кубик имеет: а) три окрашенные грани, б) две окрашенные грани, с) одну окрашенную грань.

Три грани окрашены у кубиков, которые находились в вершинах исходного куба, которых 8 штук. Значит, вероятность достать такой кубик равна 0,008. Две грани окрашены у кубиков, которые располагались на ребрах (их 12), но не в вершинах: $10-2=8$ кубиков, вероятность $\frac{12\cdot 8}{1000}=0{,}096$. По одной грани окрашено у кубиков, которые лежали на гранях (их 6), но не на ребрах: на каждой грани таких кубиков $100-4\cdot 8-4=64$, вероятность $\frac{64\cdot 6}{1000}=0{,}256$.

Следует отметить, что при решении задач теории вероятностей часто удобно пользоваться формулами комбинаторики.

<u>Пример 5</u>. Сравните вероятности выпадения суммы в 9 и 10 очков при броске трех игральных костей.

Всего существует $6^3=216$ исходов. Сумма в 9 очков выпадает в комбинациях: $\{1,2,6\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,4,4\}$, $\{2,2,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,3,3\}$; в 10 очков – $\{1,3,6\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,4\}$, $\{2,2,6\}$, $\{3,3,4\}$. В первом случае в трех вариантах цифры различны, т. е. существует по $3!$ перестановок каждого из вариантов; в двух вариантах два значения повторяются, т. е. перестановок с повторениями $\frac{3!}{2!}=3$ и в одном варианте все цифры одинаковы. Всего $3\cdot 3!+2\cdot 3+1=25$ вариантов, вероятность $\frac{25}{216}$. Аналогично для суммы 10 очков вариантов $3\cdot 3!+3\cdot 3=27$, вероятность $\frac{27}{216}$, что больше, чем для 9.

Пример 6. В классе учится 6 мальчиков и 4 девочки. По списку класса наугад выбрали 7 человек для ответа у доски. Найти вероятность того, что среди отвечающих окажется ровно три девочки.

Всего в классе 10 человек, из которых выбирают 7, поэтому общее число возможных исходов равно C_{10}^7. Из 4 имеющихся девочек по условию выбрали троих, это можно сделать C_4^3 способами, при этом остальных 4 человек необходимо выбрать из 6 мальчиков: C_6^4. Искомая вероятность

$$\frac{C_4^3C_6^4}{C_{10}^7}=\frac{4!6!}{3!4!2!}\cdot\frac{7!3!}{10!}=\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{8\cdot 9\cdot 10}=\frac{1}{2}.$$

Виды случайных событий и действия над ними

Все наблюдаемые нами события можно разделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные. *Достоверным* называется событие, которое обязательно произойдет, *невозможным* – событие, которое точно не произойдет. С*лучайным* является событие, которое может либо произойти, либо нет. Например, событие «при бросании игральной кости выпало число от 1 до 6 очков» является достоверным, «при бросании игральной кости выпало число 7» – невозможным, а «при бросании игральной кости выпало число 3» – случайным.

Достоверное событие обозначается Ω, невозможное – $\varnothing$. При этом вероятность достоверного события равна единице, а невозможного – нулю: $P(\Omega)=1$, $P(\varnothing)=0$. Вероятность же любого случайного события $P(A)\in[0;1]$.

Суммой $A+B$ двух событий A и B называется появление события A, или события B, или обоих этих событий одновременно.

Произведением $A\cdot B$ двух событий A и B назовется совместное появление данных событий.

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в том же испытании. Для несовместных событий справедливо равенство $A\cdot B=\varnothing$.

Несколько несовместных событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появиться только одно из них. Например, события «монета упадет орлом» и «монета упадет решкой» составляют полную группу.

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* для события A, если они вместе образуют полную группу. Для противоположных событий справедливо $A+\overline{A}=\Omega$ и $A\cdot\overline{A}=\varnothing$.

Сложение вероятностей

Для произвольных событий A и B имеет место формула: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$.

Если события A и B несовместны, то $P(A\cdot B)=0$ и формула сложения вероятностей приобретает вид $P(A+B)=P(A)+P(B)$. Или для любого конечного числа событий $P\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}P\left(A_i\right)$.

Поскольку противоположные события дают в сумме достоверное событие, имеют место формулы $P(A)+P(\bar{A})=1$ или $P(\bar{A})=1-P(A)$.

<u>Пример 7</u>. При производстве шурупов длиной 15 мм вероятность того, что длина будет отличаться от необходимой не более чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найти вероятность того, что случайно выбранный шуруп будет короче 14,99 мм или длиннее 15,01 мм.

Вероятность того, что длина шурупа находится в отрезке $[14{,}99;15{,}01]$ по условию равна 0,965. Тогда вероятность противоположного события равна $1-0{,}965=0{,}035$.

<u>Пример 8</u>. В магазине автомобильных запчастей продаются новые и бывшие в употреблении детали. 60% деталей являются бывшими в употреблении, 61% – бывшими в употреблении или с дефектами, 5% имеют дефекты. Какова вероятность, что случайно выбранная деталь будет одновременно не новой и с дефектами.

Обозначим за A событие «выбранная случайно деталь не новая», за B событие «выбранная случайно деталь имеет дефекты». По условию задачи $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}05$, а вероятность их суммы $P(A+B)=0,61$. Тогда из формулы сложения вероятностей:

$$P(A\cdot B)=P(A+B)-\big(P(A)+P(B)\big)=0,61-(0,6+0,05)=0,05.$$

Пример 9. Из группы случайным образом выбран один студент. Вероятность, что выбрана девушка, равна 0,5. Вероятность, что выбранный студент работает, равна 0,6. Являются ли эти события несовместными?

Данные события не являются несовместными, поскольку для несовместных событий справедлива формула $P(A+B)=P(A)+P(B)$. В данном случае сумма вероятностей $P(A)+P(B)=1,1$, что невозможно, т. к. вероятность любого события лежит в отрезке $[0;1]$.

Пример 10. Вероятность того, что новый утюг исправно проработает больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он не сломается больше двух лет, равна 0,89. найти вероятность того, что утюг прослужит исправно больше года, но менее двух лет.

Пусть A событие «утюг проработает исправно больше года, но меньше двух лет», B – «утюг проработает больше двух лет». Эти события несовместные, а их сумма дает событие «утюг проработает больше года». Тогда $P(A+B)=P(A)+P(B)$

или $P(A)=P(A+B)-P(B)=0,97-0,89=0,08$.

Умножение вероятностей

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже произошло. События A и B называются *независимыми*, если появление события A не изменит вероятность события B, т. е. $P_A(B)=P(B)$.

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Для независимых событий вероятность их совместного появления $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Пример 11. Команды Динамо и Спартак играют два матча в футбол: на своем поле и на поле соперника. Если команда Динамо играет на своем поле, то выигрывает у Спартака с вероятностью 0,52. На чужом поле Динамо выигрывает с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что Динамо выиграет оба матча. Возможности выигрыша в каждом из матчей не зависят друг от друга, поэтому вероятность произведения независимых событий вычисляется по формуле $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}52 \cdot 0{,}3 = 0{,}156$.

Пример 12. На полке стоят 6 учебников, из которых три по математике. С полки наугад взяли два учебника. Найти вероятность того, что оба они окажутся учебниками по математике.

Введем обозначения событий: A – первым взяли учебник по математике, B – вторым взяли учебник по математике. Вероятность того, что первый взятый учебник будет учебником по математике равна $P(A) = 3/6 = 1/2$. Вероятность, что второй учебник тоже по математике равна условной вероятности появления события B в предположении, что событие A уже наступило. Но т. к. выбираем уже из пяти учебников, среди которых только два по математике, эта вероятность равна $P_A(B) = 2/5$. Вероятность того, что оба учебника по математике равна вероятности одновременного появления событий A и B, и по формуле умножения вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Пример 13. У мальчика в кармане было 2 пятирублевых и 4 десятирублевых монеты. Мальчик наугад переложил 3 монеты в другой карман. Найти вероятность того, что пятирублевые монеты находятся в разных карманах.

Чтобы пятирублевые монеты находились в разных карманах, мальчик должен был переложить только одну из них и еще две десятирублевые монеты. Вероятность, что первой он переложил пятирублевую монету, равна 2/6. Условная вероятность того, что второй была десятирублевая монета, равна 4/5, а что десятирублевой была и третья монета – 3/4. Тогда вероятность произведения этих событий $\frac{2}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4} = \frac{1}{5} = 0,2$. Но пятирублевую монету мальчик мог достать также второй или третьей. Вероятности в этих случаях равны $\frac{4}{5}\frac{2}{6}\frac{3}{4} = 0,2$ и $\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{6} = 0,2$. Тогда вероятность, что пятирублевые монеты будут лежать в разных карманах, равна $0,2 \cdot 3 = 0,6$.

Использование графов для вычисления вероятностей

Помимо применения теорем о вероятностях событий, задачи теории вероятностей бывает удобно решать с помощью графов.

Графом в математике называют множество точек, некоторые из которых соединены друг с другом линиями. Эти точки называют *вершинами графа*, а линии – *ребрами графа*.

В применении к подсчету вероятностей обычно используют *древовидные графы*, причем вершины графа означают какое-либо событие, а ребра – исход этого события. Также на ребрах графа принято подписывать вероятность того исхода, которому данное ребро соответствует. При этом сумма вероятностей на ребрах, выходящих из одной вершины, должна быть равна 1. Например, следующий граф (рис. 1) изображает все возможные исходы двух последовательных подбрасываний монеты:

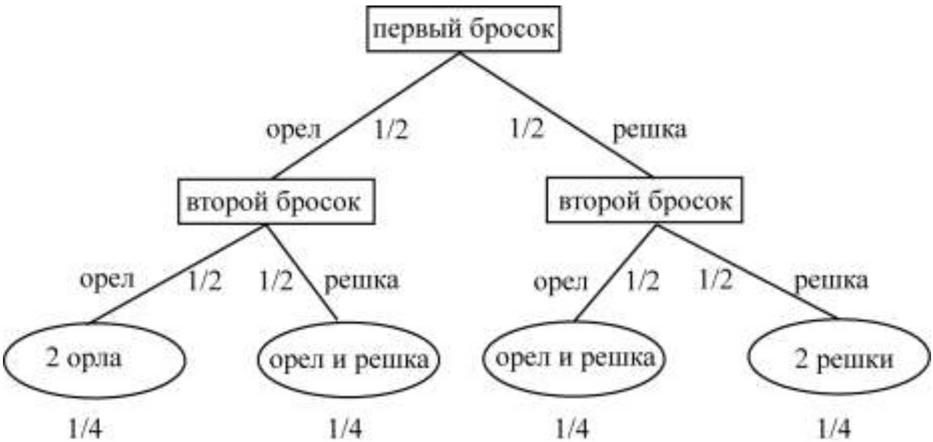

Рис. 1.

Следует обратить внимание, что овалами обозначены исходы, к которым приводит следование по различным ветвям графа. Для того чтобы подсчитать вероятность каждого из этих исходов, необходимо перемножить вероятности, соответствующие ветвям графа, по которым к данному исходу пришли. Если к одинаковому исходу приводит несколько путей, соответствующие им вероятности складываются. Так, чтобы подсчитать вероятность того, что один раз выпадет орел и один раз решка, мы должны сложить вероятности 2 и 3 исхода на графе: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Пример 14. При подготовке к экзамену ученик выучил 20 из 25 вопросов. На экзамене он вытянул билет из трех вопросов. Оценка «удовлетворительно» ставиться, если учащийся правильно отвечает на один вопрос билета, «хорошо» – на два, «отлично» – на все три. Какова вероятность того, что он получит оценки: а) отлично, б) неудовлетворительно, в) удовлетворительно, г) хорошо. Какая из оценок наиболее вероятна?

Граф представлен на рис. 2. Плюсами и минусами обозначено, знает ученик выбранный билет, или нет. В последних вершинах графа стоит оценка, которую получит ученик.

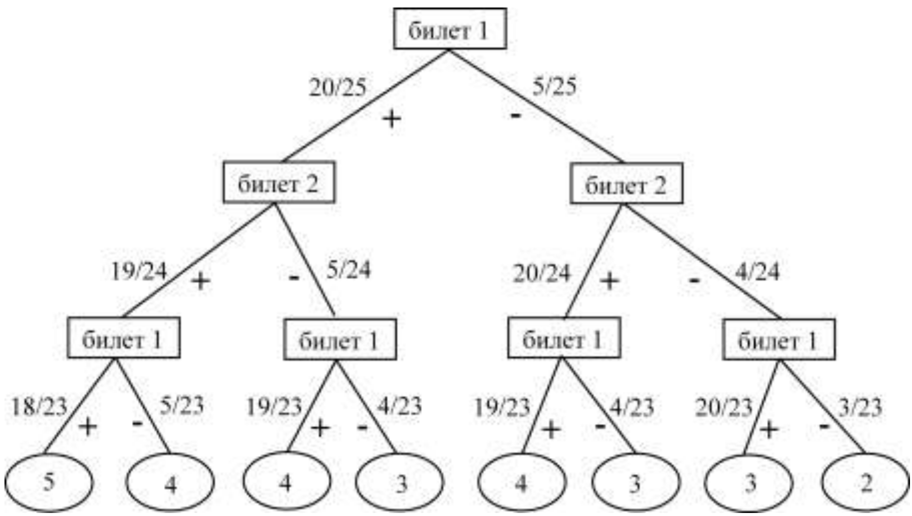

Рис. 2.

Глядя на такой граф удобно подсчитать вероятность получения каждой из оценок:

$$P(5) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} \approx 0,496,$$

$$P(4) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{5}{23} + \frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{19}{23} + \frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24} \cdot \frac{19}{23} \approx 0,413,$$

$$P(3) = \frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{4}{23} + \frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24} \cdot \frac{4}{23} + \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} \cdot \frac{20}{23} \approx 0,087,$$

$$P(2) = \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} \cdot \frac{3}{23} \approx 0,004.$$

Таким образом, наиболее вероятной является оценка «отлично».

Пример 15. Профессор Френч забывает завести будильник с вероятностью 0,3. Если он все-таки заводит будильник, то вероятность, что будильник прозвенит, равна 0,8. Если будильник прозвенит, то профессор просыпается, чтобы попасть на первый урок вовремя с вероятностью 0,9. Если будильник не звенит, то профессор просыпается вовремя с вероятностью 0,2. Какова вероятность, что профессор Френч успеет на первый урок?

Изобразим граф, соответствующий условиям задачи (рис. 3).

С помощью графа видно, что профессор успевает на урок при трех вариантах развития событий. Вероятность вычисляется по формуле:

$$P(A) = 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,592.$$

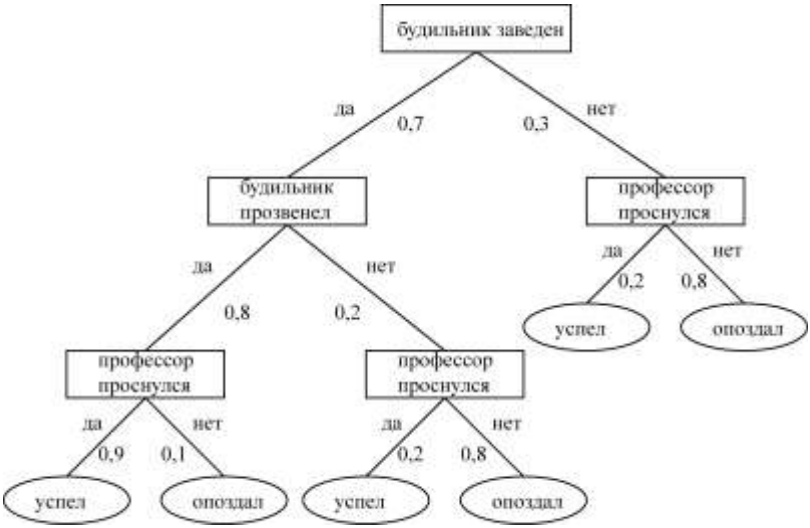

Рис. 3.

Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие A происходит только совместно с одним из независимых событий $B_1, B_2, \dots, B_n$. Причем события $B_1, B_2, \dots, B_n$ составляют полную группу событий и называются *гипотезами*. Пусть известны вероятности гипотез $P(B_i)$, $i = \overline{1,n}$ ($\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i) = 1$) и условные вероятности появления события A совместно с каждой из гипотез $P_{B_i}(A)$, $i = \overline{1,n}$. Тогда вероятность появления события A определяется по следующей формуле, носящей название *формулы полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{B_i}(A).$$

Пример 16. В урну, где находятся два шара произвольных цветов, опущен белый шар. Затем наугад из урны вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар белый.

Обозначим через A событие – извлечен белый шар. А в качестве гипотез рассмотрим следующие: B_1 – в урне не было белых шаров, B_2 – в урне был один белый шар, B_3 – два белых шара. Поскольку по условию задачи изначально в урне находятся шары произвольных цветов, все три гипотезы равновозможны, следовательно $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=1/3$. Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар в предположении, что в урне не было белых шаров, равна $P_{B_1}(A)=1/3$. При условии, что в урне уже был белый шар – $P_{B_2}(A)=2/3$, а при условии, что было два белых шара – $P_{B_3}(A)=3/3=1$. Таким образом, полная вероятность события A равна:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1\right)=\frac{2}{3}.$$

Пример 17. Магазин производит закупку мяса у двух ферм. Говядина составляет 40% мяса, закупаемого у первой фермы, и 20% – у второй. Из всего мяса, продаваемого в магазине, говядина составляет 35%. Найти вероятность того, что говядина, купленная в этом магазине, окажется закупленной у первой фермы.

Пусть событие A состоит в том, что мясо является говядиной. Гипотезы: B_1 – мясо закуплено у первой фермы, B_2 – у второй. По условию задачи $P(A)=0,35$, $P_{B_1}(A)=0,4$, $P_{B_2}(A)=0,2$. Обозначим вероятность первой гипотезы

$P(B_1)=x$, тогда $P(B_2)=1-x$. По формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=0,4x+0,2(1-x)=0,35,$$

$$0,2x=0,15\Leftrightarrow x=0,75.$$

Пример 18. В каждой из трех коробок лежат 4 шоколадные конфеты и 6 карамелек. Из первой коробки наугад достают конфету и перекладывают во вторую. Затем из второй коробки наугад достают конфету и перекладывают в третью. После этого из третьей коробки наугад извлекают одну конфету. Найти вероятность того, что эта конфета шоколадная.

Пусть событие A – из 3 коробки достали шоколадную конфету. Гипотезы: B_1 – в третьей коробке было 4 шоколадных конфеты, B_2 – в третьей коробке было 5 шоколадных конфет. При этом всего в третьей коробке 11 конфет. Тогда условные вероятности достать шоколадную конфету: $P_{B_1}(A)=4/11$, $P_{B_2}(A)=5/11$.

Найдем вероятность того, что в третьей коробке 4 шоколадные конфеты (это означает, что из второй коробки была извлечена карамелька). Для этого также воспользуемся формулой полной вероятности. Введем гипотезы C_1 – из первой коробки достали шоколадную конфету, C_2 – из первой коробки достали карамельку. Их вероятности $P(C_1)=4/10$, $P(C_2)=6/10$. При этом условные вероятности извлечения карамельки из второй коробки $P_{C_1}(B_1)=6/11$, $P_{C_2}(B_1)=7/11$. И по формуле полной вероятности $P(B_1)=\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{11}+\frac{6}{10}\cdot\frac{7}{11}=\frac{66}{110}=\frac{3}{5}$.

Аналогично вычислим вероятность того, что в третьей коробке 5 шоколадных конфет (т. е. из второй коробки достали шоколадную конфету). При тех же гипотезах условные вероятности этого события равны $P_{C_1}\left(B_2\right)=5/11$ и $P_{C_2}\left(B_2\right)=4/11$.

Тогда вероятность $P\left(B_2\right)=\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{11}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{11}=\frac{44}{110}=\frac{2}{5}$. Наконец, полная вероятность события A: $P(A)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{5}+\frac{5}{11}\cdot\frac{2}{5}=\frac{22}{55}=\frac{2}{5}=0,4.$

Задачи на полную вероятность можно решать и с помощью графов. Рассмотрим этот способ на примере.

<u>Пример 19</u>. В ящике лежат 12 яблок сорта антоновка, 20 сорта грушовка и 18 сорта голден. Вероятность того, что яблоко не испорчено для сорта антоновка составляет 90%, для грушовки – 60%, для сорта голден – 90%. Из ящика случайным образом достали одно яблоко. Найти вероятность того, что оно не испорчено.

Построим граф (рис. 4).

Рис. 4.

Тогда вероятность достать хорошее яблоко составляет:

$$P(A)=0,24\cdot 0,9+0,36\cdot 0,9+0,4\cdot 0,6=0,78.$$

Теорема Байеса

При вычислении полной вероятности использовались гипотезы – предполагаемые «причины», которые повлекли за собой интересующее нас событие. При этом вероятности гипотез вычисляются в предположении, что данное событие на них не влияет. Такие безусловные вероятности гипотез называются *априорными* и показывают, насколько вероятна причина вообще. Но если событие уже наступило, вероятность гипотез можно переоценить с учетом этого факта. Такая вероятность гипотезы носит название *апостериорной* и показывает, насколько вероятна причина с учетом данных о событии.

Рассмотрим случай, когда событие A, наступающее только совместно с одной из гипотез B_i. Поскольку эти события зависят друг от друга, по формуле умножения вероятностей имеем:

$$P(A\cdot B_i)=P(A)P_A(B_i)=P\left(B_i\right)P_{B_i}\left(A\right).$$

Откуда находим выражение для апостериорной вероятности гипотезы:

$$P_A(B_i)=\frac{P\left(B_i\right)P_{B_i}\left(A\right)}{P(A)},\ i=\overline{1,n}.$$

Последняя формула носит название *формулы Байеса*.

Пример 20. Равное количество учащихся из двух классов написали контрольную работу. В первом классе 84% работ были написаны на зачетную оценку, во втором – только 60%. Из стопки работ случайным образом выбрали одну работу, которая оказалась зачтенной. Найти вероятность того, что эта работа учащегося второго класса.

Обозначим за A событие – проверенная работа написана на зачетную оценку. В качестве гипотез возьмем: B_1 – выбрана работа учащегося первого класса, B_2 – выбрана работа учащегося второго класса. Поскольку считается, что в каждой из групп одинаковое количество учащихся писали контрольную, вероятность $P\left(B_1\right)=P\left(B_2\right)=1/2$. Условная вероятность успешного написания работы учеником первого класса равна $P_{B_1}\left(A\right)=0{,}84$, второго – $P_{B_2}\left(A\right)=0{,}6$. Тогда полная вероятность события A:

$$P(A)=P\left(B_1\right)P_{B_1}\left(A\right)+P\left(B_2\right)P_{B_1}\left(A\right)=\frac{1}{2}\left(0{,}84+0{,}6\right)=\frac{1{,}44}{2}=0{,}72.$$

А вероятность, что успешная работа принадлежит учащемуся второго класса:

$$P_A(B_2)=\frac{P\left(B_2\right)P_{B_2}\left(A\right)}{P(A)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}5}{0{,}72}=\frac{0{,}3}{0{,}72}=\frac{5}{12}\approx 0{,}42.$$

Примеры практического применения теории вероятностей

Анализ социологических опросов

В социологии, политологии и т. д. для обработки данных опросов широко используется аппарат математической статистики и теории вероятностей. Хотя обычно используются методы, выходящие за рамки данного курса, простейший анализ социологического опроса можно провести и на основе приведенных здесь материалов.

<u>Пример 21</u>. Во время предвыборной кампании на пост губернатора штаб одного из кандидатов провел опрос 150 человек. Результаты опроса представлены в таблице. На основе

данных опроса найти вероятность того, что избиратели проголосуют за данного кандидата, и выяснить, влияет ли место проживания на результаты голосования.

Место проживания	Отношение к кандидату		Итого:
	За (F)	Против ($\overline{F}$)	
Областной центр (C)	80	40	120
Остальная область ($\overline{C}$)	20	10	30
Итого:	100	50	150

Введем следующие события: F – респондент высказался за кандидата, $\overline{F}$ – против; C – респондент проживает в областном центре, $\overline{C}$ – в остальной части области. Поскольку всего за кандидата высказалось 100 из 150 опрошенных, вероятность, что он будет избран составляет $P(F)=\dfrac{100}{150}=\dfrac{2}{3}$.

Чтобы определить, влияет ли место проживание на вероятность проголосовать за данного кандидата, найдем условные вероятности $P_C(F)$ и $P_{\overline{C}}(F)$. Из 120 человек, проживающих в областном центре, за кандидата готовы проголосовать 80, значит $P_C(F)=\dfrac{80}{120}=\dfrac{2}{3}$. Аналогично $P_{\overline{C}}(F)=\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$. Поскольку $P(F)=P_C(F)=P_{\overline{C}}(F)$ место проживание не влияет на вероятность проголосовать за данного кандидата.

Вероятность ошибки в медицинском тесте

В медицинской практике для диагностики различных заболеваний часто используют различные тесты (анализы).

При этом результат теста считается положительным, если у исследуемого найдено искомое заболевание. Но иногда возникает ложно положительный результат, т. е. медицинский тест дает положительный результат, при том, что исследуемый на самом деле не болеет той болезнью, для выявления которой предназначен тест. Используется также понятие ложно отрицательного результата, когда медицинский тест не выявляет имеющуюся у пациента болезнь. Вероятности ложно положительного и ложно отрицательного результата выявляются на стадии проверки теста, до того, как его можно будет использовать в клинической практике.

Теорема Байеса дает возможность вычислить вероятность того, что положительный результат теста является на самом деле ложно положительным.

Пример 22. Медицинский тест дает положительный результат, если пациент болен исследуемой болезнью с вероятностью 0,99. Если пациент не болен, то с вероятностью 0,95 тест даст отрицательный результат. Данной болезнью страдает 0,1% населения. Какова вероятность того, что пациент с положительным результатом теста на самом деле не болен?

Обозначим за A событие – тест дал положительный результат. В качестве гипотез возьмем следующие: B_1 – пациент болен, B_2 – пациент здоров. По условию задачи $P(B_1)=0,001$, $P(B_2)=0,999$. Условные вероятности: $P_{B_1}(A)=0,99$, $P_{B_2}(A)=1-0,95=0,05$. Тогда полная вероятность события A:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_1}(A)=0,001\cdot 0,99+0,999\cdot 0,05=0,05094.$$

По теореме Байеса искомая вероятность:

$$P_A(B_2)=\frac{P\left(B_2\right)P_{B_2}\left(A\right)}{P(A)}=\frac{0,999\cdot 0,05}{0,05094}\approx 0,981.$$

Как видно, вероятность получить ложно положительный результат в данном случае очень велика. Это связано с тем, что исследуемая болезнь крайне редкая. Выходом в данной ситуации является проведение повторного теста.

Если болезнь не такая редкая и вероятности $P\left(B_1\right)=0,7$, $P\left(B_2\right)=0,3$. Тогда

$$P_A(B_2)=\frac{P\left(B_2\right)P_{B_2}\left(A\right)}{P(A)}=\frac{0,3\cdot 0,05}{0,7\cdot 0,99+0,3\cdot 0,05}\approx 0,021.$$

Фильтрация спама

Все, кто пользуется электронной почтой, сталкиваются с проблемой спама – нежелательных писем, содержащих рекламу или вредоносные программы. Для частных лиц или компаний, ведущих активную электронную переписку, количество спама может составлять тысячи единиц, и превосходить количество полезных писем на порядки. Поэтому большой популярностью пользуются программы, позволяющие отличить полезные письма от спама (так называемые спам-фильтры). Алгоритм работы многих таких программ основан на теореме Байеса.

Сначала программа-фильтр должна пройти обучение: для каждого слова, которое встречается в письмах, вычисляется его «вес» – вероятность того, что письмо с этим словом является спамом. В простейшем случае эта вероятность считается по классическому определению вероятности:

количество появлений данного слова в спаме делить на общее количество появлений.

При проверке нового письма вычисляется вероятность того, что оно является спамом. При этом гипотезами являются слова письма. Для каждого слова вероятность появления гипотезы $P(B_i)$ есть вероятность появления этого слова в письме (количество данных слов поделить на общее количество слов). Условная вероятность появления события при данной гипотезе $P_{B_i}(A)$ – это «вес» слова, который был подсчитан заранее.

Является письмо спамом или нет, определяют путем сравнения вычисленной вероятности с заранее заданным значением. После того, как новое письмо классифицировано, в базе обновляются «веса» для вошедших в него слов.

Описанный выше метод байсовской фильтрации является наиболее простым. В современных программах чаще используются его модификации, в которых игнорируются не несущие смысловой нагрузки слова (предлоги, союзы и т. д.) или учитываются не отдельные слова, а словосочетания.

Задания для самостоятельной работы

1. ○В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.
2. ○В классе из 26 человек учатся два брата. Класс случайным образом делят на две равные группы. Найдите вероятность того, что братья окажутся в одной группе.
3. ●На сладе магазина имеется 15 телевизоров одной модели, причем 10 из них собраны в России. Найти вероятность того, что среди 5 случайно выбранных телевизоров 3 окажутся российской сборки. Ответ округлите до десятых.

4. ○Для событий G и H известны следующие вероятности: $P(G)=0{,}5$, $P(H)=0{,}4$, $P(G\cdot H)=0{,}1$. Определить, являются ли эти событиям несовместными. Найти $P_G(H)$.
5. ●Если Иван при игре в боулинг использует шар с резиновым покрытием, то он сбивает все кегли с вероятностью 0,9, а при использовании шара с пластиковым покрытием – с вероятностью 0,2. В боулинге есть 10 шаров, из которых 4 с резиновым покрытием. Найти вероятность того, что Иван не сумеет сбить все кегли случайно взятым шаром.
6. ●Для линии по производству электрических лампочек вероятность брака составляет 0,02. Перед упаковкой лампочки тестирует автоматическая система контроля качества. Вероятность, что неисправная лампочка будет забракована, составляет 0,99, а вероятность, что система забракует исправную лампочку, равна 0,01. Система контроля забраковала лампочку. С точностью до сотых найти вероятность того, что лампочка была исправна.

Ответы и рекомендации

1. 0,14. 8 очков может выпасть следующими способами: 2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2.
2. 0,48. Пусть один из близнецов находится в некоторой группе. Вместе с ним в группе окажутся 12 человек из 25 оставшихся одноклассников. Необходимо найти вероятность того, что второй близнец окажется среди этих 12 человек.
3. 0,4. Всего вариантов выбора C_{15}^5, из 10 российских 3 телевизоров можно выбрать C_{10}^3 способами, из оставшихся 5 можно выбрать 2 C_5^2 способами.

4. 0,2. Данные события не являются несовместными, т. к. в этом случае вероятность произведения событий должна равняться нулю, а по условию задачи это не так. $P_G(H)$ можно определить с помощью формулы вероятности произведения событий.
5. 0,52. Обозначим за A событие «Иван сбил все кегли». В качестве гипотез возьмем: B_1 – шар с резиновым покрытием, B_2 – шар с пластиковым покрытием. По условию задачи $P\left(B_1\right)=0,4$, $P\left(B_2\right)=0,6$. Условные вероятности: $P_{B_1}\left(A\right)=0,9$, $P_{B_2}\left(A\right)=0,2$. Тогда вероятность события A определяется по формуле полной вероятности.
6. 0,33. Событие A – лампочка забракована. Гипотезы: B_1 – лампочка бракованная, B_2 – лампочка исправна. По условию задачи $P\left(B_1\right)=0,02$, $P\left(B_2\right)=1-0,02=0,98$. Условные вероятности: $P_{B_1}\left(A\right)=0,99$, $P_{B_2}\left(A\right)=0,01$. Вероятность $P_A(B_2)$ можно найти с помощью теоремы Байса.

Задания для домашней работы

1. ○Монету подбросили два раза. Найти вероятность того, что «орел» выпадет хотя бы один раз.
2. ○В среднем из 1000 шлангов, поставляемых в магазин, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что случайно выбранный шланг не подтекает.
3. ○Перед началом турнира по теннису участников случайным образом разбивают на пары. Всего в турнире участвует 26 теннисистов, среди которых 10 человек из России. Найдите

вероятность того, что в первом туре будет играть пара, где оба спортсмена – россияне.

4. ○Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1 час.
5. ●На конкурсе «Евровидение» выступают певцы – по одному от каждой из стран-участниц. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что участник из Дании будет выступать после участников из Швеции и Норвегии?
6. ○Звонящий забыл последние три цифры в нужном ему номере телефона, но точно помнил, что они разные, и набрал эти цифры наугад. Найти вероятность, что он набрал нужный номер.
7. ●В ящике лежит 10 одинаковых карточек с номерами от одного до десяти. Из ящика наугад достали 6 карточек. Найти вероятность того, что среди них есть карточки с номерами 1 и 2.
8. ○Вероятность того, что ученику на экзамене по планиметрии достанется вопрос на тему «Описанная окружность» равна 0,2, а на тему «Параллелограмм» – 0,15. Вероятность, что ученик вытянет вопрос по одной из этих тем, равна 0,35. Есть ли в наборе вопросы, которые относятся к двум этим темам одновременно?
9. ○Мальчик стреляет в тире по мишеням пять раз. Вероятность его попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,8. Найти с точностью до сотых вероятность того, что мальчик в первых трех выстрелах поразил мишень, а затем два раза промахнулся.

10. ●Для событий A и B известны следующие вероятности: $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$, $P_B(A)=0,2$. Найти вероятность суммы этих событий.
11. ●Попугайчик Кеша умеет говорить два слова: «Кеша» и «хороший». Если попугайчик говорит несколько слов подряд, то с вероятностью 0,8 следующее слово будет таким же, как предыдущее. Кеша сказал «фразу» из четырех слов, первым из которых было «Кеша». Найти вероятность того, что последним будет слово «хороший».
12. ●Абитуриент собирается поступать в вуз на один из двух факультетов: физико-математический или электротехнический. Для успешного поступления абитуриенту надо сдать ЕГЭ по математике, русскому языку и профильному предмету не менее чем на 70 баллов каждый. Для физико-математического факультета профильным предметом является физика, для электротехнического – информатика. Вероятность, что данный абитуриент наберет нужные баллы по каждому из предметов, составляет: для математики – 0,6, для русского языка – 0,8, для физики – 0,7, для информатики – 0,5. Найти вероятность того, что абитуриент поступит хотя бы на один из этих факультетов.
13. ○Одна из двух подбрасываемых монет имеет дефект, в результате которого вероятность выпадения орла равна 0,6. С помощью графа найдите вероятность следующих событий:
    a. орел выпадет хотя бы один раз;
    b. решка не выпадет ни разу.
14. ●Компания производит обувь на трех фабриках, причем первая фабрика производит 25% всей обуви компании, вторая – 60%, а третья – 15%. Один процент обуви первой фабрики имеет неправильную маркировку, для второй

фабрики обувь с неверной маркировкой составляет 0,5%, а для третьей – 2%. Найти вероятность того, что пара обуви, произведенная данной компанией, будет иметь неверную маркировку.

15. ●Число ездящих в автобусе некоторого маршрута мужчин относится к числу женщин как 3:2. Вероятность того, что мужчина в автобусе уступит место старушке, равна 0,1. Вероятность того, что уступит место женщина – 0,2. В автобус зашла старушка, и ей уступили место. Найти вероятность того, что это сделал мужчина.

Ответы

1. 3/4	6. $\frac{1}{720}$	11. 0,392
2. 0,995	7. 1/3	12. 0,408
3. 0,36	8. нет	13. 0,8; 0,3
4. 0,25	9. 0,02	14. 0,0085
5. 1/3	10. 0,62	15. 3/7

Контрольная работа

1. На столе стоит корзина с 10 марокканскими и 5 грузинскими мандаринами. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад мандаринов окажутся ровно 3 марокканских.
2. Игральную кость бросают пять раз. Найти вероятность того, что два раза выпадет шесть очков.
3. В гостиничном номере установлено два датчика дыма. Вероятность того, что при пожаре сработает первый датчик, равна 0,95, вероятность, что сработает второй – 0,9. Найти вероятность того, что при пожаре сработает только один датчик.

4. В ящике лежат 6 белых, 4 черных, 5 красных и 3 синих шарика. Из ящика наугад выбирают 2 шарика. Найти вероятность того, что оба шарика будут или белыми или черными.
5. В оружейной комнате пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.
6. В детскую больницу поступает в среднем 50% детей с воспалением легких, 30% – с бронхитом и 20% с гриппом. Вероятность полного излечения воспаления легких равна 0,7, бронхита – 0,8, гриппа – 0,9. Поступивший в больницу ребенок был выписан здоровым. Найти вероятность того, что он болел воспалением легких.

Методическая страничка для педагога

Учебный курс «Творческие и исследовательские задания по комбинаторике и теории вероятностей» предназначен для учащихся 9–11-х профильных классов и классов с углубленным изучением математики, физики, информатики и предметов химико-биологического цикла.

Курс базируется на новом для школьников теоретическом материале по математике и формирует интегративные межпредметные связи с дисциплинами естественнонаучного цикла и информатикой.

Хотя темы «Комбинаторика» и «Теории вероятностей» входят в программу общеобразовательной школы, на их изучение отводится небольшое количество времени, поэтому знакомство с темами ограничивается лишь освоением базовых понятий. Тем не менее, с 2012 г. вероятностные задачи включены в экзаменационную работу по математике, причем год от года сложность данных задач увеличивается.

При изучении курса математики старшеклассники часто не понимают, каким образом изучаемый материал может пригодиться им в дальнейшей профессиональной деятельности. В отличие от большинства других разделов школьного курса, комбинаторика и теория вероятностей имеют ярко выраженную практическую направленность и позволяют показать межпредметные связи с такими областями, как физика, химия, биология, медицина, социология, промышленность, сельское хозяйство и др.

Специальный учебный курс «Творческие и исследовательские задания по комбинаторике и теория вероятностей» предназначен для подготовки старшеклассников к обучению в вузах и направлен на изучение нового материала, освоение новых методов исследования научных знаний и межпредметных прикладных вопросов. Данный курс предназначен для учащихся 10–11-х классов, но может быть использован и как предпрофильный курс по выбору в 8–9-х классах.

Материал курса можно использовать в классах, где математика изучается как на базовом уровне, так и профильном. Задания, которые рекомендуется отнести к базовому уровню сложности, отмечены знаком ○, к профильному или углубленному – знаком ●.

Данный курс может быть рассчитан на различную продолжительность изучения (от 24 до 34 часов) в зависимости от глубины рассмотрения материала.

В таблице 1 приведен учебно-тематический план курса, рассчитанного на 34 часа.

Таблица 1. Учебно-тематический план курса

№	**Тема**	**Кол-во часов**
1.	Введение в комбинаторику. Факториал. Основное правило комбинаторики.	2
2.	Перестановки. Размещения.	2
3.	Сочетания.	2
4.	Соединения с повторениями.	4
5.	Решение комбинаторных задач.	2
6.	Контрольная работа по комбинаторике.	2
7.	Введение в теорию вероятностей. Классическое определение вероятности.	2
8.	Виды случайных событий и действия над ними.	2
9.	Сложение и умножение вероятностей.	4
10.	Использование графов для вычисления	2

	вероятностей.	
11.	Формула полной вероятности. Теорема Байеса.	4
12.	Примеры практического применения теории вероятностей.	2
13.	Решение задач.	2
14.	Контрольная работа по теории вероятностей.	2
	Итого:	**34**

Кроме теоретического материала курс «Творческие и исследовательские задания по комбинаторике и теории вероятностей» содержит большое количество практических заданий, которые представлены в виде примеров, заданий для домашних, самостоятельных и контрольных работ. Каждый из разделов курса включает примеры различного уровня сложности с развернутым решением. Задания для самостоятельной работы приведены с ответами и указаниями к решению, задания для домашних работ содержат ответы.

Следует отметить, что большое количество заданий имеют прикладной характер. Кроме того, в разделе «Примеры практического применения теории вероятностей» рассмотрено несколько примеров применения материалов курса в таких областях, как медицина, компьютерная безопасность и социология.

Список литературы

1. Johnson R., Kuby P. Elementary Statistics 11th ed. – Brooks/Cole, Cengage Learning, 2012. – 803 p.
2. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для прикладного бакалавриата. – М.: Изд-во Юрайт, 2015. – 404 с.
3. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для бакалавров. – М.: Изд-во Юрайт, 2014. – 479 с.
4. *Говоров В. М., Дыбов П. Т., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф*. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих в вузы. – М.: ООО «Оникс-книга», 2006. – 480 с.
5. *Егерев В. К., Кордемский Б. А., Зайцев В. В. и др*. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Под ред. М. И. Сканави. Учебное пособие. – М.: Мир и образование, 2014. – 608 с.
6. *Ершова А. П., Голобородько В. В*. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10–11 классов. – М.: Илекса, 2013. – 224 с.
7. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Каталог заданий. Классическое определение вероятности. http://reshuege.ru/test?theme=166
8. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Каталог заданий. Теоремы о вероятностях событий. http://reshuege.ru/test?theme=185

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Учебное издание

Ирина Юрьевна Черникова,
Наталья Сергеевна Шабрыкина

Творческие и исследовательские задания по комбинаторике и теории вероятностей

СЕРИЯ: ИНЖЕНЕРНЫЙ ВУЗ ШКОЛЕ

Верстка Н. А. Мулюкова
Корректор Н. А. Мулюкова

Подписано в печать 23.11.2015. Формат 60х90 1/16. Бумага ВХИ.
Гарнитура Times. Физ. печ. л. 3,37. Тираж 300 экз. Заказ № 96728
Книжное издательство «Пушка».
614990, г. Пермь, ул. Дружбы, 34, офис 207

Отпечатано в соответствии с предоставленными заказчиком файлами
в типографии ООО «ПК «Астер»
614064, г. Пермь, ул. Усольская, 15, тел.: (342) 206-06-86