Содержание

НАПУТСТВИЕ

В этом сборнике вы найдете все 37 вариантов вступительных испытаний в Московский университет, проходивших с 2011 года. Часть из них содержит удобные ссылки на видеоразборы; другую часть рекомендую одолеть самостоятельно (к ним приведены ответы). Вопросы по решениям смело пишите в комментариях к соответствующим роликам на YouTube.

№1 ← для перехода к видеоразбору кликните по номеру задачи

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ В МГУ

ДВИ-2022

Вариант 1

1. Найдите наименьшее целое число, большее, чем $\dfrac{\sqrt{17}+3}{\sqrt{17}-3}$.

2. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии в два раза больше суммы первых десяти членов. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что пятый её член равен 7.

3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x + 3 = 0$.

4. Решите неравенство $\left(2\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1\right)^{x^2-2x} \leqslant 1$.

5. Середины сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ лежат на окружности. Известно, что $AB = 1$, $BC = 4$, $CD = 8$. Найдите AD.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + (1 - a + \sqrt[4]{|x|})^2 = \frac{a^2}{4}$$

имеет ровно три решения.

7. Объём треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA', BB', CC' равен 72. Найдите объём тетраэдра $DEFG$, где D — центр грани $ABB'A'$, E — точка пересечения медиан треугольника $A'B'C'$, F — середина ребра AC и G — середина ребра BC.

ДВИ-2021

Вариант 1

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{25}{16}\right)^{-1/2}+\frac{\log_3\left(9^3\right)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}}$.

2. Добрыня Никитич в полтора раза старше Алёши Поповича и в полтора раза младше Ильи Муромца. Сколько лет Добрыне Никитичу, если Илья Муромец старше Алёши Поповича на 20 лет?

3. Решите уравнение $\sin x-\cos 2x+\sin 3x=1$.

4. Решите неравенство $\log_2 x+\log_2 3\cdot\log_x 3+\log_{\sqrt{2}} 3<0$.

5. В окружность вписан выпуклый восьмиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$. Известно, что

$$\angle A_1A_4A_7=\frac{1}{2}\angle A_4A_7A_2=\frac{1}{3}\angle A_7A_2A_5=\frac{1}{4}\angle A_2A_5A_8=\frac{1}{5}\angle A_5A_8A_3=\frac{1}{6}A_8A_3A_6=\frac{1}{7}\angle A_3A_6A_1.$$

Найдите $\angle A_6A_1A_4$.

6. Найдите наибольшее значение, которое может принимать выражение $x+7y$, если известно, что x,y удовлетворяют равенству

$$\sqrt{xy}+\sqrt{(1-x)(1-y)}=\sqrt{7x(1-y)}+\frac{\sqrt{y(1-x)}}{\sqrt{7}}.$$

7. Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$ с основаниями ABC, $A'B'C'$ и боковыми ребрами AA', BB', CC'. Через точки B, C проходит плоскость, делящая объём призмы пополам. Эта плоскость пересекает прямую AA' в точке D. Найдите отношение $AA':A'D$.

Вариант 2

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{2}{9}}\cdot\log_4 64\cdot\log_8 64$.

2. Студент Савелий взбегает вверх по неподвижному эскалатору за 30 секунд, а по движущемуся вверх — за 20 секунд. За сколько секунд Савелий поднялся бы по движущемуся вверх эскалатору, если бы нашел в себе силы стоять на месте? (Собственную скорость бегущего Савелия считать постоянной).

3. Решите уравнение $2\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin 2x=\sqrt{3}\left(\cos x-\sin x\right)$.

4. Решите неравенство $6^{x^2}+6^{2x}\leqslant 2^{x^2+2x}+3^{x^2+2x}$.

5. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает диагональ BD и сторону BC в точках K и L соответственно. Найдите площадь треугольника DKL, если известно, что площадь параллелограмма равна 8 и что $AD=3\cdot AB$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых наименьшее (по x) значение выражения

$$\log_2^2(ax)+\log_2^2\left(\frac{1-a}{x}\right)$$

максимально.

7. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ объема 1. На ребрах AB, $B'C'$, CD и $A'D'$ отмечены точки K, L, M и N соответственно. Известно, что $AK:KB=CM:MD=1:3$ и $B'L:LC'=D'N:NA'=1:2$. Найдите объем тетраэдра $KLMN$.

ДВИ-2020

Вариант 1

1. Известно, что $f(x)=\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1-x}{x}-\dfrac{1}{24}$. Найдите $f\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

2. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 105, которые делятся на 3, но не деляется на 5.

3. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x = 2\cos 2x \cdot \operatorname{ctg} x$.

4. Решите неравенство $\log_{2x} 16 - \log_{4x} 8 \leqslant 1$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC проведены биссектрисы AD и CE. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Найдите DE, если $AC=12$ и $KL=9$.

6. Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$ с основаниями ABC и $A'B'C'$. На диагоналях боковых граней AB', BC', CA' отмечены точки D, E, F соответственно. Найдите отношение, в котором плоскость DEF делит отрезок AA', если $AD:DB'=1:1, BE:EC'=1:2, CF:FA'=1:3$.

7. Найдите все положительные значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_{2-x}\left(a^{2+x}+2a^{1-x}+x-1\right)+\log_{2+x}\left(a^{2-x}+2a^{1+x}-x-1\right)=2$$

имеет ровно одно решение относительно x.

Вариант 2

1. Известно, что $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x-3}}+\dfrac{19}{x}$. Найдите $f(12)$.

2. Дана возрастающая геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \ldots$, состоящая из положительных чисел. Известно, что сумма первого и третьего членов этой прогрессии равна второму члену, умноженному на $\frac{10}{3}$. Найдите отношение $b_6+b_7+b_8+b_9+b_{10}$ к $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$.

3. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x \cos x$.

4. Решите неравенство $\log_{\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right) \geqslant \log_{\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

5. На высоте AH остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Найдите отношение $BH:HC$, если $BD:DA=2:1$ и $AE:EC=3:1$.

6. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что $AB=BC=CD=5$ и $CA=AD=DB=6$. Найдите косинус угла между ребрами BC и AD.

7. Найдите все пары положительных чисел (x,y), удовлетворяющих уравнению

$$\log_{2x^2y+1}\left(x^4+y^2+1\right)=\log_{y^4+x^2+1}\left(2xy^2+1\right).$$

Вариант 3

1. Найдите целое число, задаваемое выражением:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2.$$

2. Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма первых десяти членов этой прогрессии равна 9, а сумма последних десяти членов равна 11. Найдите сумму $a_6 + a_7 + \ldots + a_{14} + a_{15}$.

3. Решите уравнение $\cos x \cdot (2\cos x - \cos 3x) = 1$.

4. Решите неравенство $3^x - 2^{x+1} \leqslant \sqrt{2 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 2^{2x+3}}$.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса AL и высота CH. Найдите косинус угла BAC, если $HL||AC$.

6. Ребро куба $ABCDA'B'C'D'$ равно 1. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер $AB, AD, AA', CC', C'B', C'D'$.

7. Найдите все значения параметра a из промежутка $[0, 2\pi)$, при которых уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2} = x\cos a + y\sin a$$

имеет хотя бы одно решение (x, y), отличное от $(0, 0)$.

ДВИ-2019

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019 \cdot 2029 - 2016 \cdot 2032}$.

2. Найдите $a + b + c$, если известно, что $a + 2b = 3$, $b + 2c = 4$, $c + 2a = 5$.

3. Решите уравнение $7 \sin x + 2 \cos 2x = 5$.

4. Решите неравенство $2^{\log_2^2 x} + 7x^{\log_2 x} < 16$.

5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD : DB = BE : EA = 1 : 4$. Найдите AB, если известно, что площадь треугольника ABC равна 18, а тангенс угла DCE равен $5/3$.

6. Найдите все пары вещественных чисел $(a; b)$, при которых неравенство

$$2a(x + 2)^4 + 9b(x - 2)^4 \geqslant x^4 + 24x^2 + 16$$

справедливо для всех вещественных x.

7. Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π. Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что ребра параллелепипеда равны $1, \sqrt{3}, 3$.

8. Найдите все x, y из полуинтервала $(-\pi; \pi]$, удовлетворяющие системы уравнений

$$\begin{cases} 24\sqrt{7} \sin x + 8 \sin y + 3\sqrt{14} \sin \dfrac{x + y}{2} = 9\sqrt{7}, \\ 8 \sin x \sin y + 3\sqrt{14} \sin x \sin \dfrac{x + y}{2} + \sqrt{2} \sin y \sin \dfrac{x + y}{2} = \dfrac{9\sqrt{7}}{8}. \end{cases}$$

ДВИ-2018

1. Какое из чисел $\dfrac{49}{18}$ или $\dfrac{79}{24}$ ближе к 3?

2. Найдите все значения параметра a, при которых разность между корнями уравнения

$$x^2 + 3ax + a^4 = 0$$

максимальна.

3. Решите уравнение $\sin 4x \cos 10x = \sin x \cos 7x$.

4. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x} \geqslant \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\log_x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}.$$

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника DMK, если известно, что $AD : BC = 3 : 2$, а площадь треугольника ABL равна 4.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - 8y + 6a + 28 \leqslant 0, \\ ay^2 - 6ay - 8x + 11a - 12 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. На ребрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N таким образом, что $AK : KB = 4 : 5$, $BL : LC = 3 : 1$, $CM : MD = 7 : 2$, $DN : NA = 3 : 1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$ соответственно. Найдите PQ, если известно, что $QR = 1$ и $AB : BC = 3 : 2$.

8. Найдите все пары чисел x, y из промежутка $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sin y}{\sqrt{2}\sin(x+y)} + 1\right)\left(\frac{\sqrt{2}\sin x}{3\sin y} + 1\right)^2\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3}\sin x} + 1\right)^4.$$

ДВИ-2017

1. Какое число больше: $\sqrt{\frac{6}{7}+7+\frac{7}{6}}$ или 3?

2. Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+bc+ac=4$. Найдите $a^2+b^2+c^2$.

3. Решите уравнение $\sin 7x+\sin 6x=\sin x$.

4. Решите неравенство $x^2\log_7^2 x+3\log_6^2 x\leqslant x\log_7 x\cdot\log_6 x^4$.

5. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямых AC и BC. На этой окружности выбрана точка D (внутри треугольника), лежащая на расстоянии $\sqrt{2}$ от прямой AB и на расстоянии $\sqrt{5}$ от прямой BC. Найдите угол $\angle DBC$, если известно, что $\angle ABD=\angle BCD$.

6. Василий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добраться вниз по реке до пункта B, причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Василий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A. Однако, промчавшись восемь километров, Василий заметил на берегу машущего ему рукой Григория, который просил по старой дружбе довести его до пункта C. И хоть пункт C Василий уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Василий с Григорием встретили идущий на встречу второй катер с друзьями Василия, откуда те крикнули, что им до пункта B осталась треть пути и чтобы Василий нигде не задерживался. Доставив Григория в пункт C, Василий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами B и C, если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, скорости катеров постоянны, а Василий действительно нигде не задерживался.

7. Из вершины D на плоскость основания ABC пирамиды $ABCD$ опущена высота DH. Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников HBC, HAC, HAB равны соответственно $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$ и что все три плоских угла при вершине D прямые.

8. Решите данную систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\cos\left(x^2-y^2\right)}-y\cdot\operatorname{tg}\left(x^2-y^2\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\\[2mm] \dfrac{y}{\cos\left(x^2-y^2\right)}-x\cdot\operatorname{tg}\left(x^2-y^2\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}.\end{cases}$$

ДВИ-2016

1. Найдите $f\left(\dfrac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{3}{7}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 6 = 0$ равна 5. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $2\cos^2 x + 3\sin 2x = 4 + 3\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x}\left(1 + \log_x^2 3\right) \leqslant 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке T. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C. Найдите площадь четырехугольника $TACB$, если известно, что $CB = BT = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5 : 8$.

6. Ровно в 9:00 из пункта A в пункт B выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта A проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт B, из пункта B в пункт A выехал автобус. Когда до пункта A оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт A, если известно, что автобус прибыл в пукт A ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB, перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K так, что $BK : KC = 3 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106 + \log_a^2 \cos ax + \log_a \cos^{10} ax} + \sqrt{58 + \log_a^2 \sin ax - \log_a \sin^6 ax} + \sqrt{5 + \log_a^2 \operatorname{tg} ax + \log_a \operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a, x), при которых оно достигается.

ДВИ-2015

1. Найдите $f(2)$, если $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{10}$.

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$.

3. Решите неравенство $\cos x + \sqrt{2}\cos 2x - \sin x \geqslant 0$.

4. Решите уравнение $\log_x \left|2x^2 - 3\right| = 4\log_{|2x^2-3|} x$.

5. Окружность радиуса $3/2$ касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E так, что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться AC, если $\angle BAC = 30°$.

6. Велосипедист Василий выехал из пункта A в пункт B. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадежно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт A за новым велосипедом. В момент поломки из пункта A выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта A он встретит Василия, если пункт B отстоит от пункта A на 4 км, а Василий доберется до пункта A тогда же, когда Григорий до пункта B? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и ребрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите ее радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.

8. Найдите все пары (α, β), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4 - 3\sin\alpha}{2 + \cos 2\alpha} + \frac{2 + \cos 2\alpha}{\beta^2 + \beta + 1} + \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\sqrt{\beta} + 1} + \frac{\sqrt{\beta} + 1}{4 - 3\sin\alpha}.$$

ДВИ-2014

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7-4\sqrt{3}}(8+4\sqrt{3})$.

2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}(x^2-6x+17)$.

3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{3x+7} > x^{12}$.

4. Решите уравнение $\cos^2 x - \cos x \sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{4} = 0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответственно. Найдите отношение $LD_2 : O_2D_2$, если известно, что $CD_1 = CO_1$.

6. Найдите все положительные x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + y = 16, \\ x + y^{\frac{2}{3}} = 8. \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

8. Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y,$$

$$g(x,y) = -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

ДВИ-2013

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $5/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

2. Вычислите $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$.

3. Решите неравенство

$$9\left(1+5^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(5^{2x}+5\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{\cos x}{\cos 5x}.$$

5. В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер «Быстрый». Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер «Смелый». В этот же самый момент «Быстрый», не желая встречи со «Смелым», развернулся и пошел обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от «Быстрого» до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от «Смелого» до «Быстрого», на «Смелом» осознали, что они идут с «Быстрым» на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R = 12$, а косинус угла между диагональю AC и основанием AD равен $3/4$.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D так, что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sin\left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.

ДВИ-2012

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\dfrac{4}{7}$ и $\dfrac{5}{3}$, а свободный член равен -2.

2. Вычислите $\log_2 \log_{81} \frac{417}{139}$.

3. Решите неравенство $\left(9^x - 3^{x+2} + 14\right) \cdot \sqrt{4 - 2^x} \leqslant 0$.

4. Решите уравнение $\sin 3x = \sqrt{2} \cos x - \sin x$.

5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $|x| + |x + 3y| + 3|y - 2| = 6$.

6. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E соответственно и пересекает сторону AC в точках F, G (точка F лежит между точками A и G). Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AF = 5$, $GC = 2$, $AD : DB = 2 : 1$ и $BE = EC$.

7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $a\sqrt{x + y} = \sqrt{3x} + 2\sqrt{y}$ имеет единственное решение (x, y).

8. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AC = BC = 5$ и $AB = 6$, боковые ребра AS, BS, CS пирамиды равны соответственно 7, 7 и 4. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается прямых AC и BC. Найдите высоту цилиндра.

ДВИ-2011

1. Вычислите значение функции $x^2 - 0,625x - \frac{1}{8}$ в точке $x = \frac{4}{5}$.

2. Решите уравнение $(\sin x + \cos x)^2 = 1$.

3. Решите уравнение $\log_2(3x - 4) = \log_4(2 - x)$.

4. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{5x+3}-1}{\sqrt{3x+2}-1} > 1$.

5. Медианы AL и BM треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите длину отрезка CK, если $AB = \sqrt{3}$ и известно, что вокруг четырехугольника $KLCM$ можно описать окружность.

6. Найдите наибольшее значение функции $\dfrac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x}$ и точку x, в которой это значение достигается.

7. В закрытой коробке, имеющей форму куба со стороной 5, лежат два шара. Радиус первого из них равен 2. Этот шар касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Второй шар касается двух других боковых граней куба, плоскости основания и первого шара. Чему равен радиус второго шара?

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \leqslant 1, \\ 4x + 7y \geqslant 3. \end{cases}$$

Дополнительно

1. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2\sin^2(\pi x) - 3\sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \dfrac{3}{2}\sin^2(\pi x) - 2\sin^2(\pi y) - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \log_2\left(1 + 4\sin^2\left(\dfrac{\pi a}{4} - \dfrac{\pi}{16}\right) - x^2 - y^2\right) \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

2. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} \left|6\sqrt{\cos\dfrac{\pi y}{4}} - 5\right| + \left|12\sqrt{\cos\dfrac{\pi y}{4}} + 1\right| - \left|1 - 6\sqrt{\cos\dfrac{\pi y}{4}}\right| = 5 - \left(\sin\dfrac{\pi(y-2x)}{12}\right)^2, \\ 10 - 9\left(x^2 + (y-a)^2\right) = 3\sqrt{x^2 + (y-a)^2 - \dfrac{8}{9}}. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sin^2 x + (a-2)^2 \sin x + a(a-2)(a-3) = 0$$

имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три различных корня.

4. Найдите произведение корней уравнения

$$\sin\frac{x^2 + x + 1}{2x} + \cos\frac{x^2 - x + 1}{2x} = \frac{x^2 - 4x + 1}{x} \cdot \cos\frac{\pi - 2}{4}.$$

5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует единственная тройка (x, y, z) действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} z \cdot \cos(x - y) + (2 + xy) \cdot \sin(x + y) - z = 0, \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x + y + a \cdot \sin^2 z)((1-a)\ln(1 - xy) + 1) = 0. \end{cases}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Здесь приведены варианты вступительных испытаний в Московский университет для самостоятельного решения. Они схожи с заданиями на страницах 5–17: различия преимущественно в числовых данных. В вариантах 2020–2022 годов условия отличаются, но зачастую их объединяет одна идея. Ответы к задачам вы найдете в конце этого раздела.

ДВИ-2022

Вариант 2

1. Найдите в явном виде целое число, заданное выражением $\sqrt{11}\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}+\dfrac{2}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}\right)$.

2. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии в два раза больше разности между первым и четвёртым её членами. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что сумма первых семи её членов равна 127.

3. Решите уравнение $\sin x+\sin 2x=\cos x+\cos 2x$.

4. Решите неравенство $x^{\log_2\sqrt{x}}\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

5. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. При этом $AM=MB$ и $CN=2NB$. Найдите тангенс острого угла параллелограмма $ABCD$.

6. Найдите все возможные значения произведения xy, если известно, что $x,y\in[0,\pi/2)$ и справедливо равенство

$$\frac{1-\sin(x-y)}{1-\cos(x-y)}=\frac{1-\sin(x+y)}{1-\cos(x+y)}.$$

7. В пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α и стороной $\sqrt{6}$, вписана сфера диаметра 1. Найдите угол α, если известно, что все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости её основания под углом 60°.

Вариант 3

1. Определите, какое из двух чисел больше: $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ или 3.

2. Дана возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из положительных чисел. Произведение третьего и четвертого членов этой прогрессии в два раза больше произведения первого и шестого её членов. Найдите разность этой прогрессии, если известно, что восьмой ее член равен 32.

3. Решите уравнение $\cos 2x + 6\sin 2x = \cos 4x + 6\sin x$.

4. Решите неравенство $\log_3(1-x) - \log_3(1+x) + \log_{1+x}(1-x) - 1 \leqslant 0$.

5. В треугольнике ABC угол C равен 60°. На сторонах AB, BC, AC отмечены точки D, E, F соответственно. Радиус окружности, вписанной в треугольник ADF, равен 1. Радиус окружности, вписанной в треугольник BDE, равен 2. Найдите сторону AB, если известны, что четырехугольник $DEFC$ является ромбом.

6. Найдите все пары действительных чисел x, y, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{xy}=2\sqrt{2-\sqrt{xy}}\cdot\sqrt[4]{xy}.$$

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA', BB', CC' равна 1. Найдите длину ребра основания, если известно, что $AB' \perp BC'$.

Вариант 4

1. Найдите наименьшее целое число, большее, чем $2\sqrt{3}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$.

2. Положительные числа a, b, c образуют непостоянную геометрическую прогрессию. Числа a, $4b$, $7c$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите отношение a/c.

3. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin x}+\dfrac{\sqrt{2}}{\cos x}=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x}}\left|\dfrac{3x}{x-4}\right| \leqslant 4$.

5. В трапеции $ABCD$ основание AB в два раза больше основания CD. Отрезки AL, BM и DK, где K, L, M — соответственно середины сторон AB, BC, AD, ограничивают треугольник площади 1. Найдите площадь трапеции.

6. Найдите все тройки действительных чисел x, y, z из интервала $(0, \pi/2)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases}\sin x = \sin y - \sin z\cos(x+z),\\ \cos x = \cos z + \cos y\cos(x+y).\end{cases}$$

7. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. Найдите отношение, в котором делит его объём плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра BC и середину ребра $C'D'$.

Вариант 5

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{27}\right)^{2/3}+\left(\dfrac{27}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3}-\dfrac{13}{18}$.

2. Сумма второго и восьмого членов возрастающей геометрической прогрессии равна $9\sqrt{2}$. Произведение четвёртого, пятого и шестого членов этой прогрессии равно 64. Найдите разность между девятым и первым членами этой прогрессии.

3. Решите уравнение $\sin^4 x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$.

4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{6-x}}(6+x)+\log_{\sqrt{6+x}}(6-x)\leqslant 5$.

5. Окружность, проходящая через вершины A, B треугольника ABC и центр описанной около этого треугольника окружности, пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Найдите угол BCA, если известно, что $AB=\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{3}$ и что угол BAE в два раза больше угла ABD.

6. Найдите все значения параметров a, b, при которых неравенство

$$a^3x^4+2ax^3+b\leqslant 2bx^2+b^3x+a$$

выполняется для всех x из отрезка $[0,1]$.

7. Дана правильная треугольная пирамида $ABCS$ с основанием ABC и вершиной S. Плоскость π перпендикулярна ребру AS и пересекает рёбра AS, BS в точках D, E соответственно. Известно, что $SD=AD$ и $SE=2BE$. Найдите косинус угла между ребром AS и плоскостью основания ABC.

Вариант 6

1. Определите, какое из двух чисел больше: $\sqrt{3}^{15}$ или $9^{\sqrt{14}}$.

2. Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{90}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что $a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{30}=45$ и что $a_3+a_6+a_9+\ldots+a_{30}=100$. Найдите разность этой прогрессии.

3. Решите уравнение $\operatorname{tg}x=4\sin x-\sqrt{3}$.

4. Решите неравенство $\log_x\left(x^2+\dfrac{3}{2}\right)\leqslant 4\log_{x^2+\frac{3}{2}}(x)$.

5. Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC, касается его стороны BC в точке D и пересекает стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Известно, что $AF=3BF$, $BD=CD$, $AE=2CE$ и что $ED=\sqrt{10}$. Найдите BC.

6. Найдите все значения параметра a из интервала $(0,1)$, при которых для каждого x из интервала $(0,\pi/4)$ существует не более одного значения y в интервале $(0,\pi/4)$, такого что

$$\frac{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}(a(x+y))}=\frac{\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{tg}(a(x+y))}{1+\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(a(x+y))}.$$

7. Основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD' является квадратом со стороной $\sqrt{2}$. Известно, что $AE\perp D'F$, где E — центр грани $BCC'B'$, F — центр квадрата $ABCD$. Найдите расстояние между серединами отрезков AE и $D'F$.

Вариант 7

1. Определите, какое из двух чисел больше: $\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{21}$ или 9.

2. Произведение седьмого и восьмого членов непостоянной арифметической прогрессии равно произведению пятого и девятого её членов. Найдите одиннадцатый член данной прогрессии.

3. Решите уравнение $5+\cos 4x = 6\sin^2 x$.

4. Решите неравенство $\log_{x-\frac{3}{4}}\left(x-\frac{3}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}$.

5. Биссектриса AL треугольника ABC перпендикулярна его медиане BM. Найдите площадь этого треугольника, если известно, что $AB=\sqrt{3}$ и $ML=1$.

6. Найдите наименьшее значение выражения $x^2-5\pi x+2xy-5\pi y+y^2$ при условии, что x и y удовлетворяют соотношению

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y}.$$

7. Плоские углы при вершине A тетраэдра $ABCD$ прямые. Двугранные углы при рёбрах BD и CD равны между собой и в два раза больше двугранного угла при ребре BC. Найдите объём тетраэдра, если известно, что $AD=1$.

ДВИ-2021

Вариант 3

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\dfrac{3\sin\frac{\pi}{2}}{\log_2 16} - \sqrt{\dfrac{4}{9}}\right)^{-1}$.

2. Автовладелец Авдей продал автосалону свой автомобиль за 60% его первоначальной стоимости. Автосалон выставил на продажу этот автомобиль за цену, на 20% большую уплаченной Авдею. Какова доля получившейся цены по отношению к первоначальной?

3. Решите уравнение $2\cdot\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \sqrt{3}\cdot\left(1 - \operatorname{tg}^2 x\right)$.

4. Решите неравенство $\log_{x-1}(x+1) - \log_{\sqrt{x+1}}(x-1) \geqslant 1$.

5. В четырёхугольник $ABCD$ площади 2 вписана окружность, касающаяся сторон AB и CD в точках K и L соответственно. Отрезок KL пересекает диагональ AC в точке M. Найдите BD, если известно, что $AM = MC = 1$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\sin^6 x + \cos^6 x + a\cdot\sin 2x \geqslant a^2$$

выполняется для всех действительных x.

7. Вписанная в треугольную пирамиду $ABCD$ сфера касается граней BCD, ACD, ABD и ABC в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Известно, что D_1 является точкой пересечения высот треугольника ABC, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны и что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, в четыре раза больше радиуса окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите отношение, в котором сфера делит отрезок DD_1, считая от вершины D.

Вариант 4

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \dfrac{2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)^2$.

2. Бобёр доплывает от своей норы вниз по реке до осиновой рощи за три минуты. Подкрепившись, он плывёт обратно к своей норе, на что у него уходит четыре минуты. Во сколько раз собственная скорость бобра превышает скорость течения? (Собственную скорость бобра считать постоянной).

3. Решите уравнение $\cos 4x + \cos 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.

4. Решите неравенство $\log_2 x + \log_3 x \leqslant \log_2 3\cdot\log_x 6$.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Известно, что $AB = BC = 1$, что площади треугольников AKC и BCL равны и что около четырёхугольника $AKML$, где M — точка пересечения отрезков BL и CK, можно описать окружность. Найдите все возможные значения AC.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(\sqrt{3+2x-x^2} - \sqrt{3-2x-x^2}\right)\left(\sqrt{a-x^2} - \sqrt{3-2x-x^2}\right)\left(\sqrt{a-x^2} - \sqrt{3+2x-x^2}\right) = 0$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что центр сферы, описанной около этого тетраэдра, лежит на AB, что плоскости ABC и ABD перпендикулярны и что $AD = DC = CB$. Найдите угол между прямыми AD и CB.

Вариант 5

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\dfrac{27^{1/3}}{25^{1/2}} + \dfrac{\log_5 25}{3\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}} + \dfrac{41}{15}$.

2. Любитель коктейлей Игнат смешал 300 мл морковного сока с 200 мл сливок. Тщательно перемешав полученную смесь, Игнат попробовал её на вкус и решил, что сливок оказалось слишком много. Игнат налил в полулитровый графин 200 мл морковного сока, а оставшиеся 300 мл заполнил приготовленной смесью. Каково процентное содержание сливок в полученном напитке?

3. Решите уравнение $4\sin 2x\cos 3x - 2\sin 5x = \operatorname{tg} 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{x-1}\left(4^{\log_3 x} - 6x^{\log_3 2} + 10\right) \leqslant 0$.

5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются диагонали AC в одной и той же точке. При этом точка касания первой окружности со стороной BC делит эту сторону пополам. Найдите отношение, в котором точка касания второй окружности со стороной AD делит эту сторону, считая от точки A.

6. Найдите все пары действительных чисел (x, y) с наименьшим возможным значением y, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{x^2-y}\left(x - y^2 + \frac{7}{4}\right) \geqslant 1.$$

7. Сфера касается всех рёбер тетраэдра $ABCD$. Известно, что произведения длин скрещивающихся рёбер равны. Известно также, что $AB = 3$, $BC = 1$. Найдите AC.

Вариант 6

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\sin\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\right)^4 - \frac{1}{4}$.

2. Футболист Федот сыграл в трёх матчах на чемпионате. Премиальная выплата Федота за второй матч в связи с отличной игрой была на n процентов больше, чем за первый. В третьем же матче Федот не сумел показать хорошую игру, и его премия за этот матч оказалась на n процентов меньше, чем за второй матч. Найдите n, если известно, что премия за третий матч составила 64% от премии за первый матч.

3. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x = \frac{2}{3}\cos x$.

4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x-1}}\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 5} \leqslant 2$.

5. Окружность Ω_1 с центром O_1 пересекает окружность Ω_2 с центром O_2 в точках A и B. При этом точки O_1 и O_2 лежат вне Ω_2 и Ω_1 соответственно. Касательная к окружности Ω_2 в точке A пересекает Ω_1 в точках A и C. Касательная к окружности Ω_1 в точке A пересекает Ω_2 в точках A и D. Найдите угол между прямыми O_1C и O_2D, если известно, что $\angle AO_1B = 36^\circ$ и $\angle AO_2B = 64^\circ$.

6. Найдите все пары действительных чисел (x, y), удовлетворяющих равенству

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1 + \log_2\left(x^2 + y^2\right)\right) = 1 + \log_2(xy).$$

7. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с основаниями $ABCD$, $A'B'C'D'$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. Все рёбра параллелепипеда равны. Плоские углы при вершине B также равны. Известно, что центр сферы, описанной около тетраэдра $AB'CD'$, лежит в плоскости $AB'C$. Радиус этой сферы равен 2. Найдите длину ребра параллелепипеда.

ДВИ-2020

Вариант 4

1. Найдите целое число, задаваемое выражением $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}\right)\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}\right)$.

2. Дана арифметическая прогрессия. Ее двадцатый член равен 1, а член с номером 2000 равен 199. Найдите член этой прогрессии с номером 2020.

3. Решите уравнение $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$.

4. Решите неравенство $\log_x\left(\log_{\sqrt{x}}\left(10x-4-4x^2\right)\right)\geqslant\log_{\sqrt{x}}\left(\log_x\left(10x-4-4x^2\right)\right)$.

5. Окружность, проходящая через вершины A и B прямоугольника $ABCD$, пересекает сторону BC в точке E, а диагональ AC — в точке F. Найдите площадь четырехугольника $ABEF$, если $BE=8$, $EC=4$, а точки D, F, E лежат на одной прямой.

6. Дана правильная треугольная пирамида. Известно, что центр сферы, описанной около этой пирамиды, равноудален от боковых ребер и от плоскости основания пирамиды. Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, если длина ребра ее основания равна 12.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2x^2y^2+x^2y+xy^2+(1-a)(x^2+y^2)-a(x+y+2)=0$$

имеет ровно одно решение (относительно (x,y)).

Вариант 5

1. Найдите целое число, ближайшее к числу $2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\right)$.

2. Дана геометрическая прогрессия. Ее четвертый член равен 5, а член с номером 54 равен 160. Найдите член этой прогрессии с номером 64.

3. Решите уравнение $9\operatorname{tg}^2 x-2\cos 2x=2$.

4. Решите неравенство $8+\log_{\sqrt{x}}8\leqslant 4\log_x\sqrt{17x^2-2}$.

5. Произведение оснований трапеции равно 18. Найдите периметр трапеции, если известно, что в нее вписана окружность, а диагонали делят среднюю линию на три равные части.

6. В основании четырехугольной пирамиды $ABCDS$ лежит параллелограмм $ABCD$. На ребре SB отмечена точка E так, что $SE:EB=2:1$. На ребре SD отмечена точка F так, что $SF:FD=1:2$. Найдите отношение, в котором плоскость AEF делит объем пирамиды.

7. Найдите все положительные значения параметра a, при которых сумма различных корней уравнения

$$\log_2(ax)+\log_2(1-x)=\cos\left((x-x^2)a\pi\right)$$

максимальна.

Вариант 6

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{\dfrac{4^3+3^4}{3^4-4^3}}$.

2. Сумма первых ста членов арифметической прогрессии равна 750. Найдите член этой прогрессии с номером 99, если известно, что второй член этой прогрессии равен 7.

3. Решите уравнение $\sin x \cos 3x = \sin 3x \cos 5x$.

4. Решите неравенство $2^{\frac{3+5x}{1+2x}} + 2^{\frac{1+3x}{1+2x}} \leqslant 6\sqrt{2}$.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Точки B, C, E, D лежат на одной окружности. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADC, если известно, что $\angle CDE = \angle BAC$ и что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 1.

6. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. Найдите расстояние между прямой, проходящей через середины ребер AB и AA', и прямой, проходящей через середины ребер BB' и $B'C'$, если ребро куба равно 1.

7. Найдите произведение корней уравнения

$$\sin\frac{x^2+x+1}{2x} + \cos\frac{x^2-x+1}{2x} = \frac{x^2-4x+1}{x}\cdot\cos\frac{\pi-2}{4}.$$

ДВИ-2019

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019 \cdot 2031 - 2017 \cdot 2033}$.

2. Найдите $a+b+c$, если известно, что $a+3b=2$, $b+3c=4$, $c+3a=6$.

3. Решите уравнение $5\sin x + 3\cos 2x = 4$.

4. Решите неравенство $3^{\log_3^2 x} + 5x^{\log_3 x} < 18$.

5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD : DB = BE : EA = 1 : 5$. Найдите AB, если известно, что площадь треугольника ABC равна 30, а тангенс угла $\angle DCE$ равен 2.

6. Найдите все пары вещественных чисел $(a; b)$, при которых неравенство

$$3a(x+3)^4 + 8b(x-3)^4 \geqslant x^4 + 54x^2 + 81$$

справедливо для всех вещественных x.

7. Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π. Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что ребра параллелепипеда равны 1, 2, 4.

8. Найдите все x, y из полуинтервала $(-\pi; \pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 28\sqrt{3}\cos x + 7\cos y + 4\sqrt{6}\cos\dfrac{x+y}{2} = 12\sqrt{3}, \\ 7\cos x\cos y + 4\sqrt{6}\cos x\cos\dfrac{x+y}{2} + \sqrt{2}\cos y\cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{12\sqrt{3}}{7}. \end{cases}$$

ДВИ-2018

1. Какое из чисел $\dfrac{49}{32}$ и $\dfrac{59}{24}$ ближе к 2?

2. Найдите все значения параметра p, при которых разность между корнями уравнения $x^2+px+3p^4=0$ максимальна.

3. Решите уравнение $\cos 10x\cos 7x=\cos 4x\cos x$.

4. Решите неравенство $(2+\sqrt{3})^{\log_{2-\sqrt{3}} x}\geqslant(2-\sqrt{3})^{\log_x(2+\sqrt{3})}$.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника ABL, если известно, что $AD:BC=5:2$, а площадь треугольника DMK равна 5.

6. Найдите все значения параметра p, при которых система

$$\begin{cases} px^2+6px-12y+11p+18\leqslant 0,\\ py^2-2py-12x+3p-30\leqslant 0\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC' и DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N, таким образом, что $AK:KB=7:9$, $BL:LC=2:1$, $CM:MD=3:1$, $DN:NA=2:1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$ соответственно. Найдите PQ, если известно, что $QR=1$ и $AB:BC=4:3$.

8. Найдите все пары чисел x, y из промежутка $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения $\left(\dfrac{\sqrt{5}\cos y}{2\sin(x+y)}+1\right)\left(\dfrac{2\cos x}{3\cos y}+1\right)^2\left(\dfrac{\sin(x+y)}{7\sqrt{5}\cos x}+1\right)^4$.

ДВИ-2017

1. Какое число больше: $\sqrt{\frac{7}{8}+7+\frac{8}{7}}$ или 3?

2. Известно, что $a+b+c=6$ и $a^2+b^2+c^2=16$. Найдите $ab+bc+ac$.

3. Решите уравнение $\cos 6x+\cos 5x=\sin x$.

4. Решите неравенство $x^2\log_6^2 x+6\log_5^2 x\leqslant x\log_6 x\cdot\log_5 x^5$.

5. Через вершины K и L треугольника KLM проведена окружность, касающаяся прямых KM и LM. На этой окружности выбрана точка S (внутри треугольника), лежащая на расстоянии 1 от прямой KL. Найдите расстояние от точки S до прямой LM, если известно, что $\angle KLS=\angle LMS$ и что $\angle SLM=45^\circ$.

6. Анатолий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добраться вверх по реке до пункта B, причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Анатолий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A. Однако, промчавшись 8 км, Анатолий заметил на берегу машущего ему рукой Бориса, который просил по старой дружбе довезти его до пункта C. И хоть пункт C Анатолий уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Анатолий с Борисом встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Анатолия, откуда те крикнули, что пункт B уже совсем близко и чтобы Анатолий нигде не задерживался. Доставив Бориса в пункт C, Анатолий немедленно помчался догонять друзей. Определите, какую долю пути оставалось пройти друзьям Анатолия от момента встречи с ним и Борисом, если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, расстояние между пунктами B и C равно 2 км, скорости катеров постоянны, а Анатолий действительно нигде не задерживался.

7. Из вершины S на плоскость основания KLM пирамиды $KLMS$ опущена высота SH. Найдите объём этой пирамиды, если известно, что площади треугольников $\triangle HLM$, $\triangle$ HKM, $\triangle HKL$ равны соответственно $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{2}$ и что все три плоских угла при вершине S прямые.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sin\left(x^2-y^2\right)}+y\cdot\operatorname{ctg}\left(x^2-y^2\right)=\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}},\\ \dfrac{y}{\sin\left(x^2-y^2\right)}+x\cdot\operatorname{ctg}\left(x^2-y^2\right)=-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.\end{cases}$$

ДВИ-2016

1. Найдите $f\left(\frac{7}{3}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{5}{3}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax-10=0$ равна 7. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $8\cos^2 x + \sin 2x = 3 + 2\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_x 2}(1+\log_2^2 x) \leqslant 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Хорда BC внешней окружности касается внутренней окружности в точке D. Прямая AD пересекает внешнюю окружность в точках A и E. Найдите BE, если известно, что $EC = CA$, площадь четырёхугольника $ABEC$ равна $3\sqrt{3}$, а радиусы окружностей относятся как $2:3$.

6. Ровно в $10:00$ из пункта А в пункт Б выехала маршрутка. Проехав треть пути, наблюдательный водитель маршрутки заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда маршрутка прибыла в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал грузовик. Когда до пункта А оставалась шестая часть пути, не менее наблюдательный водитель грузовика заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приехал грузовик в пункт А, если известно, что велосипедист прибыл в пункт А ровно в $15:00$? Скорости велосипедиста, маршрутки и грузовика считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 5. Плоскость π параллельна ребру KL, перпендикулярна плоскости NOV и пересекает ребро LM в точке T так, что $LT : TM = 3 : 2$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость LMV и плоскость основания, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани MNV.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{13+\log_a^2 \cos\frac{x}{a} + \log_a \cos^4\frac{x}{a}} + \sqrt{97+\log_a^2 \sin\frac{x}{a} - \log_a \sin^8\frac{x}{a}} + \sqrt{20+\log_a^2 \operatorname{tg}\frac{x}{a} + \log_a \operatorname{tg}^4\frac{x}{a}}$$

и все пары (a, x), при которых оно достигается.

ДВИ-2015

1. Найдите $f(3)$, если $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{12}$.

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 9x - 2 = 0$.

3. Решите неравенство $\sin x + \sqrt{\dfrac{2}{3}} \cos 2x + \cos x \leqslant 0$.

4. Решите уравнение $\log_{\sqrt{x+1}} |4x - 1| = 4 \log_{|4x-1|} \sqrt{x+1}$.

5. Окружность радиуса 2 касается середины стороны AC треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L так, что $BK = KL = LC$. Чему может равняться AB, если $\angle ABC = 45°$?

6. Лыжник Григорий ехал по довольно пологому склону, но, проехав две трети пути, проявил неуклюжесть и сломал лыжи. Отбросив их за ненадобностью, он тут же побрёл обратно. В момент поломки с вершины горы стартовал лыжник Василий и, проехав 800 метров, встретил Григория. Найдите длину трассы, если известно, что Василий закончил спуск ровно тогда, когда Григорий добрался до вершины горы. Скорости лыжников и пешехода считать постоянными.

7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и ребрами AA', BB', CC' вписана сфера радиуса $\sqrt{21}$. Найдите расстояние между прямыми $A'K$ и $B'L$, где K и L — точки, лежащие на AB и BC соответственно, и $AK : KB = BL : LC = 2 : 3$.

8. Найдите все пары (x, y), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{2 - \cos x}{2 - \cos 2x} + \frac{2 - \cos 2x}{\left(y^2 + 1\right)^2} + \frac{\left(y^2 + 1\right)^2}{|y| + 1} + \frac{|y| + 1}{2 - \cos x}.$$

ДВИ-2014

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/3}(x^2+4x+31)$.

3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{-5x-3}<x^{-7}$.

4. Решите уравнение $\sin^2 x+\sqrt{2}|\sin x|\cos\left(\dfrac{5x}{2}-\dfrac{5\pi}{8}\right)+\dfrac{1}{2}=0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A. Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите CO_2, если известно, что $LO_1=2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

6. Найдите все x, y на интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^3 x}+\dfrac{1}{\sin^3 x}=16,\\ \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 y=6.\end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{7}$. Найдите расстояние между большей диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

8. Пусть

$$f(x,y)=\sqrt{-5x^2-13y^2-16xy+2}+y,$$

$$g(x,y)=-\sqrt{-5x^2-13y^2-16xy+2}+y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

ДВИ-2013

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 3. Один из его корней равен 4/3. найдите второй корень, если известно, что $f(0) = -2$.

2. Вычислите $\log_8 10 \cdot \log_{10} 4$.

3. Решите неравенство $15\left(4 + 4^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(4^{1+2x} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 20^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{x}{2}}$.

4. Решите уравнение $\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x} + \dfrac{\sin 3x}{\cos 2x} = \dfrac{\sin 2x}{\cos 3x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin 3x}$.

5. От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 14 км. В 7 : 00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время им навстречу с биостанции вышел катер рыбинспекции. Браконьеры тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. В 7 : 38, когда браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, рыбинспекторы осознали, что они идут с браконьерами на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно на биостанцию. До биостанции они добрались ровно в тот момент, когда браконьеры выехали за пределы заповедника — в 7 : 50. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры и рыбинспекторы, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r, причем $R = 2r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ AC равна 4.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'C'$ верхнего основания (параллельном AC) отмечена точка D так, что $A'D : DC' = 2 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $AB'CD$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin\left(x - a\ln|x|\right) = x + 1$ имеет бесконечно много решений.

ДВИ-2012

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\frac{5}{7}$ и $\frac{9}{4}$, а свободный член равен -5.

2. Вычислите $\log_3 \log_{64} \frac{716}{179}$.

3. Решите неравенство $(4^x - 7 \cdot 2^x + 12) \cdot \sqrt{3^{x+1} - 1} \leqslant 0$.

4. Решите уравнение $\cos 3x = \cos x - \sqrt{3} \sin x$.

5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $|2y - x| + 2|y + 4| + |x| = 8$.

6. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AC в точках M, N (точка M лежит между точками A и N). Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AM = 1$, $NC = 3$, $AK : KB = 2 : 1$ и $BL : LC = 1 : 4$.

7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $a\sqrt{x + y} = \sqrt{2x} + \sqrt{3y}$ имеет единственное решение (x, y).

8. В основании пирамиды лежит правильный треугольник ABC со стороной 5, боковые ребра AS, BS, CS пирамиды равны соответственно 7, 7 и 3. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается прямых AC и BC. Найдите высоту цилиндра.

ДВИ-2011

1. Вычислите значение функции $\dfrac{x^2-5}{x-0,2}$ в точке $x=\dfrac{9}{4}$.

2. Решите уравнение $(\sin x+\cos x)^2=2$.

3. Решите уравнение $\log_3(5-2x)=\log_9(5+x)$.

4. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{2+3x}-1}<1$.

5. Медианы AP и BQ треугольника ABC пересекаются в точке D. Найдите длину отрезка AB, если $CD=\sqrt{12}$ и известно, что вокруг четырехугольника $PCQD$ можно описать окружность.

6. Найдите наибольшее значение функции $\dfrac{6^x}{9^{x+1}+6^x+4^{x-1}}$ и точку x, в которой это значение достигается.

7. Внутри куба с ребром 3 расположены две сферы. Первая касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Вторая сфера касается тех же двух боковых граней, грани куба, параллельной основанию, и первой сферы. Чему равен радиус второй сферы, если радиус первой равен 1?

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}3x^2+4xy+12y^2\leqslant 1,\\ 5x+6y\leqslant -3.\end{cases}$$

ОТВЕТЫ

ДВИ-2022

Вариант 2

1. 11 **2.** 64 **3.** $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ \pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ **4.** $\left(0;\frac{1}{4}\right]\cup[2;+\infty)$ **5.** $\sqrt{5}$ **6.** 0 **7.** 45°

Вариант 3

1. 3 **2.** 4 **3.** $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3},\ 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ **4.** $\left[-\frac{2}{3};0\right)\cup(0;1)$ **5.** $9+3\sqrt{3}$ **6.** $(-1,-1),\ (1,1)$ **7.** $\sqrt{2}$

Вариант 4

1. 5 **2.** 49 **3.** $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ **4.** $(0;1)\cup(1;3]\cup\left[2+\sqrt{7};+\infty\right)$ **5.** 252 **6.** $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$ **7.** $55:89$

Вариант 5

1. 4 **2.** 15 **3.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$ **4.** $(-6;-5)\cup[-3;3]\cup(5;6)$ **5.** 45° **6.** (p,p), где $p\geqslant 0$ **7.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$

Вариант 6

1. $\left(\sqrt{3}\right)^{15}$ **2.** 14 **3.** $\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3},\ \frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ **4.** $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$ **5.** $4\sqrt{3}$ **6.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)$ **7.** $\frac{\sqrt{11}}{4}$

Вариант 7

1. 9 **2.** 0 **3.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ **4.** $\left(\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right)\cup[3;+\infty)$ **5.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **6.** $-6\pi^2$ **7.** $\frac{5+\sqrt{17}}{12}$

ДВИ-2021

Вариант 3

1. 12 **2.** 72 % **3.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$ **4.** $\left(1;\sqrt{2}\right]\cup(2;3]$ **5.** 2 **6.** $\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$ **7.** $1:2$

Вариант 4

1. 3 **2.** В 7 раз **3.** $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$ **4.** $\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup(1;3]$ **5.** 1 **6.** $[0;1)\cup\{3\}\cup(5;+\infty)$ **7.** 60°

Вариант 5

1. 4 **2.** 24% **3.** $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ **4.** $(1;2)\cup\left\{3^{\log_2 3}\right\}$ **5.** $(3+2\sqrt{3}):1$ **6.** $\left(\frac{1}{2};-1\right)$ **7.** 3

Вариант 6

1. 2 **2.** 60% **3.** $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ **4.** $(3;4)\cup[7;+\infty)$ **5.** 30° **6.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
7. $\sqrt{5}$

ДВИ-2020

Вариант 4

1. 4 **2.** 201 **3.** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ **4.** $\left(\frac{1}{2};\frac{5-\sqrt{5}}{5}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{5}}{5};\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)$ **5.** $22\sqrt{3}$ **6.** $\sqrt{13}-1$ **7.** 0

Вариант 5

1. 3 **2.** 320 **3.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ **4.** $\left(\sqrt{\frac{2}{17}};\sqrt{\frac{1}{8}}\right]\cup\left(1;\sqrt{2}\right]$ **5.** 18 **6.** $\frac{1}{6}$ **7.** $(8;+\infty)$

Вариант 6

1. 2 **2.** 8 **3.** $\frac{\pi n}{4},\ \pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$ **4.** $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$ **5.** 1 **6.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **7.** 1

ДВИ-2019

1. 5 **2.** 3 **3.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ (-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ **4.** $\left(\frac{1}{3};3\right)$ **5.** 12 **6.** $\begin{cases}a\geqslant\frac{1}{6},\\ b\geqslant\frac{1}{16}\end{cases}$ **7.** $25:17$

8. $\begin{cases}x=\pm\arccos\frac{1}{7},\\ y=\pm\arcsin\frac{1}{7}\end{cases}$

ДВИ-2018

1. Второе **2.** $\pm\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ **3.** $\dfrac{\pi k}{6}$, $\dfrac{\pi k}{11}$, $k \in \mathbb{Z}$ **4.** $(0; 2-\sqrt{3}) \cup (1; 2+\sqrt{3})$ **5.** 4 **6.** 3 **7.** $\dfrac{4}{3}$

8. $\begin{cases} x = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

ДВИ-2017

1. Первое **2.** 10 **3.** $\pi + 2\pi k$, $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{3}$, $-\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$ **4.** $\{1\} \cup [2\log_5 6; 3\log_5 6]$ **5.** $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

6. Пятую часть пути от A до B **7.** $\dfrac{\sqrt[4]{75}}{15}$ **8.** $\begin{cases} x = 7\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}, \\ y = -2\sqrt{2\pi} \end{cases}$

ДВИ-2016

1. $\dfrac{41}{12}$ **2.** ± 3 **3.** $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ **4.** $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (2; +\infty)$. **5.** 2 **6.** В 13:00 **7.** $4\sqrt{2}$

8. $8\sqrt{5}$, $\begin{cases} a = 2, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

ДВИ-2015

1. 3 **2.** 85 **3.** $\left[-\dfrac{13\pi}{12} + 2\pi k; -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{12} + 2\pi k; \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ **4.** $-\dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}$

5. $3 \pm \sqrt{7}$ **6.** 2 км **7.** $\dfrac{15}{2}$ **8.** $\begin{cases} x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ y = 0 \end{cases}$

ДВИ-2014

1. 1 **2.** -3 **3.** $\left(0; \dfrac{4}{5}\right) \cup (1; +\infty)$. **4.** $\dfrac{9\pi}{4} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ **5.** 4 **6.** $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{6}\right)$ **7.** $\dfrac{\sqrt{7}}{6}$ **8.** $[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$

ДВИ-2013

1. $-\dfrac{1}{2}$ **2.** $\dfrac{2}{3}$ **3.** $[-1; 0]$ **4.** $\dfrac{\pi k}{10}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus (2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z})$ **5.** 4 **6.** $\sqrt{17} - 1$ **7.** $\left(1 + \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{11}}{3} + \dfrac{\sqrt{14}}{3}\right)^{-1}$

8. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

ДВИ-2012

1. $\dfrac{28}{9}x^2 - \dfrac{43}{9}x - 5$ **2.** -1 **3.** $\{-1\} \cup [\log_2 3; 2]$ **4.** πk, $(-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ **5.** 16 **6.** $\sqrt{\dfrac{15}{2}}$

7. $(-\infty; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$ **8.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{26}$

ДВИ-2011

1. $\dfrac{5}{164}$ **2.** $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ **3.** $\dfrac{5}{4}$ **4.** $\left[-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{4}; 1\right]$ **5.** 6 **6.** $\dfrac{1}{4}$ при $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{6}$ **7.** $\dfrac{5-\sqrt{15}}{2}$

8. $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{12}\right)$

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ткачук В. В. Математика — абитуриенту. — 20-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2020 — 944 с.

[2] Центральная приемная комиссия МГУ им. М.В. Ломоносова [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://cpk.msu.ru