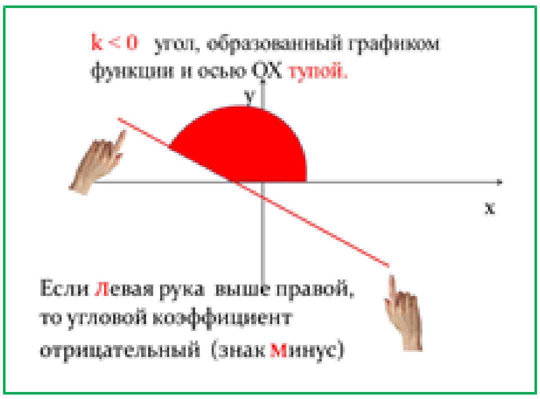
Графики функций.
Задание 10 ЕГЭ по математике (профильный уровень)

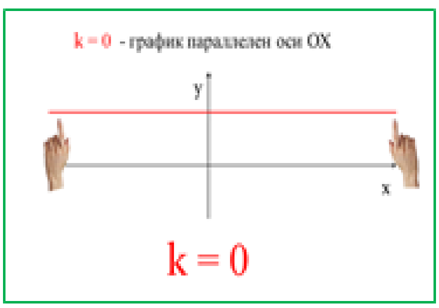
Как формулируется задание 10 ЕГЭ по математике? По графику функции, который дается в условии, вам нужно определить неизвестные параметры в ее формуле. Возможно — найти значение функции в некоторой точке или координаты точки пересечения графиков функций.

Чтобы выполнить это задание, надо знать, как выглядят и какими свойствами обладают графики элементарных функций. Надо уметь читать графики, то есть получать из них необходимую информацию. Например, определять формулу функции по ее графику.

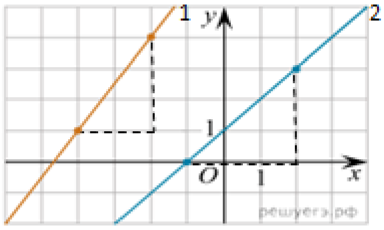
Рекомендации:
Запоминай, как выглядят графики основных элементарных функций.
Замечай особенности графиков, чтобы не перепутать параболу с синусоидой : -)
Проверь себя: какие действия нужно сделать с формулой функции, чтобы сдвинуть ее график по горизонтали или по вертикали, растянуть, перевернуть?
Разбирая решения задач, обращай внимание на то, как мы ищем точки пересечения графиков или неизвестные переменные в формуле функции. Такие элементы оформления встречаются также в задачах с параметрами.

Важный принцип - это логичность. В шутливой манере он говорит: "нормальные герои всегда идут в обход". Нужно учиться использовать наличный запас знаний, применяя различные "хитрости" и "правдоподобные рассуждения" для ответа наиболее простым и понятным способом.





1. На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точек пересечения.



Решение:

1) Уравнение прямой y=kx+b. Первая прямая проходит через точки (-4;1) и (-2;4), k=$\frac{3}{2}$.

Найдем b,подставив координаты одной из точек в уравнение 1=1,5·(-4)+ b, b=7.

y=1,5x+7-уравнение1 прямой.

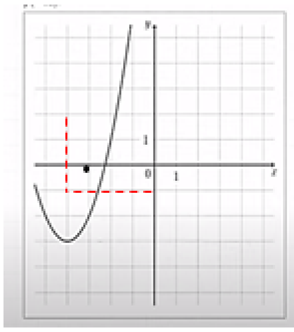
2) Вторая прямая проходит через точки (-1;0) и (2;3), k=$\frac{3}{3}$ = 1.

Найдем b,подставив координаты одной из точек в уравнение 0=1·(-1)+ b, b=1.Тогда y=x+1-уравнение2 прямой.

3)Решим систему уравнений $\begin{cases} y = 1,5x + 7, \\ y = x + 1 \end{cases}$ *Вычтем из 1 уравнения 2 уравнение , получим 0=0,5x+6.Отсюда x=-12.Тогда y=-11.*

Ответ:-11

2. На рисунке изображен график функции *f(x)= a x²+bx+c*,где числа *a,b* и *c*-целые. Найдите значение *f(-12)*.



Решение:

f(x)= a(x-m)²+n,где m, n-координаты вершины параболы.

m=-4,n=-3, a =1.

f(x)=(x-(-4))²+(-3),

f(x)=(x+4)²-3,

f(-12)=(-12+4)²-3,

f(-12)=61.

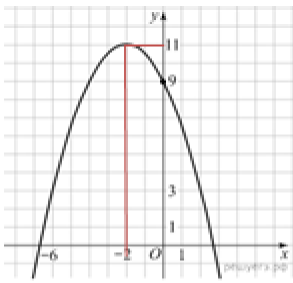
Ответ:61

3. На рисунке изображен график функции *f(x)=* $\frac{x^2}{a}$ *+bx+c*, где числа *a ,b* и *c*-целые. Найдите значение *f(4)*.

Решение:

f(x)=$\frac{1}{a}$(x-m)²+n,где (m, n)-координаты вершины параболы.

По графику m= -2,n= 11, a = -2. (Введем новую систему координат через вершину параболы, тогда график функции f(x)= $\frac{x^2}{a}$ проходит через точку (2;-2).



Подставив в формулу f(x)= $\frac{x^2}{a}$,найдем a)

f(x)= - $\frac{1}{2}$(x+2)²+11= - $\frac{1}{2}$x²-2x+9,значит, a = - 2, b=-2, c=9.

Тогда f(4)= - $\frac{(4+2)^2}{2}$+11= - 18+11= - 7.

Ответ:- 7

4. На рисунке изображен график функции $f(x)= a\,x^2+bx+c$. Найдите $f(-1)$.

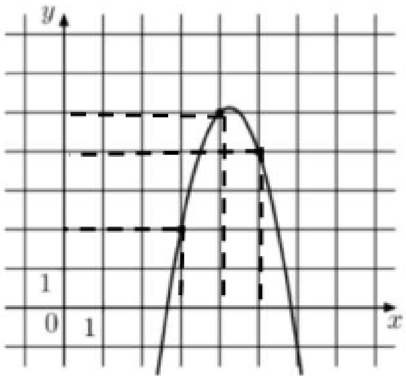
Решение:

Из рисунка видно, что график проходит через (3;2);(4;5);(5;4)

$9a+3b+c= 2,$

$16a+4b+c=5,$

$25a+5b+c=4.$



Вычтем из 2 уравнения 1-е, получим $7a+b=3$

Вычтем из 3уравнения 2-е, получим $9a+b=-1$

Решив систему уравнений $\begin{cases} 7a+b=3, \\ 9a+b=-1; \end{cases}$

находим $a=-2$,$b=17$.

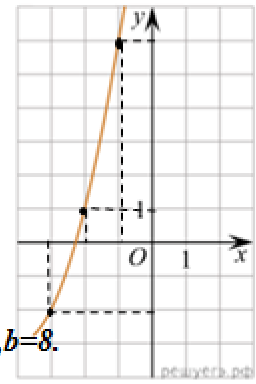
Тогда $f(x)=-\ 2x^2+17x+c$ и $f(3)=2$, найдем ,что $c=-31$.

$f(x)=-\ 2x^2+17x-31,$

$f(-1)=-2-17-31=-50$

Ответ:-50

5. На рисунке изображен график функции $f(x)=ax^2+bx+c$,где числа a ,b и c-целые. Найдите абсциссу вершины параболы.



Решение:

Абсцисса вершины параболы найдем по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Из рисунка видно, что $f(-3)=-2$; $f(-2)=1$; $f(-1)=6$.Тогда

$\begin{cases} 9a-3b+c= -2, \\ 4a-2b+c=1, \\ a-b+c=6\ ; \end{cases}$

вычтем из 1 уравнения 2-е, получим$5a-b=-3$

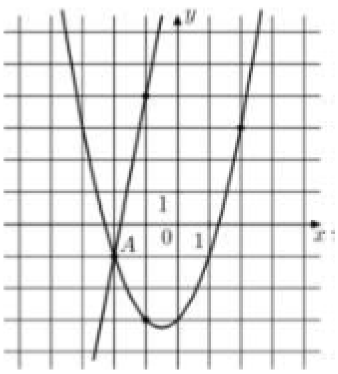
вычтем из 2 уравнения 3-е,получим $3a-b=-5$.

Решив систему уравнений $\begin{cases} 5a-b=-3, \\ 3a-b=-5; \end{cases}$ *находим $a=1$,$b=8$.*

Абсцисса вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a}=-4.$

Ответ:-4

6. На рисунке изображены графики функций $f(x)=5x+9$ и $g(x)= ax^2+bx+c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B



Решение: По графику $c=-3$.График функции $g(x)$ проходит через точки (-2;-1);(-1;-3);(2;3).

Подставим координаты точки (-1;-3), получим $-3=a-\ b-3$.Отсюда $a=b$.

$g(x)= ax^2+ax-3.$

Подставим координаты точки (2;3), получим, что $a=1$.

$g(x)= x^2+x-3.$

Чтобы найти абсциссу точки ,нужно решить уравнение $x^2+x-3=5x+9$,

$x^2-4x-12=0.$

По теореме Виета $x_1 \cdot x_2=-12$, $x_1+x_2=4$

По графику $x_1=-2$, тогда $x_2=6$.

Ответ:6

7. На рисунке изображен график функции $f(x)=ax^2+bx+c$, где числа a, b и c-целые. Найдите значение дискриминанта уравнения $f(x)=0$.

Решение:

$f(x)=a(x-m)^2+n$, где m, n-координаты вершины параболы.

$m=-3, n=3, a=1$.

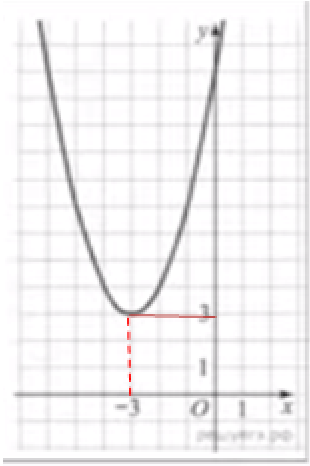
$f(x)=(x-(-3))^2+3$

$f(x)=(x+3)^2+3$,

$f(x)=x^2+6x+12$, так как $f(x)=0$.

то $x^2+6x+12=0$

$D=6^2-4\cdot1\cdot12=-12$.

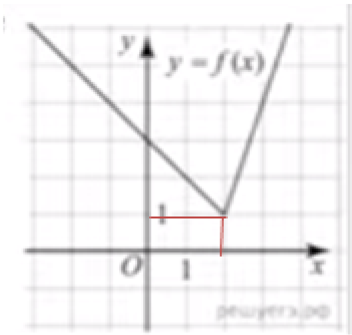


Ответ:-12

8. На рисунке изображен график функции вида $f(x)=ax+|bx+c|+d$, где числа a, b, c и d-целые.
Найдите корень уравнения $bx+c=0$

Решение:

$|bx+c|=0$ в точке излома. Значит, $bx+c=0$ при $x=2$.



Ответ:2

9. На рисунке изображён график функции вида $f(x)=ax+|bx+c|+d$, где числа a, b, c и d — целые. Найдите корень уравнения $ax+d=0$.

Решение:

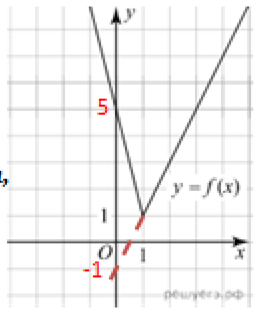
$|bx+c|=0$ в точке излома при $x=1$,

Если $x<1$, то $f(x)=ax-bx-c+d=(a-b)x+d-c$, где $(a-b)$-угловой коэффициент, $(d-c)$-ордината точки пересечения прямой с осью Ox.

По графику $a-b=-4$; $d-c=5$.

Если $x>1$, то $f(x)=ax+bx+c+d=(a+b)x+c+d$, где $a+b$-угловой коэффициент, по графику $a+b=2$.

Продолжив прямую до пересечения с осью Oy, получим, что $c+d=-1$.



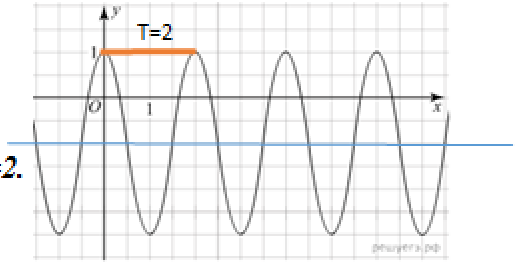
Решив эти системы $\begin{cases} a-b=-4 \\ a+b=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} c+d=-1 \\ d-c=5 \end{cases}$, получим, что

$a=-1; b=3; c=-3; d=2$. Подставив найденные значения в уравнение $ax+d=0$, получим $-x+2=0$,

$x=2$.

Ответ:2

10. На рисунке изображен график функции вида *f(x)= a cos(bπx+c)+d*, где числа *a,b, c* и *d*-целые. Найдите $f\left(\frac{100}{3}\right)$.



Решение:

По графику $f_{max} = 1, f_{min}=-3$

$d=\frac{f_{max}+f_{min}}{2}=\frac{1-3}{2}= -1.$ $|a|=\frac{f_{max}-f_{min}}{2}=\frac{1+3}{2}=2.$

***По графику** a =2, c=0, T=2*

$T=\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$, *то есть* $\frac{2}{b}=2$, *отсюда b=1*

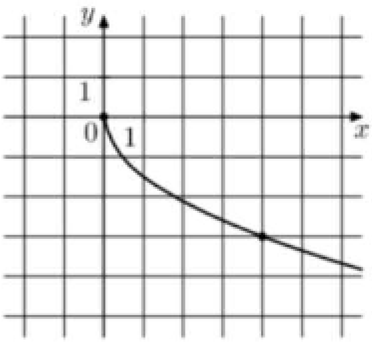
f(x)=2cosπx-1,

$f\left(\frac{100}{3}\right)=f\left(\frac{96}{3}+\frac{4}{3}\right)=f\left(32+\frac{4}{3}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right),$

$f\left(\frac{4}{3}\right)=2\cos\pi\frac{4}{3}-1 = 2\cos\frac{4}{3}\pi-1 = 2\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)-1= -2\cos\frac{\pi}{3}-1= -2.$

Ответ:-2

11. На рисунке изображен график функции ***f(x)=k√x. Найдите f(2,56)***

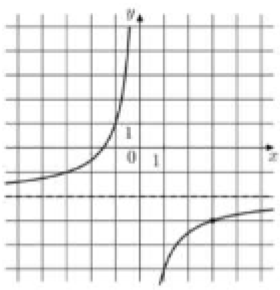


Решение:
График этой функции проходит через точку (4;-3).Подставив координаты этой точки, получим
$-3=k\sqrt{4}$,
2k=-3,
k =-1,5.
$f(2,56)=-1,5\sqrt{2,56} = -1,5\cdot 1,6 = -2,4.$

Ответ:-2,4

12. На рисунке изображен график функции $f(x)=\frac{k}{x}+a$**. Найдите *f (0,25)***

Решение: График функции имеет горизонтальную асимптоту y=-2, значит, a=-2.

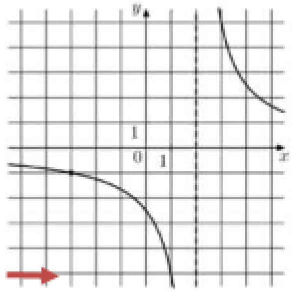


(График функции $f(x)=\frac{k}{x}+a$ ***получается сдвигом графика функции*** $f(x)=\frac{k}{x}$ ***вдоль оси Оу на величину |a| вверх, если a>0 и вниз если a<0)***
По графику a= -2 и проходит через точку (3;-3).
$-3=\frac{k}{3}-2$ ***отсюда k=-3.Значит,***
$f(x)=\frac{-3}{x}-2,$
$f(0,25)=\frac{-3}{0,25}-2= -14.$

Ответ:- 14

13. На рисунке изображен график функции $f(x)=\frac{k}{x+a}$.

Найдите $f\left(-4\frac{2}{3}\right)$.



Решение:

График функции имеет вертикальную асимптоту x=2, значит, a= - 2.

(График функции $f(x)=\frac{k}{x+a}$ ***получается сдвигом графика функции*** $f(x)=\frac{k}{x}$ ***вдоль оси Ох на величину |a| влево, если a>0 и вправо если a<0).***

По графику a= -2 и проходит через точку (-3;-1).

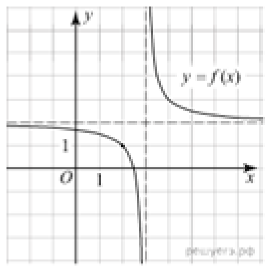
$-1=\frac{k}{-3-2}$***, отсюда k=5.Значит,***

$f(x)=\frac{5}{x-2}$,

$f\left(-4\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{-4\frac{2}{3}-2}=5:\left(-6\frac{2}{3}\right)=-0{,}75.$

Ответ:-0,75

14. На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\frac{a}{x+b}+c$, **где числа** a, b **и** c **— целые. Найдите** $f(13)$.



Решение:

График функции имеет горизонтальную асимптоту у=2, значит, с=2.

График функции имеет вертикальную асимптоту х=3, значит, b= - 3.

По графику f(2)=1, тогда $\frac{a}{2-3}+2=1$***, отсюда a=1.***

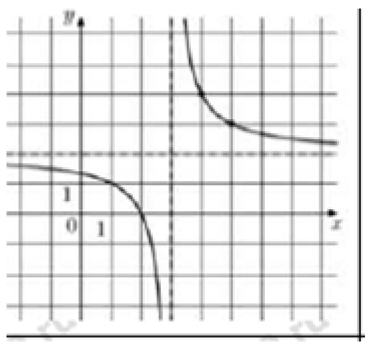
Таким образом, $f(x)=\frac{1}{x-3}+2$

Найдём $f(13)=\frac{1}{13-3}+2=2{,}1.$

f(13)=2,1.

Ответ:2,1

15. На рисунке изображен график функции $f(x)=\frac{kx+a}{x+b}$. **Найдите** k



Решение:

Преобразуем данную функцию

$f(x)=\frac{kx+a}{x+b}=\frac{kx+kb-kb+a}{x+b}=\frac{k(x+b)-kb+a}{x+b}=k+\frac{a-kb}{x+b}.$

Или

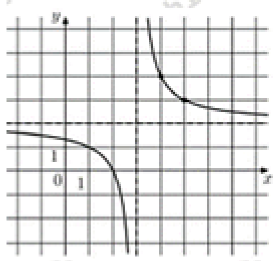
$$\begin{array}{r|l} kx+a & x+b \\ \hline -(kx+kb) & k \\ a-kb & \end{array}$$

$f(x)=k+\frac{a-kb}{x+b}$

График функции имеет горизонтальную асимптоту у=2, значит, k=2.

Ответ:2

16. На рисунке изображен график функции $f(x)=\frac{kx+a}{x+b}$.
Найдите a



Решение:
Преобразуем данную функцию

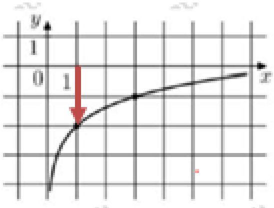
$$f(x)=\frac{kx+a}{x+b}=\frac{kx+kb-kb+a}{x+b}=\frac{k(x+b)-kb+a}{x+b}=k+\frac{a-kb}{x+b}.$$

Или

$$\begin{array}{r|l} kx+a & x+b \\ \hline -\;kx+kb & k \\ \hline a-kb & \end{array} \qquad f(x)=k+\frac{a-kb}{x+b}$$

График функции имеет горизонтальную асимптоту $y=2$, значит, $k=2$.
График функции имеет вертикальную асимптоту $x=3$, значит, $b=-3$.
По графику $f(5)=3$, тогда $3=\frac{2\cdot 5+a}{1-3}$, отсюда $a=-4$.
Ответ:-4

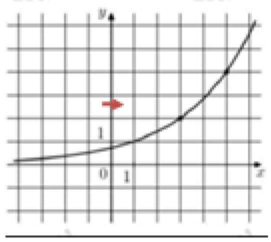
17. На рисунке изображен график функции
$f(x)=b+\log_a x$.Найдите значение x при котором $f(x)=2$.



Решение:
График функции $f(x)=b+\log_a x$ получается сдвигом графика функции $f(x)=\log_a x$. вдоль оси Оу на величину $|b|$ вверх, если $b>0$ и вниз если $b<0$.
По графику $b=-2$ и проходит через точку (3;-1).
$-1=-2+\log_a 3$, отсюда $a=3$.Значит,
$f(x)=-2+\log_3 x$, найдем x при котором $f(x)=2$.
$2=-2+\log_3 x$,
$\log_3 x=4$, значит, $x=81$.

Ответ:81

18. На рисунке изображен график функции
$f(x)=a^{x+b}$.Найдите значение x при котором $f(-5)$.



Решение:
График функции $f(x)=a^{x+b}$получается сдвигом графика функции $f(x)=a^x$ вдоль оси Ох на величину $|b|$ влево, если $b>0$ и вправо если $b<0$.
По графику $b=-1$ и проходит через точку (3;2).
$2=a^2$ отсюда $a=\sqrt{2}$.Значит,
$f(-5)=\sqrt{2}^{-5-1}=\frac{1}{\sqrt{2}^6}=\frac{1}{8}=0,125$

Ответ:0,125