

ТИП #1

1. Решите неравенство

$$\frac{2^x + 8}{2^x - 8} + \frac{2^x - 8}{2^x + 8} \geq \frac{2^{x+4} + 96}{4^x - 64}.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 3$. Перенесем всё в левую часть.

$$\frac{2^x + 8}{2^x - 8} + \frac{2^x - 8}{2^x + 8} - \frac{32 \cdot 2^x + 96}{(2^x - 8)(2^x + 8)} \geq 0.$$

$$\frac{2^{2x} + 16 \cdot 2^x + 64 + 2^{2x} - 16 \cdot 2^x + 64 - 16 \cdot 2^x - 96}{(2^x - 8)(2^x + 8)} \geq 0.$$

$$\frac{2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 16}{(2^x - 8)(2^x + 8)} \geq 0, \quad \frac{(2^x - 4)^2}{(2^x - 8)(2^x + 8)} \geq 0,$$

$$\frac{(2^x - 4)^2}{2^x - 8} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x > 3. \end{cases}$$

Ответ: $x = 2, x > 3$.

2. Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 8^{x-1}}{2 \cdot 8^{x-1} - 1} \geq \frac{3}{8^x - 1} + \frac{8}{64^x - 5 \cdot 8^x + 4}$$

Решение.

$$\frac{8^x}{8^x - 4} - \frac{3}{8^x - 1} - \frac{8}{(8^x - 4)(8^x - 1)} \geq 0.$$

$$\frac{8^{2x} - 8^x - 3 \cdot 8^x + 12 - 8}{(8^x - 4)(8^x - 1)} \geq 0.$$

$$\frac{(8^x - 2)^2}{(8^x - 4)(8^x - 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8^x = 2, \\ 8^x < 1, \\ 8^x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ x < 0, \\ x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup \{1/3\} \cup (2/3; +\infty)$.

3. Решите неравенство

$$\frac{7^x + 7}{7^x - 7} + \frac{7^{x-1} - 1}{7^{x-1} + 1} \geq \frac{4 \cdot 7^x + 96}{49^x - 49}.$$

Решение.

$$\frac{7^x + 7}{7^x - 7} + \frac{7^x - 7}{7^x + 7} - \frac{4 \cdot 7^x + 96}{(7^x - 7)(7^x + 7)} \geq 0.$$

$$\frac{7^{2x} + 14 \cdot 7^x + 49 + 7^{2x} - 14 \cdot 7^x + 49 - 4 \cdot 7^x - 96}{(7^x - 7)(7^x + 7)} \geq 0.$$

$$\frac{7^{2x} - 2 \cdot 7^x + 1}{(7^x - 7)(7^x + 7)} \geq 0.$$

$$\frac{(7^x - 1)^2}{7^x - 7} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x > 1. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0, x > 1$.

4. Решите неравенство

$$\frac{3^x + 9}{3^x - 9} + \frac{3^x - 9}{3^x + 9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1} + 144}{9^x - 81}.$$

Решение.

$$\frac{3^x + 9}{3^x - 9} + \frac{3^x - 9}{3^x + 9} - \frac{12 \cdot 3^x + 144}{(3^x - 9)(3^x + 9)} \geq 0.$$

$$\frac{3^{2x} + 18 \cdot 3^x + 81 + 3^{2x} - 18 \cdot 3^x + 81 - 12 \cdot 3^x - 144}{(3^x - 9)(3^x + 9)} \geq 0.$$

$$\frac{3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 9}{(3^x - 9)(3^x + 9)} \geq 0.$$

$$\frac{(3^x - 3)^2}{3^x - 9} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x > 2. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1, x > 2$.

5. Решите неравенство

$$\frac{2^x}{2^x - 8} + \frac{2^x + 8}{2^x - 4} + \frac{66}{4^x - 12 \cdot 2^x + 32} \leq 0.$$

Решение.

$$\frac{2^x}{2^x - 8} + \frac{2^x + 8}{2^x - 4} + \frac{66}{(2^x - 8)(2^x - 4)} \leq 0.$$

$$\frac{2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 2^{2x} - 64 + 66}{(2^x - 8)(2^x - 4)} \leq 0.$$

$$\frac{2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1}{(2^x - 8)(2^x - 4)} \leq 0.$$

$$\frac{(2^x - 1)^2}{(2^x - 8)(2^x - 4)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ 2 < x < 3. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0, 2 < x < 3.$

6. Решите неравенство

$$\frac{9^{x-1}}{9^{x-1} - 1} \geq \frac{5}{9^x - 1} + \frac{36}{81^x - 10 \cdot 9^x + 9}$$

Решение.

$$\frac{9^x}{9^x - 9} - \frac{5}{9^x - 1} - \frac{36}{(9^x - 9)(9^x - 1)} \geq 0.$$

$$\frac{9^{2x} - 9^x - 5 \cdot 9^x + 45 - 36}{(9^x - 9)(9^x - 1)} \geq 0.$$

$$\frac{(9^x - 3)^2}{(9^x - 9)(9^x - 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ x < 0, \\ x > 1. \end{cases}$$

Ответ: $x < 0, x = 1/2, x > 1$.

7. Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 4^{x-2}}{2 \cdot 4^{x-2} - 1} \leq \frac{7}{4^x - 1} + \frac{40}{16^x - 9 \cdot 4^x + 8}$$

Решение.

$$\frac{4^x}{4^x - 8} - \frac{7}{4^x - 1} - \frac{40}{(4^x - 8)(4^x - 1)} \leq 0.$$

$$\frac{4^{2x} - 4^x - 7 \cdot 4^x + 56 - 40}{(4^x - 8)(4^x - 1)} \leq 0.$$

$$\frac{(4^x - 4)^2}{(4^x - 8)(4^x - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 0 < x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1, 0 < x < \frac{3}{2}$.

8. Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 8^{x-1}}{2 \cdot 8^{x-1} - 1} \geq \frac{3}{8^x - 1} + \frac{8}{64^x - 5 \cdot 8^x + 4}$$

Решение.

$$\frac{8^x}{8^x - 4} - \frac{3}{8^x - 1} - \frac{8}{(8^x - 4)(8^x - 1)} \geq 0.$$

$$\frac{8^{2x} - 8^x - 3 \cdot 8^x + 12 - 8}{(8^x - 4)(8^x - 1)} \geq 0.$$

$$\frac{(8^x - 2)^2}{(8^x - 4)(8^x - 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ x < 0, \\ x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $x < 0$, $x = \frac{1}{3}$, $x > \frac{2}{3}$.

9. Решите неравенство

$$\frac{3^x}{3^x - 3} + \frac{3^x + 1}{3^x - 2} + \frac{5}{9^x - 5 \cdot 3^x + 6} \leq 0.$$

Решение.

$$\frac{3^x}{3^x - 3} + \frac{3^x + 1}{3^x - 2} + \frac{5}{(3^x - 3)(3^x - 2)} \leq 0.$$

$$\frac{3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 + 5}{(3^x - 3)(3^x - 2)} \leq 0.$$

$$\frac{3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1}{(3^x - 3)(3^x - 2)} \leq 0.$$

$$\frac{(3^x - 1)^2}{(3^x - 3)(3^x - 2)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ \log_3 2 < x < 1. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0, \log_3 2 < x < 1.$

ТИП #2

10. Решите неравенство

$$\frac{8^{x+1} - 40}{2 \cdot 64^x - 32} \leq 1.$$

Решение.

$$\frac{8 \cdot 8^x - 40 - 2 \cdot 8^{2x} + 32}{2(8^x - 4)(8^x + 4)} \leq 0.$$

$$\frac{(8^x - 2)^2}{8^x - 4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{1}{3}, x > \frac{2}{3}.$

11. Решите неравенство

$$\frac{6 \cdot 9^{x-1} - 10}{81^{x-1/2} - 9} \leq 1.$$

Решение.

$$\frac{6 \cdot 9^x - 90 - 9^{2x} + 81}{(9^x - 9)(9^x + 9)} \leq 0.$$

$$\frac{(9^x - 3)^2}{9^x - 9} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ x > 1. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}, x > 1.$

12. Решите неравенство

$$\frac{4^{x+1} + 4^x - 4}{16^x - 9 \cdot 4^x + 8} \geq -1.$$

Решение.

$$\frac{5 \cdot 4^x - 4 + 4^{2x} - 9 \cdot 4^x + 8}{(4^x - 1)(4^x - 8)} \geq 0.$$

$$\frac{(4^x - 2)^2}{(4^x - 1)(4^x - 8)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ x < 0, \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x < 0, x = \frac{1}{2}, x > \frac{3}{2}$.

ТИП #3

13. Решите неравенство

$$\frac{\log_7(49x^2) - 7}{\log_7^2 x - 4} \leq 1.$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$; $x \neq \frac{1}{49}, 49$. Выполним равносильные на ОДЗ преобразования

$$\frac{2 \cdot \log_7(7x) - 7 - \log_7^2 x + 4}{(\log_7 x - 2)(\log_7 x + 2)} \leq 0.$$

$$\frac{2 + 2 \log_7 x - 3 - \log_7^2 x}{(\log_7 x - 2)(\log_7 x + 2)} \leq 0.$$

$$\frac{\log_7^2 x - 2 \log_7 x + 1}{(\log_7 x - 2)(\log_7 x + 2)} \geq 0.$$

$$\frac{(\log_7 x - 1)^2}{(\log_7 x - 2)(\log_7 x + 2)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{49}, \quad x > 49.$$

Ответ: $0 < x < \frac{1}{49}, x = 7, x > 49$.

14. Решите неравенство

$$\frac{\log_4(16x^4) + 11}{\log_4^2 x - 9} \geq -1.$$

Решение.

$$\frac{4 \log_4 x + 13 + \log_4^2 x - 9}{(\log_4 x - 3)(\log_4 x + 3)} \geq 0.$$

$$\frac{\log_4^2 x + 4 \log_4 x + 4}{(\log_4 x - 3)(\log_4 x + 3)} \geq 0.$$

$$\frac{(\log_4 x + 2)^2}{(\log_4 x - 3)(\log_4 x + 3)} \geq 0 \Leftrightarrow, \quad 0 < x < \frac{1}{64}, \quad x = \frac{1}{16}, \quad x > 64.$$

Ответ: $0 < x < \frac{1}{64}, x = \frac{1}{16}, x > 64$

15. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(9x) - 13}{\log_3^2 x + \log_3 x^4} \leq 1.$$

Решение.

$$\frac{\log_3 x - 11 - \log_3^2 x - 4 \log_3 x}{\log_3 x (\log_3 x + 4)} \leq 0.$$

$$\frac{\log_3^2 x + 3 \log_3 x + 11}{\log_3 x (\log_3 x + 4)} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{81}, \quad x > 1.$$

Ответ: $0 < x < \frac{1}{81}, x > 1.$

16. Решите неравенство

$$\frac{\log_4(64x) + 1}{\log_4^2 x + \log_4 x^3} \geq -1.$$

Решение.

$$\frac{\log_4 x + 4 + \log_4^2 x + 3 \log_4 x}{\log_4 x (\log_4 x + 3)} \geq 0.$$

$$\frac{\log_4^2 x + 4 \log_4 x + 4}{\log_4 x (\log_4 x + 3)} \geq 0.$$

$$\frac{(\log_4 x + 2)^2}{\log_4 x (\log_4 x + 3)} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{64}, \quad x = \frac{1}{16}, \quad x > 1.$$

Ответ: $0 < x < \frac{1}{64}, x = \frac{1}{16}, x > 1.$

17. Решите неравенство

$$\frac{\log_2(4x^2) + 35}{\log_2^2 x - 36} \geq -1.$$

Решение.

$$\frac{2 \log_2 x + 37 + \log_2^2 x - 36}{(\log_2 x - 6)(\log_2 x + 6)} \geq 0.$$

$$\frac{2 \log_2 x + 37 + \log_2^2 x - 36}{(\log_2 x - 6)(\log_2 x + 6)} \geq 0.$$

$$\frac{(\log_2 x + 1)^2}{(\log_2 x - 6)(\log_2 x + 6)} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{64}, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x > 64.$$

Ответ: $0 < x < \frac{1}{64}, x = \frac{1}{2}, x > 64.$

ТИП #4

18. Решите неравенство

$$\frac{\log_6(36x) - 1}{\log_6^2 x - \log_6 x^3} \geq 0.$$

Решение.

$$\frac{\log_6 x + 1}{\log_6 x (\log_6 x - 3)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \log_6 x < 0, \\ \log_6 x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} \leq x < 1, \\ x > 216. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{6} \leq x < 1, x > 216.$

19. Решите неравенство

$$\frac{(\log_4 x + 2)^2}{\log_4^2 x - 9} \geq 0.$$

Решение.

$$\frac{(\log_4 x + 2)^2}{(\log_4 x + 3)(\log_4 x - 3)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{16}, \\ \frac{1}{64} < x, \\ x > 64. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{1}{16}, \frac{1}{64} < x, x > 64.$

ТИП #5

20. Решите неравенство

$$1 + \frac{11}{2^x - 8} + \frac{28}{4^x - 2^{x+4} + 64} \geq 0.$$

Решение.

$$1 + \frac{11}{2^x - 8} + \frac{28}{(2^x - 8)^2} \geq 0.$$

$$\frac{2^{2x} - 16 \cdot 2^x + 64 + 11 \cdot 2^x - 88 + 28}{(2^x - 8)^2} \geq 0.$$

$$\frac{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4}{(2^x - 8)^2} \geq 0.$$

$$\frac{(2^x - 1)(2^x - 4)}{(2^x - 8)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3, \\ x \leq 0, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Ответ: $x \neq 3, x \leq 0, x \geq 2.$

21. Решите неравенство

$$1 + \frac{14}{3^x - 9} + \frac{48}{9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81} \geq 0.$$

Решение.

$$1 + \frac{14}{3^x - 9} + \frac{48}{(3^x - 9)^2} \geq 0.$$

$$\frac{3^{2x} - 18 \cdot 3^x + 81 + 14 \cdot 3^x - 126 + 48}{(3^x - 9)^2} \geq 0.$$

$$\frac{3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3}{(3^x - 9)^2} \geq 0.$$

$$\frac{(3^x - 1)(3^x - 3)}{(3^x - 9)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Ответ: $x \neq 2, x \leq 0, x \geq 1$.

ТИП #6

22. Решите неравенство

$$1 + \frac{10}{\log_2 x - 5} + \frac{16}{\log_2^2 x - \log_2(32x^{10}) + 30} \geq 0.$$

Решение.

$$1 + \frac{10}{\log_2 x - 5} + \frac{16}{\log_2^2 x - 10 \log_2 x + 25} \geq 0.$$

$$\frac{\log_2^2 x - 10 \log_2 x + 25 + 10 \log_2 x - 50 + 16}{(\log_2 x - 5)^2} \geq 0.$$

$$\frac{(\log_2 x - 3)(\log_2 x + 3)}{(\log_2 x - 5)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{8}, \quad x \geq 8, \quad x \neq 32.$$

Ответ: $0 < x \leq \frac{1}{8}, x \geq 8, x \neq 32.$

23. Решите неравенство

$$1 + \frac{6}{\log_3 x - 5} + \frac{5}{\log_3^2 x - \log_3(27x^6) + 12} \geq 0.$$

Решение.

$$1 + \frac{6}{\log_3 x - 5} + \frac{5}{\log_3^2 x - 6 \log_3 x + 9} \geq 0.$$

$$\frac{\log_3^2 x - 6 \log_3 x + 9 + 6 \log_3 x - 30 + 5}{(\log_3 x - 3)^2} \geq 0.$$

$$\frac{(\log_3 x - 4)(\log_3 x + 4)}{(\log_3 x - 3)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{81}, \quad x \geq 81, \quad x \neq 27.$$

Ответ: $0 < x \leq \frac{1}{81}, x \geq 81, x \neq 27.$

ТИП #7

24. Решите неравенство

$$\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}.$$

Решение.

$$\frac{\log_4 x + 3}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4 x + 3} - \frac{4 \log_4 x + 16}{(\log_4 x - 3)(\log_4 x + 3)} \geq 0.$$

$$\frac{\log_4^2 x + 6 \cdot \log_4 x + 9 + \log_4^2 x - 6 \cdot \log_4 x + 9 - 4 \log_4 x - 16}{(\log_4 x - 3)(\log_4 x + 3)} \geq 0.$$

$$\frac{(\log_4 x - 2)^2}{(\log_4 x - 3)(\log_4 x + 3)} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{64}, \quad x = 16, \quad x > 64.$$

Ответ: $0 < x < \frac{1}{64}, x = 16, x > 64.$

25. Решите неравенство

$$\frac{\log_5(25x)}{\log_5 x - 2} + \frac{\log_5 x - 2}{\log_5(25x)} \geq \frac{6 - \log_5 x^4}{\log_5^2 x - 4}.$$

Решение.

$$\frac{\log_5 x + 2}{\log_5 x - 2} + \frac{\log_5 x - 2}{\log_5 x + 2} - \frac{6 - 4 \log_5 x}{(\log_5 x - 2)(\log_5 x + 2)} \geq 0.$$

$$\frac{\log_5^2 x + 2 \cdot \log_5 x + 4 + \log_5^2 x - 2 \cdot \log_5 x + 4 - 6 + 4 \log_5 x}{(\log_5 x - 2)(\log_5 x + 2)} \geq 0.$$

$$\frac{(\log_5 x + 1)^2}{(\log_5 x - 2)(\log_5 x + 2)} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{25}, \quad x = \frac{1}{5}, \quad x > 25.$$

Ответ: $0 < x < \frac{1}{25}, x = \frac{1}{5}, x > 25.$

26. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(81x)}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{\log_3(81x)} \geq \frac{24 - \log_3 x^8}{\log_3^2 x - 16}.$$

Решение.

$$\frac{\log_3 x + 4}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{\log_3 x + 4} - \frac{24 - 8 \log_3 x}{(\log_3 x - 4)(\log_3 x + 4)} \geq 0.$$

$$\frac{\log_3^2 x + 8 \cdot \log_3 x + 16 + \log_3^2 x - 8 \cdot \log_3 x + 16 - 24 + 8 \log_3 x}{(\log_3 x - 4)(\log_3 x + 4)} \geq 0.$$

$$\frac{(\log_3 x + 2)^2}{(\log_3 x - 4)(\log_3 x + 4)} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{81}, \quad x = 9, \quad x > 81.$$

Ответ: $0 < x < \frac{1}{64}, x = 16, x > 64.$

27. Решите неравенство

$$\frac{\log_2(32x)}{\log_2 x - 5} + \frac{\log_2 x - 5}{\log_2(32x)} \geq \frac{\log_2 x^{16} + 18}{\log_2^2 x - 25}.$$

Решение.

$$\frac{\log_2 x + 5}{\log_2 x - 5} + \frac{\log_2 x - 5}{\log_2 x + 5} - \frac{16 \log_2 x + 18}{(\log_2 x - 5)(\log_2 x + 5)} \geq 0.$$

$$\frac{\log_2^2 x + 10 \cdot \log_2 x + 25 + \log_2^2 x + 10 \cdot \log_2 x + 25 - 16 \log_2 x - 18}{(\log_2 x - 5)(\log_2 x + 5)} \geq 0.$$

$$\frac{(\log_2 x - 4)^2}{(\log_2 x - 5)(\log_2 x + 5)} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{32}, \quad x = 16, \quad x > 32.$$

Ответ: $0 < x < \frac{1}{32}, x = 16, x > 32.$

ТИП #8

28. Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 \left(\frac{x}{27}\right)} \geq \frac{2}{\log_3 x} + \frac{5}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}.$$

Решение.

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 x - 3} - \frac{2}{\log_3 x} - \frac{5}{\log_3 x (\log_3 x - 3)} \geq 0.$$

$$\frac{\log_3^2 x - 2 \log_3 x + 6 - 5}{\log_3 x (\log_3 x - 3)} \geq 0.$$

$$\frac{(\log_3 x - 1)^2}{\log_3 x (\log_3 x - 3)} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1, \quad x = 3, \quad x > 27.$$

Ответ: $0 < x < 1, x = 3, x > 27.$

29. Решите неравенство

$$\frac{\log_8 x}{\log_8 \left(\frac{x}{64}\right)} \geq \frac{2}{\log_8 x} + \frac{3}{\log_8^2 x - \log_8 x^2}.$$

Решение.

$$\frac{\log_8 x}{\log_8 x - 2} - \frac{2}{\log_8 x} - \frac{3}{\log_8 x (\log_8 x - 2)} \geq 0.$$

$$\frac{\log_8^2 x - 2 \log_8 x + 4 - 3}{\log_8 x (\log_8 x - 2)} \geq 0.$$

$$\frac{(\log_8 x - 1)^2}{\log_8 x (\log_8 x - 2)} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1, \quad x = 8, \quad x > 64.$$

Ответ: $0 < x < 1, x = 8, x > 64.$

30. Решите неравенство

$$\frac{\log_4 x}{\log_4 \left(\frac{x}{64}\right)} \geq \frac{4}{\log_4 x} + \frac{8}{\log_4^2 x - \log_4 x^3}.$$

Решение.

$$\frac{\log_4 x}{\log_4 x - 3} - \frac{4}{\log_4 x} - \frac{8}{\log_4 x (\log_4 x - 3)} \geq 0.$$

$$\frac{\log_4^2 x - 4 \log_4 x + 12 - 8}{\log_4 x (\log_4 x - 3)} \geq 0.$$

$$\frac{(\log_4 x - 2)^2}{\log_4 x (\log_4 x - 3)} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1, \quad x = 16, \quad x > 64.$$

Ответ: $0 < x < 1, x = 8, x > 64.$

31. Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 \left(\frac{x}{64}\right)} \geq \frac{10}{\log_2 x} + \frac{35}{\log_2^2 x - \log_2 x^6}.$$

Решение.

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 x - 6} - \frac{10}{\log_2 x} - \frac{35}{\log_2 x (\log_2 x - 6)} \geq 0.$$

$$\frac{\log_2^2 x - 10 \log_2 x + 60 - 35}{\log_2 x (\log_2 x - 6)} \geq 0.$$

$$\frac{(\log_2 x - 5)^2}{\log_2 x (\log_2 x - 6)} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1, \quad x = 32, \quad x > 64.$$

Ответ: $0 < x < 1, x = 32, x > 64.$