Тренировочный вариант №1. Ответы.

Задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответы	**6813**	**24,96**	**7**	**44**	**29700**	**-18,25**	**4**	**27**	**-3,5**	**0,85**

Задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Ответы	**213**	**-43,6**	**2**	**165**	**108**	**56**	**42**	**3,5**	**12**

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

20 Решите уравнение $x^6 = (4x-3)^3$.

Решение.

$$x^6 = (4x-3)^3;$$
$$x^2 = 4x-3;$$
$$(x-3)(x-1)=0,$$

откуда следует, что $x=1$ или $x=3$.
Ответ: 1; 3.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

21 Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 21 км/ч. Через час после него со скоростью 15 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 9 часов после этого догнал первого.

Решение.

Пусть скорость третьего велосипедиста равна v км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{2\cdot 21}{v-21}-\frac{15}{v-15}=9;$$

$$42v-630-15v+315=9v^2-324v+2835;$$

$$v^2-39v+350=0,$$

откуда следует, что $v=14$ или $v=25$. Из этих значений подходит только второе.

Ответ: 25 км/ч.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

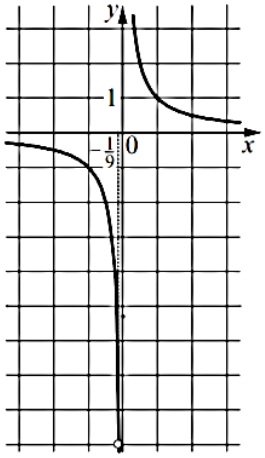
22 Постройте график функции

$$y=\frac{9x+1}{9x^2+x}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Преобразуем выражение: $\frac{9x+1}{9x^2+x}=\frac{1}{x}$ при условии, что $x\neq-\frac{1}{9}$.



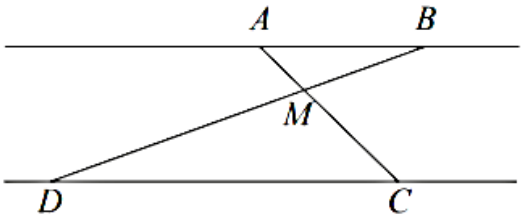
Прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку $\left(-\frac{1}{9};-9\right)$. Получаем, что $k=81$.

Ответ: $k=81$.

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдено искомое значение параметра
1	График построен верно, но искомое значение параметра найдено неверно или не найдено
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

23 Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 12$, $DC = 48$, $AC = 35$.

Решение.



Углы DCM и BAM равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC (см. рисунок), углы DMC и BMA равны как вертикальные, следовательно, треугольники DMC и BMA подобны по двум углам. Значит,

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{12}{48} = 0,25.$$

Следовательно,

$$AC = AM + MC = 0,25MC + MC = 1,25MC,$$

и, таким образом, $MC = \frac{AC}{1,25} = 28$.

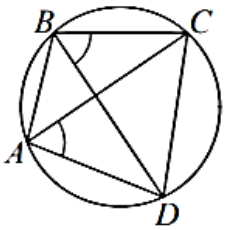
Ответ: 28.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

24 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы DAC и DBC равны. Докажите, что углы CDB и CAB также равны.

Доказательство.

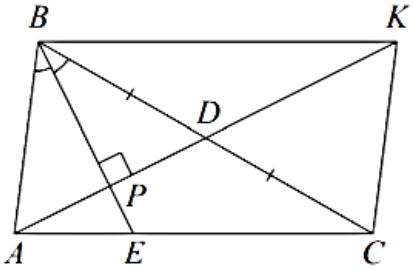
Поскольку четырёхугольник $ABCD$ выпуклый и $\angle DAC = \angle DBC$, около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. Значит, $\angle CDB = \angle CAB$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу BC.



Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

25 В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 24. Найдите стороны треугольника ABC.

Решение.



Пусть P — точка пересечения отрезков BE и AD (см. рисунок).

Треугольник ABD равнобедренный, так как его биссектриса BP является высотой. Поэтому

$$AP = PD = 12;\ BC = 2BD = 2AB.$$

По свойству биссектрисы треугольника ABC имеем

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} = 2,$$

следовательно, $AC = 3AE$.

Проведём через вершину B прямую, параллельную AC. Пусть K — точка пересечения этой прямой с продолжением медианы AD. Тогда

$$BK = AC = 3AE.$$

Из подобия прямоугольных треугольников APE и KPB следует, что

$$\frac{PE}{BP}=\frac{AE}{BK}=\frac{1}{3}.$$

Поэтому $PE=6$ и $BP=18$. Следовательно,

$$AB=\sqrt{AP^2+BP^2}=6\sqrt{13};\ BC=2AB=12\sqrt{13};$$

$$AE=\sqrt{AP^2+EP^2}=6\sqrt{5};\ AC=3AE=18\sqrt{5}.$$

Ответ: $6\sqrt{13}$; $12\sqrt{13}$; $18\sqrt{5}$.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Тренировочный вариант №2. Ответы.

Задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответы	**413**	**28**	**20**	**51**	**558**	**20**	**4**	**81**	**-5**	**0,8**

Задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Ответы	**213**	**20,25**	**1**	**59**	**25**	**67**	**111**	**5**	**3**

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

20 Решите уравнение $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$.

Решение.

Пусть $t=\frac{1}{x}$, тогда уравнение принимает вид

$$t^2-t-6=0,$$

следовательно, $t=-2$ или $t=3$.

Уравнение $\frac{1}{x}=-2$ имеет корень $-\frac{1}{2}$.

Уравнение $\frac{1}{x}=3$ имеет корень $\frac{1}{3}$.

Таким образом, решение исходного уравнения: $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

21 Из двух городов одновременно навстречу друг другу отправились два велосипедиста. Проехав некоторую часть пути, первый велосипедист сделал остановку на 36 минут, а затем продолжил движение до встречи со вторым велосипедистом. Расстояние между городами составляет 82 км, скорость первого велосипедиста равна 28 км/ч, скорость второго — 10 км/ч. Определите расстояние от города, из которого выехал второй велосипедист, до места встречи.

Решение.

За то время, пока первый велосипедист делал остановку, второй велосипедист проехал $10 \cdot \frac{36}{60} = 6$ (км). Всё остальное время они одновременно находились в пути, значит, второй велосипедист за это время проехал $\frac{76}{28+10} \cdot 10 = 20$ (км). Таким образом, суммарно он проехал 26 км.

Ответ: 26 км.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

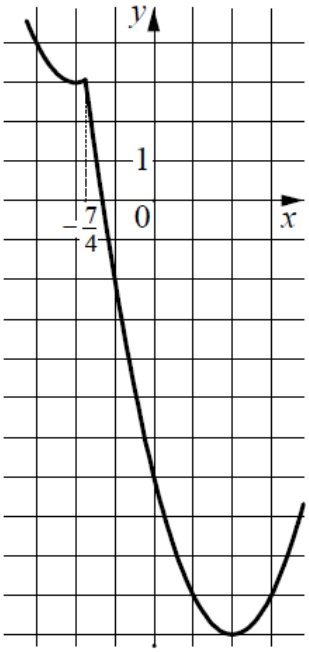
22 Постройте график функции

$$y = x^2 - |4x + 7|.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = x^2 + 4x + 7$ при $x < -\frac{7}{4}$ и график функции $y = x^2 - 4x - 7$ при $x \geq -\frac{7}{4}$.



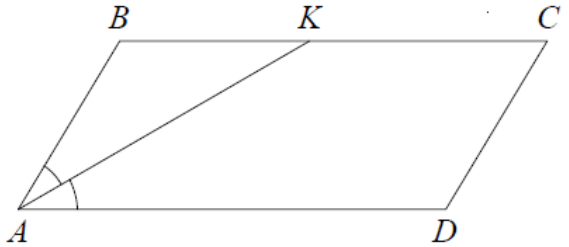
Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки, если она проходит через вершину первой параболы или через точку $\left(-\frac{7}{4}; \frac{49}{16}\right)$. Получаем, что $m = \frac{49}{16}$ или $m = 3$.

Ответ: $m = 3$; $m = \frac{49}{16}$.

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

23 Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 7$, $CK = 12$.

Решение.



Углы BKA и KAD равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK, AK — биссектриса угла BAD, следовательно, $\angle BKA = \angle KAD = \angle BAK$. Значит, треугольник BKA равнобедренный и $AB = BK = 7$.

По формуле периметра параллелограмма находим

$$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 52.$$

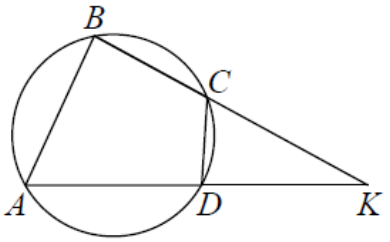
Ответ: 52.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

24 Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K. Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.

Доказательство.

Можно считать, что точка C лежит между точками B и K (см. рисунок).

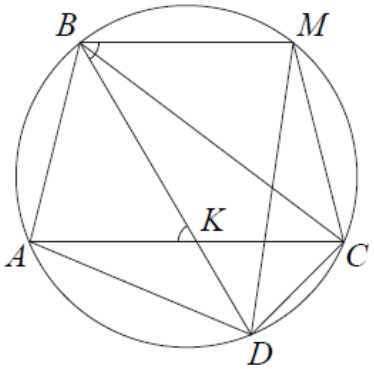


У треугольников KAB и KCD угол K общий. Кроме того, $\angle KCD = 180° - \angle BCD$ как смежный, а $\angle BAD = 180° - \angle BCD$ по свойству вписанного четырёхугольника, поэтому $\angle KCD = \angle BAK$. Значит, треугольники KAB и KCD подобны по двум углам.

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

25 Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 34$ и $CD = 22$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причём $\angle AKB = 60°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

Решение.



Через точку B проведём хорду BM, параллельную диагонали AC (см. рисунок). Тогда

$$CM = AB = 34,\ \angle DBM = \angle AKB = 60°.$$

Поскольку четырёхугольник $BMCD$ вписанный, получаем

$$\angle DCM = 180^\circ - \angle DBM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

По теореме косинусов

$$DM = \sqrt{CM^2 + CD^2 - 2CM \cdot CD \cos \angle DCM} = 2\sqrt{597}.$$

По теореме синусов радиус окружности равен

$$\frac{DM}{2\sin \angle DBM} = \frac{2\sqrt{597}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{199}.$$

Ответ: $2\sqrt{199}$.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Тренировочный вариант №3. Ответы.

Задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответы	4231	16	74	624	12	8,8	4	8	-17	0,75

Задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Ответы	213	6	3	52	49	20	10,5	16	23

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

20 Решите неравенство $(x-7)^2<\sqrt{11}(x-7)$.

Решение.
Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-7)\left(x-7-\sqrt{11}\right)<0,$$

следовательно, $7<x<7+\sqrt{11}$.
Ответ: $(7;7+\sqrt{11})$.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

21 Моторная лодка прошла против течения реки 132 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 5 часов меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Решение.
Пусть скорость моторной лодки в неподвижной воде равна v км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{132}{v-5}-\frac{132}{v+5}=5;$$

$$132v+660-132v+660=5v^2-125;$$

$$v^2=289,$$

а значит, $v=17$.
Ответ: 17 км/ч.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

22 Постройте график функции

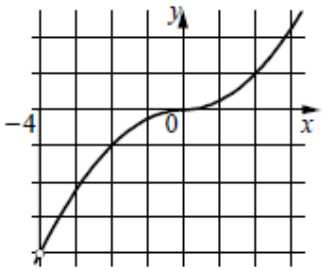
$$y=\frac{\left(0,25x^2+x\right)\cdot|x|}{x+4}.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.
Преобразуем выражение:

$$\frac{\left(0,25x^2+x\right)\cdot|x|}{x+4}=\frac{x|x|}{4}$$

при условии, что $x\neq-4$.

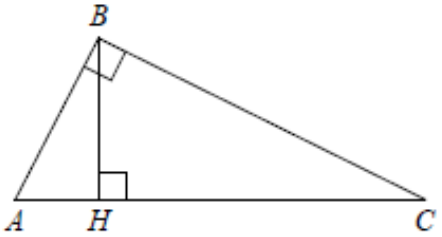


Построим график функции $y=-\frac{x^2}{4}$ при $x<-4$ и $-4<x<0$ и график функции $y=\frac{x^2}{4}$ при $x\geq0$.
Прямая $y=m$ не имеет с графиком ни одной общей точки при $m=-4$.
Ответ: $m=-4$.

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдено искомое значение параметра
1	График построен верно, но искомое значение параметра найдено неверно или не найдено
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

23 Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH = 9$, $AC = 36$.

Решение.



Поскольку BH — высота треугольника ABC, прямоугольные треугольники ABC и AHB подобны.

Следовательно, $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}$, а значит, $AB = \sqrt{AC \cdot AH} = 18$.

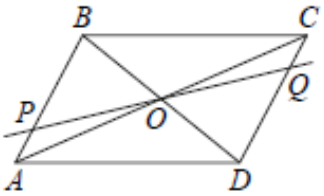
Ответ: 18.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

24 Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что отрезки BP и DQ равны.

Доказательство.

В треугольниках BPO и DQO стороны BO и DO равны по свойству диагоналей параллелограмма, $\angle PBO = \angle QDO$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и секущей BD, а $\angle POB = \angle QOD$ как вертикальные углы.



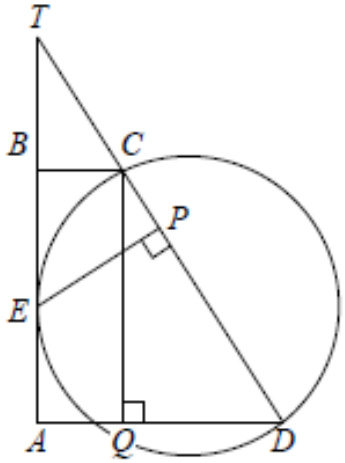
Значит, треугольники BPO и DQO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, отрезки BP и DQ равны.

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

25 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 8$, $BC = 4$.

Решение.

Пусть T — точка пересечения прямых AB и CD, P — проекция точки E на прямую CD, Q — проекция точки C на прямую AD (см. рисунок). Обозначим $CD = x$.



Поскольку $QD = AD - AQ = AD - BC = 4$, из равенства прямоугольных треугольников TBC и CQD находим, что $TC = x$. По теореме о касательной и секущей

$$TE^2 = TD \cdot TC = 2x^2.$$

Из подобия прямоугольных треугольников TPE и TBC имеем

$$EP = \frac{BC \cdot TE}{TC} = \frac{4 \cdot x\sqrt{2}}{x} = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: $4\sqrt{2}$.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*