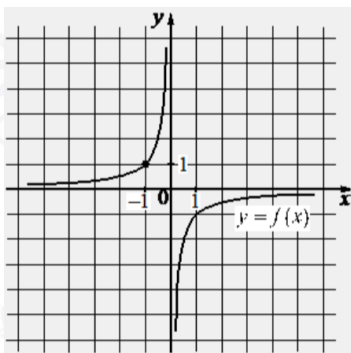


10 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



Ответ: _____.

11 Найдите наименьшее значение функции $y = (2x + 15) \cdot e^{2x+16}$ на отрезке $[-12; -2]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$\log_4(2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - 6\sin^2 x) = x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.

13 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На рёбрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

14 Решите неравенство

$$(3^{4x-x^2-3} - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 5) \geq 0.$$

15 Строительство нового завода стоит 159 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

vk.com/ege100ballov



16 В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.

- а) Докажите, что $AB = CD$.
- б) Найдите AD , если $AB = 2$, $BC = 7$.

17 Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 2a \leq x, \\ 6x > x^2 + a^2, \\ x + a \leq 6 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4; 5]$.

18 В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех, и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

- а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?
- б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?
- в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!

Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_49105931
(также доступны другие варианты для скачивания)



















СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	Более 10 лет подготовки к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике (профиль) 39 учеников набрали 96-100 баллов на ЕГЭ 2022 Высшее образование (ТГУ, 2009-2014) Победитель трёх олимпиад по высшей математике
Аккаунт и группа ВК:	https://vk.com/eugene10 https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб и инстаграм:	https://www.youtube.com/c/pifagor1 https://www.instagram.com/shkola_pifagora/



Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	119	
2	45	
3	0,4	
4	0,16	
5	-96	
6	-8	
7	-4	
8	4	
9	15	
10	-0,1	
11	-1	
12	а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$ б) $\frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}$	
13	55	
14	$(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$	
15	4 года	
16	8	
17	$(-2\sqrt{2}; 2]$	
18	а) да б) 17 в) 41	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



12 а) Решите уравнение

$$\log_4(2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - 6 \sin^2 x) = x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.

Источники:
Основная волна 2017

а) $4^x = 2^{2x} - \sqrt{3} \cdot \cos x - 6 \sin^2 x$
 $6 \cdot (1 - \cos^2 x) + \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$
 $-6 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x + 6 = 0$
 $t = \cos x$
 $-6t^2 + \sqrt{3}t + 6 = 0$
 $D = 3 - 4 \cdot (-6) \cdot 6 = 147 = (7\sqrt{3})^2$
 $t = \frac{-\sqrt{3} \pm 7\sqrt{3}}{-12}$
 $t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $t = \frac{8\sqrt{3}}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
 $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\frac{\sqrt{3}}{3} > 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

б) $x = 3\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$
 $x = 3\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$

ОТВЕТ: а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $\frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$

б) Отберём корни с положительными коэф-тами:

Решения:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

13

В правильной четырёхугольной призме $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

Источники:
Горняк #14 2019
Сергеев 2018
Досрочная волна 2016

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.
 б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

а) $NK = \sqrt{D_1N^2 + KD_1^2} = 5\sqrt{2}$
 б) $\triangle D_1NK = \triangle BML$ по углу
 $ML = 5\sqrt{2}$
 в) $\triangle NKM$:
 $xM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
 $NM = \sqrt{5^2 + (4\sqrt{3})^2} = 5\sqrt{2}$
 Аналогично $KL = 5\sqrt{2}$
 $\Rightarrow MNKL$ – ромб

г) Найдём KM :

ОТВЕТ: 55

Аналогично $NL = 10$
 $\Rightarrow MNKL$ – ромб с равными диаг. т.е. квадрат

б) $S_{\triangle MEN} + S_{MNKL} + S_{\triangle KFL}$

в) $\triangle A_1PN \sim \triangle KD_1N$
 $PA_1 = 1$
 $\triangle PA_1E = \triangle AEM$ по углу
 $\Rightarrow E$ – середина AA_1
 Аналогично F – середина CC_1

г) $h = \sqrt{13 - \frac{25}{2}} = \frac{1\sqrt{2}}{2}$
 $S = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{1\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}$

д) $S_{сеч} = \frac{5}{2} + 50 + \frac{5}{2} = 55$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ	1



обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

14 Решите неравенство $(3^{4x-x^2-3} - 3^0) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 5) \geq 0$.

$(3^{4x-x^2-3} - 3^0) \cdot (\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 5) - \log_{\frac{1}{2}} 1) \geq 0$
 $(3^{4x-x^2-3} - 3^0) \cdot (\frac{1}{2} - 1)(x^2 - 4x + 5) \geq 0 \quad | :(-\frac{1}{2})$
 $(3^{4x-x^2-3} - 3^0) \cdot (x^2 - 4x + 5) \leq 0$
 $(x^2 - 4x + 3) \cdot (x^2 - 4x + 5) \geq 0$
 $(x-1)(x-3) \cdot (x-2)^2 \geq 0$

$x^2 - 4x + 4 + 1 > 0$
 $(x-2)^2 + 1 > 0$
 $x - \text{любое}$

ОТВЕТ: $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$

Источники:

Досрочная волна (Резерв) 2016	
МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ	
было	стало
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$ f - g $	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Строительство нового завода стоит 159 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

Источники:

Досрочная волна (Резерв) 2019

1 год: $p = 10$ 2 год: $p = 11$ 3 год: $p = 12$
 Прибыль = $-0,5x^2 + 8x - 6$ Прибыль = $-0,5x^2 + 9x - 6$ $\Pi = -0,5x^2 + 10x - 6$
 $x_{\text{вып}} = \frac{-8}{2 \cdot (-0,5)} = 8$ $x_{\text{вып}} = \frac{-9}{2 \cdot (-0,5)} = 9$ $x_0 = 10$
 Прибыль при $x=8$ = 26 млн Прибыль при $x=9$ = 34,5 млн $\Pi = 44$ млн
 4 год: $p = 13$
 Прибыль = $-0,5x^2 + 11x - 6$
 $x = 11$
 Прибыль = 54,5 млн
ОТВЕТ: $26 + 34,5 + 44 + 54,5 = 159$
 $\Rightarrow 4$ года.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 220912



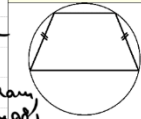
16 В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.

- а) Докажите, что $AB = CD$.
 б) Найдите AD , если $AB = 2$, $BC = 7$.

Источники:

Основная волна 2018
 Основная волна (Резерв) 2018

ПРИЗНАК



Если трапеция вписана в окружность, то она – равнобедренная

а) ① $\angle ABD = 90^\circ$
 $\angle ACD = 90^\circ$
 \Rightarrow Можно описать около $ABCD$ окр-ть с диаметром AD

б) $\triangle ABM \sim \triangle ABD$
 (по 2 углам $\angle B$ и $\angle A$)
 $\frac{2}{2x+7} = \frac{x}{2}$
 $2x^2 + 7x - 4 = 0$
 $D = 81$
 $x = \frac{-7 \pm 9}{4}$
 $x = \frac{1}{2}$
 $AD = \frac{1}{2} + 7 + \frac{1}{2} = 8$

② $ABCD$ – трапеция вписанная в окр-ть т.е. равнобедр. $\Rightarrow AB = CD$

ОТВЕТ: 8

17 Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 2a \leq x, \\ 6x > x^2 + a^2, \\ x + a \leq 6 \end{cases} \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4; 5]$.

Источники:

ЕГЭ (старый банк)
 Досрочная волна 2017

$a \leq \frac{1}{2}x$
 $x^2 - 6x + 9 + a^2 < 0$
 $a \leq \frac{1}{2}x + 6$
 $a \leq -x + 6$
 $4 \leq x \leq 5$

область ниже прямой $AB = \frac{1}{2}x$
 область внутри окружности с центром $(3,0)$ и радиусом $R = 3 - 2a$
 область ниже прямой $a = -x + 6$

Найдем ординату точки A :
 $\frac{1}{2}x = -x + 6$
 $\frac{3}{2}x = 6$
 $x = 4$
 $a = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

Найдем ординату точки B :
 окр-ть $(x-3)^2 + a^2 = 3^2$ пересекает $x=4$
 $(4-3)^2 + a^2 = 9$
 $a^2 = 8$
 $a = \pm 2\sqrt{2}$
 $\Rightarrow a = -2\sqrt{2}$ – ордината точки B

ОТВЕТ: $(-2\sqrt{2}; 2]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 220912



18 В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех, и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

Источники:
Основная волна 2014

- а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?
- б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?
- в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?

Пусть x — это кол-во мальчиков, отправивших по 4 письма
 y — это кол-во мальчиков, отправивших по 21 письму
 Тогда $(x+y)$ — кол-во девочек

Получаем: $4x$ м отпр. по 4 п. каждо.
 $3y$ м отпр. по 21 п. каждо.
 17 девочек получили по 7 писем каждо.
 119 писем

а) $x \cdot 4 + y \cdot 21 = (x+y) \cdot 7$
 кол-во отпр. кол-во получ.
 $4x + 21y = 7x + 7y$
 $4x = 3x + 7y - 7y$
 $x = 7y - 3x$
 $x = \frac{14y}{3}$
 Если $x = 14$, то $y = 3$
 мы получили верное рав. во

б) $x \cdot 4 + y \cdot 21 = (x+y) \cdot k$, где k — это кол-во полученных писем каждою девочкой
 $4x + 21y = kx + ky$
 $4x - kx = ky - 21y$
 $(4-k) \cdot x = (k-21)y$

ОТВЕТ:	а)
	б)
	в)

Если $k = 4$, то $0 \cdot x = -17y$ \emptyset
 $k = 21$, то $-17x = 0 \cdot y$ \emptyset
 $k = 3$, то $x = -18 \cdot y$ \emptyset
 $k < 3$, то x или y будет отриц.
 $k > 21$, то там же
 $k = 5$, то $-x = -16y$
 $x = 16y$
 $x = 16$
 $y = 1$
 $(y \geq 2$ по усл.)
 $2x = 15y$
 $x = 15$
 $y = 2$
 $(x+y)$ макс = 17
 $k = 7$, то $3x = 14y$
 $x = 14$
 $y = 3$
 $(x+y)$ макс = 17

Для любого $k \in [6, 19]$
 $(x+y)$ макс = 17
 Ответ: б) 17 (пример кокаси в а))

18 В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех, и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

- а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?
- б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?
- в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?

в) Пусть n — кол-во девушек

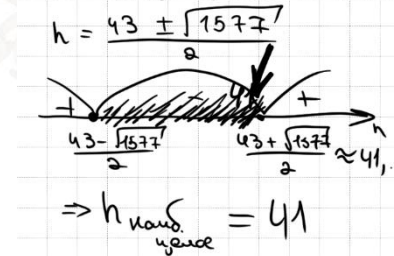
Количество полученных писем = $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n-1 = \frac{0+n-1}{2} \cdot n$
 (минимально возможное)

Кол-во отправленных писем = $2 \cdot 4 + (n-2) \cdot 21$
 (максимально возможное)

$\frac{n-1}{2} \cdot n \leq \text{кол-во писем} \leq 21n - 34$

$\frac{(n-1)}{2} \cdot n \leq 21n - 34 \quad | \cdot 2$

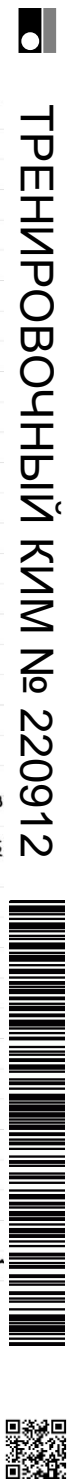
$n^2 - n \leq 42n - 68$
 $n^2 - 43n + 68 \leq 0$
 $D = 1849 - 4 \cdot 68 = 1849 - 272 = 1577$



$39 < \sqrt{1577} < 40$
 $82 < 43 + \sqrt{1577} < 83$
 $41 < \frac{43 + \sqrt{1577}}{2} < 41,5$

Покажем, что $n = 41$ можно быть.
 2 макс отпр по 4 } 827 писем
 39 макс по 21 п

Первые 40 девочек получили $0, 1, 2, \dots, 39$, т.е. $\frac{0+39}{2} \cdot 40 = 780$
 41-ая девочка получила 47 писем
 Ответ: в) 41



Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта a ; – обоснованное решение пункта b ; – искомая оценка в пункте b ; – пример в пункте b , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 12–18, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 12–18 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.

