НОВАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЕГЭ - 2023

НЕОБХОДИМЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ВЕРОЯТНОСТЯМ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ :

Опр.1. **Вероятностью** случайного события A называется отношение числа элементарных событий, которые благоприятствуют этому событию, к общему числу всех элементарных событий.

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных исходов, n - общее число исходов.

Если событие наступить не может, оно называется **невозможным.** Вероятность невозможного события равна 0. Если событие непременно наступает, оно называется **достоверным**. Вероятность достоверного события равна 1. Таким образом , вероятность события — это величина , которая может принимать значения из отрезка [0; 1] ($P(A) \in [0; 1]$).

Опр.2. **Произведением событий** A и B называется событие C = AB, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает и событие A, и событие B.

Опр.3. **Суммой событий** A и B называется событие C = A + B, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из них, т. е. в наступлении события A, или события B, или обоих этих событий вместе.

Опр.4. Два события называются **независимыми**, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет. В противном случае события называются **зависимыми**.

Опр.5. Два события называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании. В противном случае события называются **несовместными**.

Опр.6. Два события называются **противоположными**, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. Вероятности противоположных событий в сумме дают 1.

Теорема 1. Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению этих вероятностей: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Теорема 2. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Теорема 3. Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Опр.7. Пусть A и B — зависимые события. **Условной вероятностью** $P_A(B)=P(B|A)$ (два обозначения) называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Формулы для условной вероятности:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Теорема 4. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденного в предположении, что первое событие уже наступило: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Опр.8. Размещением из n элементов множества $X = \{ x_1 , x_2 , \dots , x_n \}$ по k элементам назовем любой упорядоченный набор $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ элементов множества X.

Если выбор элементов множества Y из X происходит с возвращением, т.е. каждый элемент множества X может быть выбран несколько раз, то число размещений из n по k находится по формуле n^k(размещения с повторениями).

Если же выбор делается без возвращения, т.е. каждый элемент множества X можно выбирать только один раз, то количество размещений из n по k обозначается A_n^k и определяется равенством

$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (**размещения без повторений**).

Пример 1. Пусть даны шесть цифр: 1; 2; 3; 4; 5; 6. Определить, сколько трехзначных чисел можно составить из этих цифр.

Решение : Если цифры могут повторяться, то количество трехзначных чисел будет

$$m = n^k = 6^3 = 216$$

Если цифры не повторяются, то

$$m = A_6^3 0 = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$$

Ответ : 216 в случае, когда цифры могут повторяться; 120 в случае, когда повторение цифр не допускается

Опр.9. Частный случай размещения при n = k называется **перестановкой** из n элементов. Число всех перестановок из n элементов равно $A_n^n = P_n = n!$

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m+n$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A,B) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Пример 2. 30 книг стоит на книжной полке, из них 27 различных книг и три книги одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

Решение : Будем считать три книги одного автора за одну книгу, тогда число перестановок будет P_{28}

Три книги можно переставлять между собой P_3 способами, тогда по правилу произведения получим, что искомое число способов равно:

$$N = P_{28} \cdot P_3 = 28!3!$$

Ответ : 28!3!

Опр.10. Пусть теперь из множества X выбирается неупорядоченное подмножество Y (порядок элементов в подмножестве не имеет значения). **Сочетаниями** из n элементов по k называются подмножества из k элементов, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом. Общее число всех сочетаний из n по k обозначается C_n^k и равно:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k!)k!}$$

Пример 3. В группе из 27 школьников нужно выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно это сделать?

Решение : Так как порядок школьников не важен, используем формулу для числа сочетаний:

$$C_{27}^{3} = \frac{27!}{(27-3)!3!} = 2925$$

Ответ : 2925

1. КАКИЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БЫЛИ В ЕГЭ РАНЬШЕ?

До 2022 года на ЕГЭ была представлена одна несложная задача под № 4, которая проверяла базовые знания по теории вероятностей, такие как определения вероятности события, независимых событий, формулы произведения вероятностей независимых событий и суммы несовместных событий.

Примеры задач из реальных ЕГЭ прошлых лет:

Задание 4 . В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Решение :

Вспомним классическое определение теории вероятностей :

Вероятностью события A называется дробь

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

в числителе которой стоит число m элементарных событий, благоприятствующих событию A, а в знаменателе n – число всех элементарных событий.

В рассматриваемой задаче турист Д. – один из 8 человек, которые участвуют в жребии, значит, общее число исходов n = 8. С помощью жребия выбирается 6 человек, значит, число благоприятных исходов для туриста Д. равно m = 6. Получаем искомую вероятность:

$$P(A) = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

Ответ : 0,75

Задание 4. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,4. На столе лежат 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Решение :

Ковбой Джон может наудачу схватить как пристрелляный, так и не пристрелянный револьвер. Так как на столе 10 револьверов и из них только 4 пристрелянные, то по классическому определнию вероятности вероятность выбора пристрелянного револьвера равна

$$\frac{4}{10} = 0,4 \ ,$$

а непристрелянного

$$1 - 0,4 = 0,6 \ .$$

Известно, что если он выстреливает из пристрелянного револьвера, то попадает в цель с вероятностью 0,9, значит, вероятность такого события будет равна

$$0,4 \cdot 0,9 = 0,36 \ ,$$

а вероятность выбора непристрелянного револьвера и попадания из него в цель, равна

$$0,6 \cdot 0,4 = 0,24 \ .$$

Если произойдет или первое , или второе событие, то Ковбой Джон попадет в цель и вероятность этого события равна

$$0,36 + 0,24 = 0,6 ,$$

тогда вероятность промаха:

$$1 - 0,6 = 0,4$$

Ответ: 0,4.

2.ЧТО ИЗМЕНИЛОСЬ В ЕГЭ - 2022?

В ЕГЭ – 2022 добавится еще одна задача по теории вероятностей и статистике. Теперь эти задачи идут под № 2 и № 10. Задача № 2 по сложности осталась такой же нетрудной, какой и была раньше в экзамене, а в задании № 10 уже представлены более трудные вероятностные задачи, проверяющее умение моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики.

Задача 1. В ящике девять красных и семь синих фломастеров. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

Решение :

Чтобы синий фломастер появился только лишь на 3 раз, в первые 2 раза обязательно нужно вытащить красные фломастеры. Определим вероятность того, что в первый раз мы вытаскиваем красный фломастер. Изначально в коробке было 9+7=16 фломастеров, 9 из которых – красные, следовательно, вероятность вытащить на первом шаге красный фломастер равна:

$$P(K_1) = \frac{9}{16}$$

Определим вероятность того, что во второй раз мы снова вытащим красный фломастер. После того , как мы вытащили в первый раз красный фломастер, в коробке осталось уже 15 фломастеров, 8 из которых – красные, следовательно, вероятность вытащить на втором шаге красный фломастер равна:

$$P(K_2) = \frac{8}{15}$$

И, наконец, найдем вероятность того, что в третий раз мы вытащим уже синий фломастер. После того , как мы вытащили 2 красных фломастеров, в коробке осталось 14 фломастеров, 7 из которых – синие, следовательно, вероятность вытащить на третьем шаге синий фломастер равна:

$$P(C) = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

Все эти три события (вытаскивания фломастеров) являются независимыми, поэтому вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету, будет равна произведению этих трех вероятностей:

$$P(K_1 K_2 C) = P(K_1) \cdot P(K_2) \cdot P(C) = \frac{9}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{20} = 0{,}15$$

Ответ : 0,15

Задача 2. Симметричную монету бросают 12 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 4 орла» меньше вероятности события «выпадет ровно 5 орлов»?

Решение :

Обозначим вероятность события «выпадет ровно 4 орла» за P_4, а вероятности события «выпадет ровно 5 орлов» за P_5. Тогда по определению классической вероятности получим:

$$P_4 = \frac{n_4}{m},$$

$$P_5 = \frac{n_5}{m},$$

где m – общее число исходов, n_4 – число исходов, когда выпадает ровно 4 орла, n_5 – число исходов, когда выпадает ровно 5 орлов.

Тогда искомое отношение этих вероятностей будет равно:

$$\frac{P_5}{P_4} = \frac{n_5}{m} : \frac{n_4}{m} = \frac{n_5}{m} \cdot \frac{m}{n_4} = \frac{n_5}{n_4}$$

Определим количество комбинаций, в которых встречается ровно 5 орлов. На самом деле, мы выбираем 5 монет из 12, которые упадут орлом, а это – число сочетаний из 12 по 5:

$$n_5 = C_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)!\,5!} = \frac{12!}{7!\,5!}$$

Абсолютно аналогично найдем количество комбинаций, в которых встречается ровно 4 орла – это уже будет число сочетаний из 12 по 4:

$$n_4 = C_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!\,4!} = \frac{12!}{8!\,4!}$$

Тогда искомое отношение будет равно:

$$\frac{P_5}{P_4} = \frac{n_5}{n_4} = \frac{12!}{7!\,5!} \cdot \frac{8!\,4!}{12!} = \frac{7!\,8 \cdot 4!}{7!\,4!\,5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

Ответ : 1,6

Задача 3. Какова вероятность, выйдя завтра на улицу, встретить по дороге в школу динозавра?

Решение : Имеем 2 варианта развития событий: встретить динозавра или не встретить динозавра, значит, m = 2. Из этих двух вариантов нам подходит лишь один – мы хотим встретить динозавра, следовательно, n = 1. Тогда, по определению вероятности, получим:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Но действительно ли это так?) Давайте вспомним, что динозавры вымерли около 65 млн лет назад, тогда получается, что встреча с динозавром невозможна, а значит, и вероятность встретить это чудесное создание по дороге в школу равна 0.

Ответ : 0