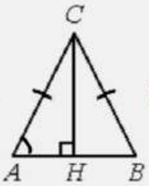
1

В треугольнике ABC $AC = BC$, высота CH равна 19,2, $\cos A = \frac{7}{25}$. Найдите AC.



244628

Источники:

FIPI (старый банк)
Основная волна 2013

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

① $\sin^2 A + \frac{49}{625} = 1$

$\sin^2 A = \frac{1}{1}^{(625} - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$

$\sin A = \frac{24}{25}$

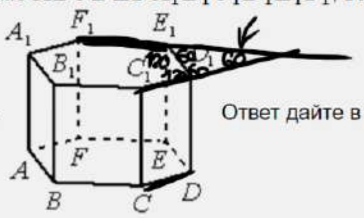
② $\sin A = \frac{24}{25} = \frac{19{,}2}{AC}$

$AC = \frac{25 \cdot \cancel{19{,}2}^{0{,}8}}{\cancel{24}} = 20$

ОТВЕТ: 20

2

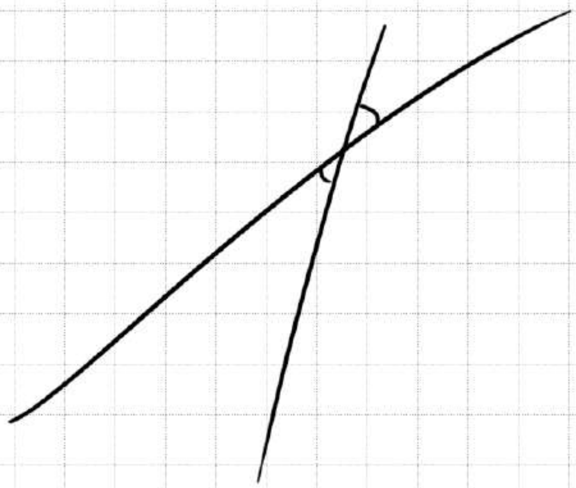
В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 3, найдите угол между прямыми CD и E_1F_1. Ответ дайте в градусах.



257041

Источники:

FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2013



ОТВЕТ: 60

3

В чемпионате по гимнастике участвуют 36 спортсменок: 11 из России, 16 из США, остальные из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

18157A

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2022
Досрочная волна 2022
Основная волна 2019
Основная волна 2018

$$P=\cancel{\frac{9}{36}}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

ОТВЕТ: 0,25

4

Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 8».

97B50F

Источники:

FIPI (старый банк)

11	21	31	41	51	~~61~~
12	22	32	42	52	~~62~~
13	23	33	43	53	~~63~~
14	24	34	44	54	~~64~~
15	25	35	45	55	~~65~~
~~16~~	~~26~~	~~36~~	~~46~~	~~56~~	~~66~~

$$P=\frac{3^{\cdot 4}}{25_{\cdot 4}}=\frac{12}{100}=0{,}12$$

ОТВЕТ: 0,12

5 Найдите корень уравнения $6^{1+3x} = 36^{2x}$.

93C4F3

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2021
Демо 2020
Основная волна 2021
Основная волна 2020
Основная волна 2019
Демо 2019
Демо 2018
Демо 2017
Основная волна 2017
Основная волна 2016
Демо 2016
Демо 2015
Основная волна 2013

$$6^{1+3x} = (6^2)^{2x}$$

$$6^{1+3x} = 6^{4x}$$

$$1+3x = 4x$$
$$1 = x$$

Ответ: 1

6 Найдите значение выражения
$\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sin^2\frac{15\pi}{8}$.

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2019
Основная волна 2017
Пробный ЕГЭ 2016
Основная волна 2014

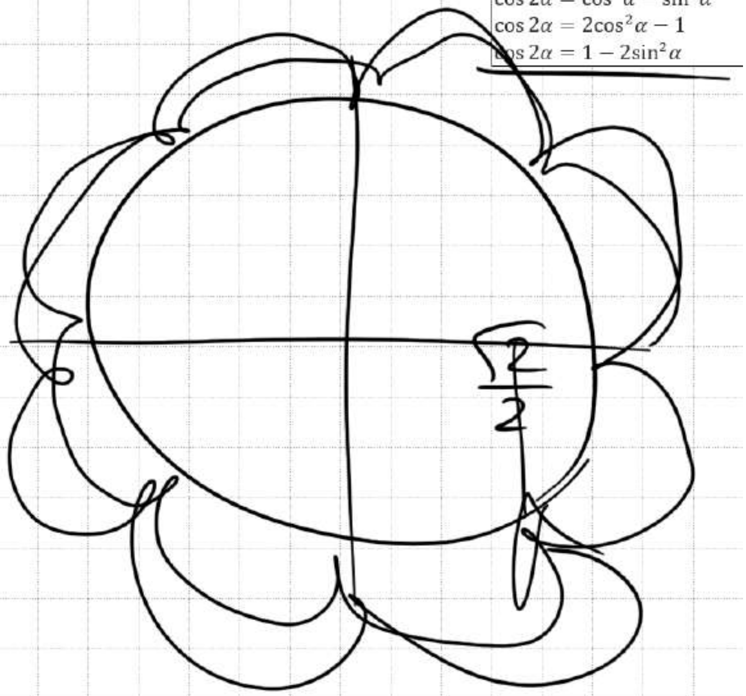
ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\sqrt{2}\cdot\left(1 - 2\sin^2\frac{15\pi}{8}\right)$$

$$\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\cancel{30}^{15}\pi}{\cancel{8}_{4}}$$

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$



Ответ: 1

7

Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 27$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 2$ с.

8EAF19

Источники:

FIPI (старый банк)

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

$S'(t) = V(t)$

$V'(t) = a(t)$

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}t^{2} + 4 = 6$$

Ответ: 6

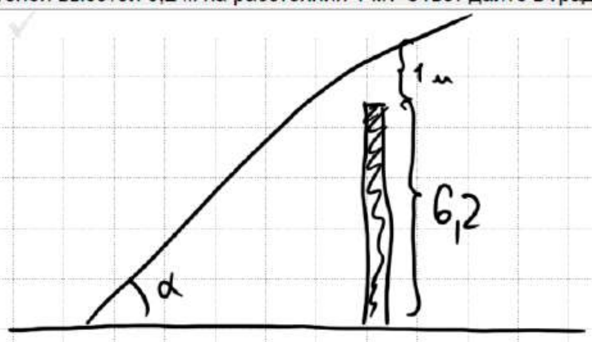
8

Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика H (в м) вычисляется по формуле $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos\alpha)$, где $v_0 = 24$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла α мячик пролетит над стеной высотой 6,2 м на расстоянии 1 м? Ответ дайте в градусах.

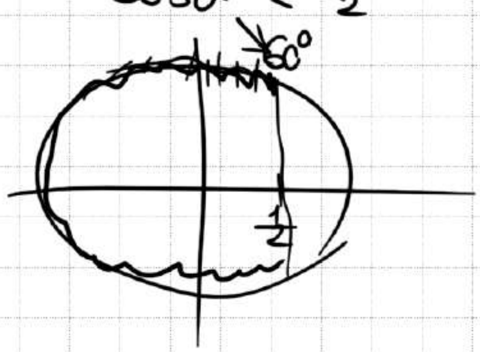
63EA02

Источники:

FIPI (старый банк)



$\cos\alpha \le \frac{1}{2}$



$H \geq 7{,}2$

$\frac{\vartheta_0^2}{4g}(1 - \cos\alpha) \geq 7{,}2$

$\frac{24^2}{40} \cdot (1 - \cos\alpha) \geq 7{,}2$

$1 - \cos\alpha \geq \frac{\cancel{72} \cdot \cancel{40}}{\cancel{10 \cdot 24 \cdot 24}} \; \frac{1}{2}$

Ответ: 60

9

Заказ на 176 деталей первый рабочий выполняет на 5 часов быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий, если известно, что он за час делает на 5 деталей больше, чем второй?

1C7F25

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018

	Пр-ть	Время	Кол-во дет.
I	x	$\frac{176}{x}$	176
II	$x-5$	$\frac{176}{x-5}$	176

$t_{\text{медл}} - t_{\text{быстр}} = 5$

$\frac{176^{(x}}{x-5} - \frac{176^{(x-5}}{x} = 5$

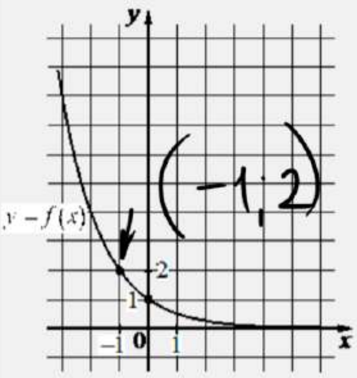
$\frac{\cancel{176x}-\cancel{176x}+176\cdot\cancel{5}}{x^2-5x} = \cancel{5}\ 1$

$x^2-5x = 176$
$x^2-5x-176=0$
$x=16$ $\qquad x=-11$

Ответ: 16

10

На рисунке изображён график функции вида $f(x)=a^x$. Найдите значение $f(-4)$.



7C4A3A

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна 2022

① $2 = a^{-1}$
$2 = \frac{1}{a}$
$a = \frac{1}{2}$

② $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

③ $f(-4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$

Ответ: 16

11

Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2+36}{x}$.

9AFABD

① $y = \frac{x^2+36}{-x}$

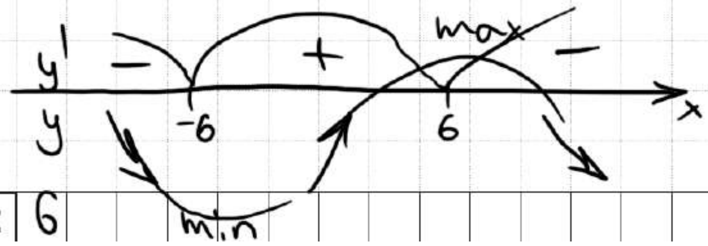
② $y' = \frac{2x\cdot(-x) - (x^2+36)\cdot(-1)}{(-x)^2} = 0$

$\frac{-2x^2 + x^2 + 36}{x^2} = 0$

$\frac{36 - x^2}{x^2} = 0$

$x = 6 \qquad x = -6$

③



Ответ: 6

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2013

ПРОИЗВОДНЫЕ

$C' = 0$

$x' = 1$

$(Cx)' = C$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(U \cdot V)' = U'V + UV'$

v $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

12 а) Решите уравнение

$$7\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+4\sqrt{3}\sin x\cos x=4\cos^3 x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Источники: Основная волна (Резерв) 2021

а) $7\cdot\cos x+4\sqrt{3}\cdot\sin x\cos x-4\cos^3 x=0$

$\cos x\cdot(7+4\sqrt{3}\sin x-4\cos^2 x)=0$

$\cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n; n\in Z$

$7+4\sqrt{3}\sin x-4\cdot(1-\sin^2 x)=0$

$4\sin^2 x+4\sqrt{3}\sin x+3=0$

Пусть $\sin x=t$

$4t^2+4\sqrt{3}t+3=0$

$D=48-48=0$

$t=\frac{-4\sqrt{3}}{8}$

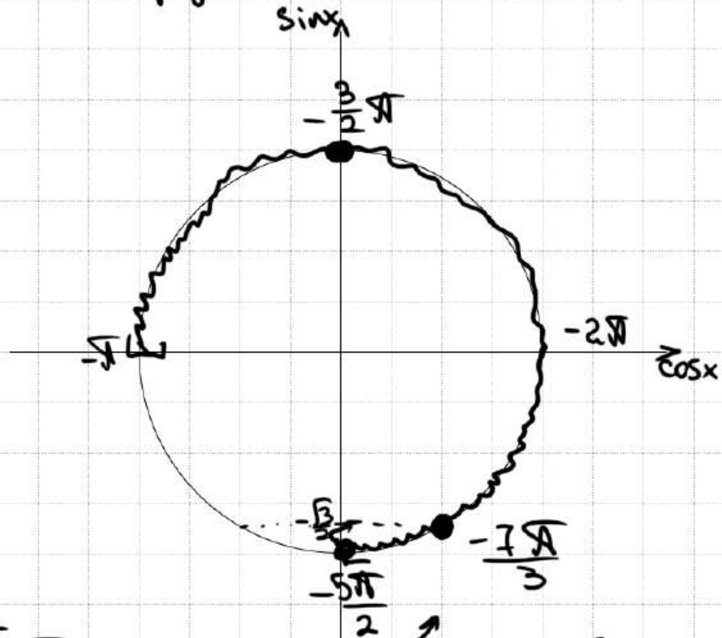
$t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$

$x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; n\in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности:



Получим числа: $x=-2\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{7\pi}{3}$

$x=-\frac{3\pi}{2}$

$x=-\frac{5\pi}{2}$

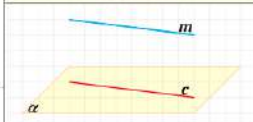
Ответ:	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; n\in Z$
	б) $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K делит сторону SC в отношении 1:2, считая от вершины S, точка N делит сторону SB в отношении 1:2, считая от вершины S. Через точки N и K параллельно SA проведена плоскость α.

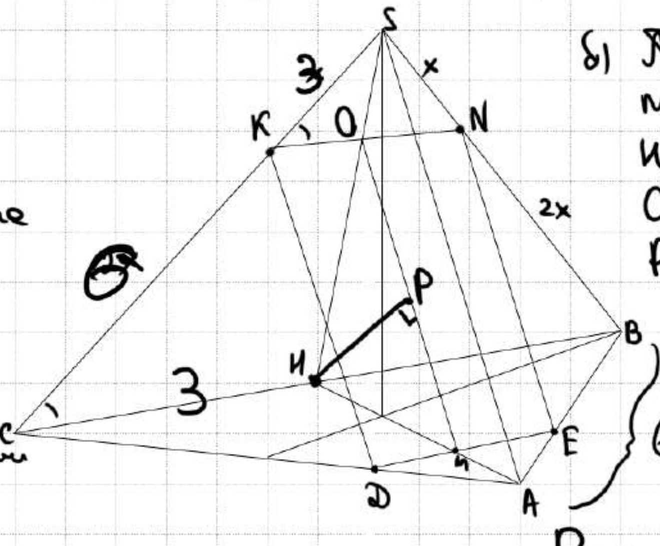
а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α параллельно прямой BC.
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если известно, что $SA = 9$, $AB = 6$.

Источники:

Основная волна 2019



а) ① $DK \parallel SA$
$NE \parallel SA$
Соед. DE и KN
$\Rightarrow DKNE$ – сечение

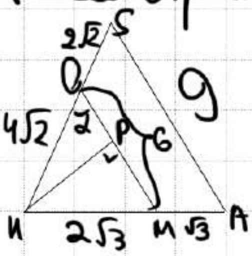


② $\triangle SKN \sim \triangle SBC$
по 2 пропорц. и углу между ними
$\Rightarrow KN \parallel BC$
$\alpha \parallel BC$ ∎

б) Пусть
M – середина DE
H – середина BC
O – середина KN
PH – перпендикуляр к OM в $\triangle OMH$:

$PH \perp OM$
$PH \perp DE$ (по ТТП)
$\Rightarrow PH$ – искомое расст.

Рассмотрим $\triangle SAH$:



$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{23}$

по т. cos в $\triangle HOM$:

$$\cos\alpha = \frac{(4\sqrt{2})^2 + 6^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6} = \frac{7 \cdot \cancel{8}}{\cancel{2 \cdot 4}\sqrt{2} \cdot 6}$$

$$\cos\alpha = \frac{7}{6\sqrt{2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{23}}{6\sqrt{2}} = \frac{HP}{4\sqrt{2}}$$

$$HP = \frac{4\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{23}}{6\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{2}{3}\sqrt{23}$$

14

Решите неравенство $125^x - 25^x + \dfrac{4\cdot 25^x - 20}{5^x - 5} \le 4.$

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016

Пусть $5^x = t$

$$t^3 - t^2 + \frac{4t^2-20}{t-5} - \frac{4}{1} \le 0$$

$$\frac{t^4 - 5t^3 - t^3 + 5t^2 + 4t^2 - \cancel{20} - 4t + \cancel{20}}{t-5} \le 0$$

$$\frac{t^4 - 6t^3 + 9t^2 - 4t}{t-5} \le 0$$

$$\frac{t\cdot(t^3 - 6t^2 + 9t - 4)}{t-5} \le 0$$

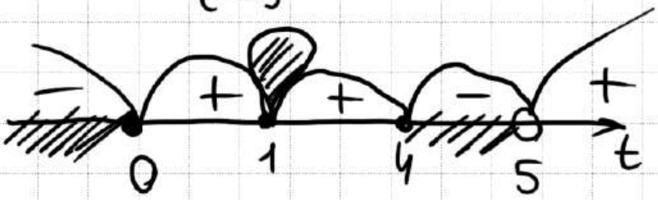
Заметим, что при $t=1$ t^3-6t^2+9t-4 обращается в 0

$$\begin{array}{r|l} t^3-6t^2+9t-4 & t-1 \\ \hline t^3-t^2 & t^2-5t+4 \\ -5t^2+9t & \\ -5t^2+5t & \\ 4t-4 & \\ 4t-4 & \\ 0 & \end{array}$$

Получаем:

$$\frac{t\cdot(t-1)(t^2-5t+4)}{t-5} \le 0$$

$$\frac{t\cdot(t-1)\cdot(t-1)(t-4)}{t-5} \le 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t \le 0 \\ t = 1 \\ 4 \le t < 5 \end{array}\right.$$

$5^x \le 0$ $\varnothing$

$5^x = 1$, $x = 0$

$5^{\log_5 4} \le 5^x < 5^1$, $\log_5 4 \le x < 1$

Ответ: $\{0\} \cup [\log_5 4; 1)$

15 31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на a%), затем Пётр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

Источники:
Ященко 2018 (20 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018 (36 вар)
Основная волна 2017

Пусть S – сумма кредита

$X_1 = 2\ 592\ 000$

$X_2 = 4\ 392\ 000$

$\left(1+\frac{a}{100}\right) = b$

1 января – день платежа

Кредит на 2 года

Дата	Сумма долга
31 дек 14	S
31 дек 15	$S\cdot b$
1 янв 16	$S\cdot b - x_2$
31 дек 16	$S\cdot b^2 - b\cdot x_2$
1 янв 17	$S\cdot b^2 - b\cdot x_2 - x_2 = 0$

Ответ: 20

Кредит на 4 года

Дата	Сумма долга
31 дек 14	S
31 дек 15	$S\cdot b$
1 янв 16	$S\cdot b - x_1$
31 дек 16	$S\cdot b^2 - b\cdot x_1$
1 янв 17	$Sb^2 - b\cdot x_1 - x_1$
31 дек 17	$Sb^3 - b^2\cdot x_1 - bx_1$
1 янв 18	$Sb^3 - b^2\cdot x_1 - bx_1 - x_1$
31 дек 18	$Sb^4 - b^3\cdot x_1 - b^2\cdot x_1 - b\cdot x_1$
1 янв 19	$Sb^4 - b^3\cdot x_1 - b^2\cdot x_1 - b\cdot x_1 - x_1 = 0$

Получаем:

$$\begin{cases} Sb^2 - bx_2 - x_2 = 0 & (1)\\ Sb^4 - b^3\cdot x_1 - b^2 x_1 - bx_1 - x_1 = 0 & (2)\end{cases}$$

Выразим Sb^2:

$$Sb^2 = b\cdot x_2 + x_2$$

Подставим:

$$(b\cdot x_2 + x_2)\cdot b^2 - b^3\cdot x_1 - b^2\cdot x_1 - bx_1 - x_1 = 0$$

$$b^3\cdot x_2 + b^2\cdot x_2 - b^3\cdot x_1 - b^2\cdot x_1 - bx_1 - x_1 = 0$$

$$b^2 x_2\cdot(b+1) - b^2\cdot x_1\cdot(b+1) - x_1\cdot(b+1) = 0$$

$$(b+1)\left(b^2 x_2 - b^2\cdot x_1 - x_1\right) = 0$$

$b = -1$

$1 + \frac{a}{100} = -1$

$\frac{a}{100} = -2$

$a = -200$

$\varnothing$

$b^2\cdot(x_2 - x_1) = x_1$

$b^2 = \frac{x_1}{x_2 - x_1}$

$b^2 = \frac{2\ 592\ \cancel{000}}{1800\ \cancel{000}}$

$b^2 = \frac{1296}{900}$

$b = \frac{36}{30} = 1{,}2$

$1 + \frac{a}{100} = 1{,}2$

$\frac{a}{100} = 0{,}2$

$a = 20\%$

16

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

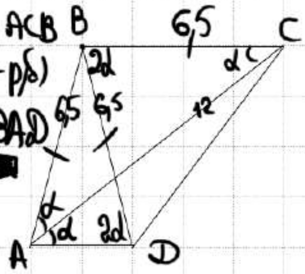
а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.

б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC = 12$ и $BD = 6{,}5$.

Источники:
FIPI (старый банк)
СтатГрад 26.01.2017

5CBC00

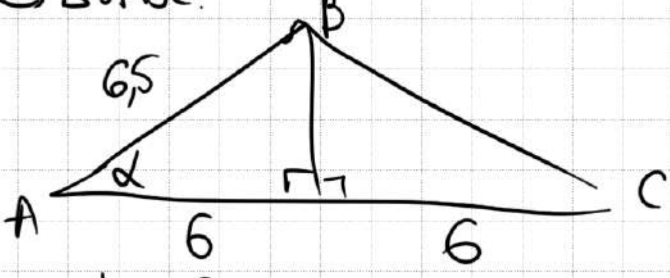
а) Пусть $\angle CAD = \alpha$
Тогда $\angle ACB = \alpha$ (накрест. леж.)
$\angle BAC = \alpha = \angle ACB$
(т.к. $\triangle ABC$ - р/б)
$\Rightarrow AC$ - бисс $\angle BAD$



Ответ: 5

б) ① $\angle ADB = 2\alpha$
$\angle DBC = 2\alpha$ (накрест леж.)

② $\triangle ABC$:

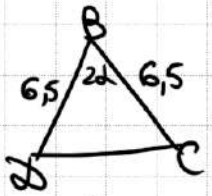


$\cos\alpha = \frac{6}{6{,}5} = \frac{12}{13}$

$\sin\alpha = \frac{5}{13}$

$\cos 2\alpha = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$

③ $\triangle BCD$:



$CD^2 = 6{,}5^2 + 6{,}5^2 - 2 \cdot 6{,}5 \cdot 6{,}5 \cdot \frac{119}{169}$

$= \left(\frac{13}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2 - \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{13}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{13}}{2} \cdot \frac{119}{\cancel{169}}$

$= \frac{169}{2} - \frac{119}{2} = \frac{50}{2} = 25$

$CD = 5$

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(2x-x^2)^2-4\sqrt{2x-x^2}=a^2-4a$$

имеет хотя бы один корень.

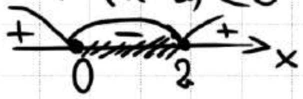
Источники:
Основная волна (Резерв) 2018
Пробный ЕГЭ 2019
Пробный ЕГЭ 2015

Пусть $\sqrt{2x-x^2}=t$ $\quad t\geqslant 0$

ОДЗ: $2x-x^2\geqslant 0$

$x^2-2x\leqslant 0$

$x\cdot(x-2)\leqslant 0$



Наибольшее значение $\sqrt{2x-x^2}$ достигается в вершине параболы $y=2x-x^2$, т.е. при $x_0=\frac{-2}{-2}=1$

$t_{наиб.}=1$

$\Rightarrow \quad 0\leqslant t\leqslant 1$

Получаем $t^4-4t=a^2-4a$

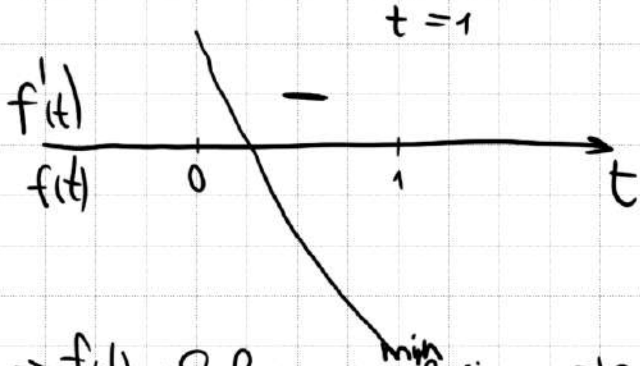
Пусть $f(t)=t^4-4t \qquad 0\leqslant t\leqslant 1$

Исследуем её на монотонность

$f'(t)=4t^3-4$

$4t^3-4=0$

$t=1$



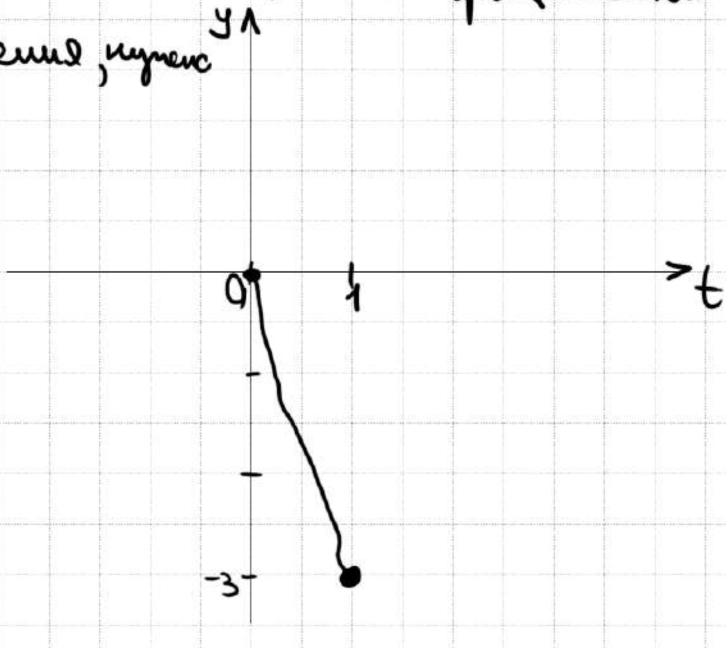
$\Rightarrow f(t)$ убывает на всём отрезке $[0;1]$

$f(0)=0^4-4\cdot 0=0$

$f(1)=1^4-4\cdot 1=-3$

Ответ: $[0;1]\cup[3;4]$

Решим графически $t^4-4t=a^2-4a$

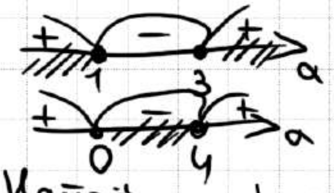


Чтобы были решения, нужно

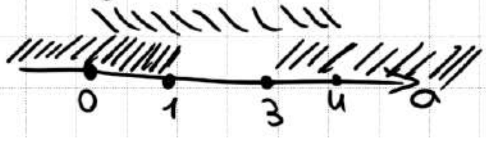
$-3\leqslant a^2-4a\leqslant 0$

$$\begin{cases}-3\leqslant a^2-4a\\ a^2-4a\leqslant 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2-4a+3\geqslant 0\\ a^2-4a\leqslant 0\end{cases}$$



Найдём пересечение



18

На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

EC9829

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2017

а) 6 7 8 9 10

или

6 7 8 9 11

Ответ: а) да

б) Пусть

$a < b < c < d < e < f$

$b \geq 7$, $e \leq 9$

[redacted] получаем, что

$b \geq 7$
$e \leq 9$, т.к. иначе не выполн. усл. задачи

ОТВЕТ:	а)
	б)
	в)

НО тогда $c \geq 8$ (т.к. $b \geq 7$)
$d \leq 8$ (т.к. $e \leq 9$)

т.е. c и d не могут быть различными, что противоречит усл.

Ответ: б) нет

в) ① Пусть $a < b < c < d$

$b \geq 7$, $c \leq 9$

② Рассмотрим какие случаи могут быть

a 7 8 d
a 7 9 d
a 8 9 d

③ Случай #1: $a < 7 < 8 < d$

$a = 6$

$d = 9$
$d = 10$
$d = 11$
$d = 12$

$S \leq 6 + 7 + 8 + 12$
$S \leq 33$

Случай #2: $a < 7 < 9 < d$

$a = 6$

$d = 10$
$d = 11$

$S \leq 6 + 7 + 9 + 11$
$S \leq 33$

Случай #3: $a < 8 < 9 < d$

$a = 6$
$a = 7$

$d = 10$
$d = 11$

$S \leq 7 + 8 + 9 + 11$
$S \leq 35$

④ Покажем, что $S = 35$ может быть 7 8 9 11.

Ответ: в) 35