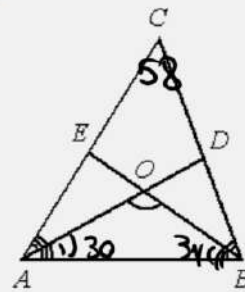


1

В треугольнике ABC угол C равен 58° , биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



540F92

$$\textcircled{1} \angle A + \angle B = 180 - 58 = 122$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \cdot 122 = 61$$

$$\textcircled{3} \angle AOB = 180 - 61 = 119$$

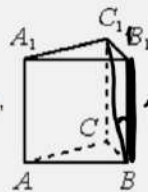
ОТВЕТ: 1 1 9

Источники:

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)

2

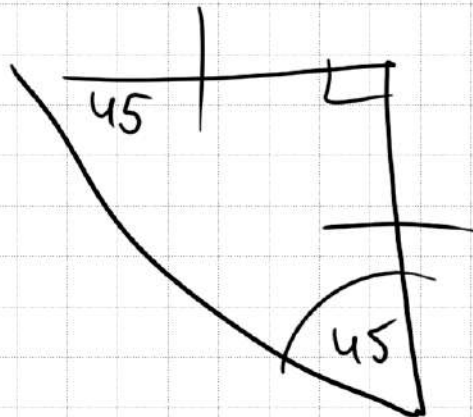
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$,



все рёбра которой равны 1, найдите угол

между прямыми AA_1 и BC_1 .

C0F645



ОТВЕТ: 4 5

Источники:

ГПР (старый банк)

3

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 20 спортсменов, среди них 7 прыгунов из Голландии и 8 прыгунов из Бразилии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что первым будет выступать прыгун из Бразилии.



eD6F93

$$P = \frac{8}{20} = \frac{4}{10} = 0,4$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2022
 Досрочная волна 2022
 Основная волна 2017
 Основная волна 2013

ОТВЕТ: 0,4

4

Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.



B5BD2F

$$0,5 \cdot 0,32 = 0,16$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна 2015

ОТВЕТ: 0,16

5

Найдите корень уравнения

$$\lg(4 - x) = 2.$$

$$\log_{10}(4-x) = 2$$

$$100 = 4 - x$$

$$x = -96$$

ОТВЕТ: -96

Источники:

ФИПИ (старый банк)

6

Найдите $16 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,5$.

4881FC

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot 0,5^2 - 1 = 2 \cdot 0,25 - 1 = -0,5$$

$$16 \cdot (-0,5) = -8$$

ОТВЕТ: -8

Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Досрочная волна 2013

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

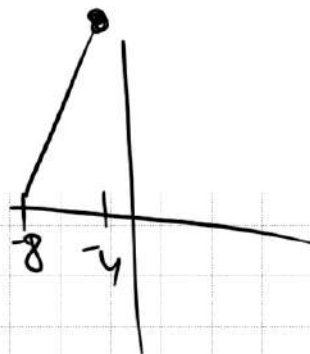
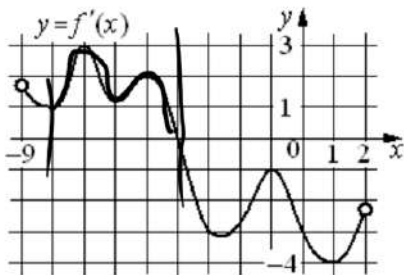
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

7

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9; 2)$. В какой точке отрезка $[-8; -4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

**Источники:**

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2018
Основная волна 2017

ОТВЕТ: -4

8

Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы:

$$T(t) = T_0 + bt + at^2,$$

где t — время (в мин.), $T_0 = 1320$ К, $a = -20$ К/мин², $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1800 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.



4A0E2F

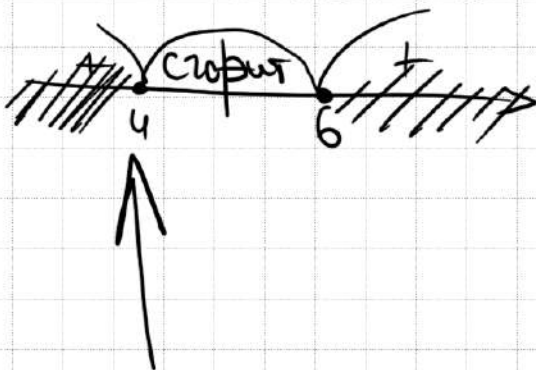
$$T \leq 1800$$

$$T_0 + b \cdot t + at^2 - 1800 \leq 0$$

$$1320 + 200 \cdot t - 20 \cdot t^2 - 1800 \leq 0$$

$$-20t^2 + 200t - 480 \leq 0 \quad | :(-20)$$

$$t^2 - 10t + 24 \geq 0$$



ОТВЕТ: 4

Источники:

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Досрочная волна 2017
Основная волна 2016

9

Смешав 45-процентный и 97-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

02C0F1

$$\begin{cases} 0,45 \cdot m_1 + 0,97 \cdot m_2 + 0 \cdot 10 = 0,62 \cdot (m_1 + m_2 + 10) \\ 0,45 \cdot m_1 + 0,97 \cdot m_2 + 0,5 \cdot 10 = 0,72 \cdot (m_1 + m_2 + 10) \end{cases}$$

$$5 = 0,1 \cdot (m_1 + m_2 + 10)$$

$$m_1 + m_2 + 10 = 50$$

$$m_2 = 40 - m_1$$

Подставим в уравнение ①

$$0,45 \cdot m_1 + 0,97 \cdot (40 - m_1) = 0,62 \cdot 50$$

$$0,45 \cdot m_1 + 38,8 - 0,97 m_1 = 31$$

$$7,8 = 0,52 \cdot m_1$$

$$m_1 = \frac{7,8}{0,52} = \frac{780}{52} = 15$$

ОТВЕТ: 15

Источники:

ГІРІ (старый банк)

ГІРІ (новый банк)

Демо 2021

Демо 2020

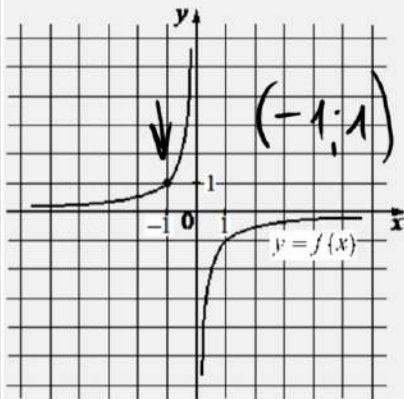
Досрочная волна 2015

СХЕМА ЗАДАЧ НА СПЛАВЫ И СМЕСИ

Доля₁ : m₁ + Доля₂ : m₂ = Доля₃ : m₃

10

На рисунке изображен график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



06DEEE

$$\textcircled{1} 1 = \frac{k}{-1} \quad k = -1$$

$$y = \frac{-1}{x}$$

$$\textcircled{2} f(10) = y = \frac{-1}{10}$$

ОТВЕТ: -0,1

Источники:

ГІРІ (старый банк)

11

Найдите наименьшее значение функции

 $y = (2x + 15) \cdot e^{2x+16}$ на отрезке $[-12; -2]$.

$$y' = 2 \cdot e^{2x+16} + (2x+15) \cdot e^{2x+16} \cdot 2 = 0$$

$$e^{2x+16} \cdot (1 + 2x + 15) = 0$$

$$e^{2x+16} = 0$$

\emptyset

$$x = -8$$

$$y(-8) = -1$$

$$y(-12) = \dots$$

$$y(-2) = \dots$$

ОТВЕТ:

-1

Источники:

ФИПИ (новый банк)

Основная волна 2020

ПРОИЗВОДНЫЕ

$C' = 0$

$x' = 1$

$(Cx)' = C$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

12

а) Решите уравнение

$$\log_4(2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - 6 \sin^2 x) = x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

$$a) 4^x = 2^{2x} - \sqrt{3} \cdot \cos x - 6 \sin^2 x$$

$$6 \cdot (1 - \cos^2 x) + \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$$

$$-6 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x + 6 = 0$$

$$\text{Пусть } \cos x = t$$

$$-6t^2 + \sqrt{3} \cdot t + 6 = 0$$

$$D = 3 - 4 \cdot (-6) \cdot 6 = 147 = (7\sqrt{3})^2$$

$$t = \frac{-\sqrt{3} \pm 7\sqrt{3}}{-12}$$

$$t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = \frac{8\sqrt{3}}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}}$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{12}{9} > 1 \quad \text{нет решения}$$

ОТВЕТ:

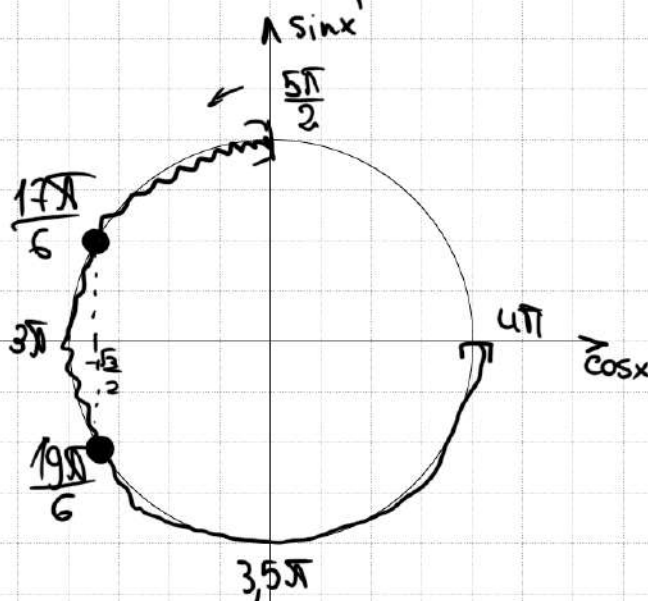
$$a) \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$b) \frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$$

Источники:

Основная волна 2017

б) Ответим корням с помощью окружности:



Получим:

$$x = 3\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$$

$$x = 3\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$$

13

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На рёбрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.

- а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.
 б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

Источники:

Гордин #14 2019
 Сергеев 2018
 Досрочная волна 2016

$$1) \textcircled{1} NK = \sqrt{D_1 N^2 + K D_1^2} = 5\sqrt{2}$$

$$2) \textcircled{2} \triangle D_1 NK = \triangle BML \text{ по УСУ}$$

$$ML = 5\sqrt{2}$$

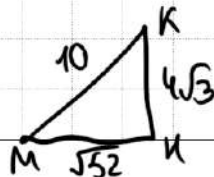
$$3) \triangle NKM:$$

$$KM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

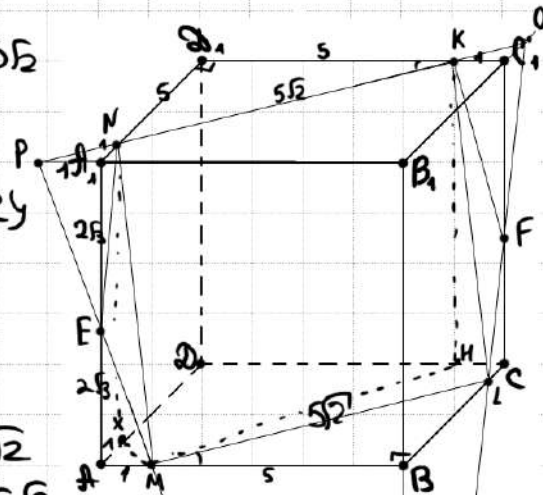
$$NM = \sqrt{5^2 + (4\sqrt{3})^2} = 5\sqrt{2}$$

Аналогично $KL = 5\sqrt{2}$
 $\Rightarrow MNKL$ – ромб

4) Найдём KM :



ОТВЕТ: 55



Аналогично $NL = 10$
 $\Rightarrow MNKL$ – ромб с равными диаг. т.е. квадрат

$$5) \textcircled{1} S_{\triangle MEN} + S_{MNKL} + S_{\triangle KFL}$$

2) $\triangle A_1 P N \sim \triangle K D_1 N$
 по 2 углам
 $PA_1 = 1$
 $\triangle P A_1 E = \triangle A E M$ по УСУ
 $\Rightarrow E$ – середина AA_1
 Аналогично F – середина CC_1

$$3) \textcircled{3} \begin{array}{l} \sqrt{13} \\ N \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ M \end{array} \quad h = \sqrt{13 - \frac{25}{2}} = \frac{1\sqrt{2}}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}$$

$$4) \textcircled{4} S_{\text{сеч}} = \frac{5}{2} + 50 + \frac{5}{2} = 55$$

14

Решите неравенство

$$(3^{4x-x^2-3} - 3^0) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 5) \geq 0.$$

$$(3^{4x-x^2-3} - 3^0) \cdot (\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 5) - \log_{\frac{1}{2}} 1) \geq 0$$

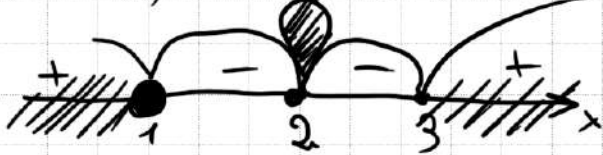
$$(3-1)(4x-x^2-3-0) \cdot \left(\frac{1}{2}-1\right)(x^2-4x+5-1) \geq 0 \quad | : \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(x^2-4x+5 > 0)$$

$$(4x-x^2-3) \cdot (x^2-4x+4) \leq 0 \quad | : (-1)$$

$$(x^2-4x+3) \cdot (x^2-4x+4) \geq 0$$

$$(x-1)(x-3) \cdot (x-2)^2 \geq 0$$



$$\textcircled{2} \quad x^2 - 4x + 4 + 1 > 0$$

$$(x-2)^2 + 1 > 0$$

x - любое

ОТВЕТ:

$$(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$$

Источники:

Досрочная волна (Резерв) 2016

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$ f - g $	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

Строительство нового завода стоит 159 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

1 год: $p = 10$

$$\text{Прибыль} = -0,5x^2 + 8x - 6$$

$$x_{\text{верш}} = \frac{-8}{2 \cdot (-0,5)} = 8$$

$$\text{Прибыль при } x=8 = 26 \text{ млн}$$

2 год: $p = 11$

$$\text{Прибыль} = -0,5x^2 + 9x - 6$$

$$x_{\text{верш}} = \frac{-9}{2 \cdot (-0,5)} = 9$$

$$\text{Прибыль при } x=9 = 34,5 \text{ млн}$$

3 год: $p = 12$

$$\Pi = -0,5x^2 + 10x - 6$$

$$x_0 = 10$$

$$\Pi_{x=10} = 44 \text{ млн}$$

4 год: $p = 13$

$$\text{Прибыль} = -0,5x^2 + 11x - 6$$

$$x = 11$$

$$\text{Прибыль} = 54,5 \text{ млн}$$

ОТВЕТ:

$$26 + 34,5 + 44 + 54,5 = 159$$

\Rightarrow 4 года.

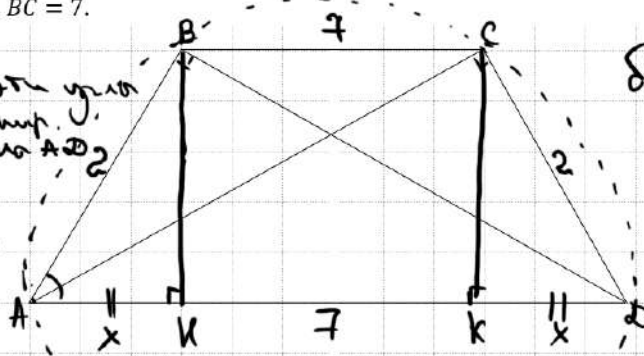
16

В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.

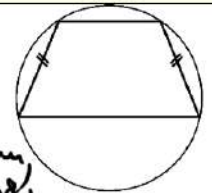
- а) Докажите, что $AB = CD$.
 б) Найдите AD , если $AB = 2$, $BC = 7$.

а) ① $\angle ABD = 90^\circ$ — \rightarrow \angle угол
 $\angle ACD = 90^\circ$ — \rightarrow \angle угол
 \rightarrow Можно описать
 около $ABCD$ окр-ть
 с диаметром AD

② $ABCD$ — трапеция
 вписанная в окр-ть,
 т. е. равнобедр.
 $\Rightarrow AB = CD$



б) ΔABK —
 ΔAKD
 (по 2 углам
 \angle $\angle A = 90^\circ$)



Если трапеция вписана
 в окружность, то она —
 равнобедренная

$$\frac{2}{2x+7} = \frac{x}{2}$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 0$$

$$D = 81$$

$$x = \frac{-7 \pm 9}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x \leq 0$$

$$AD = \frac{1}{2} + 7 + \frac{1}{2} = 8$$

ОТВЕТ: 8

Источники:

Основная волна 2018
 Основная волна (Резерв) 2018

ПРИЗНАК

Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 2a \leq x, \\ 6x > x^2 + a^2, \\ x + a \leq 6 \end{cases}$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4; 5]$.

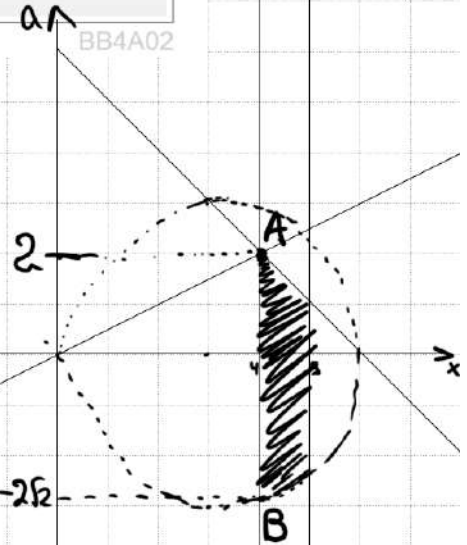
$$\begin{cases} a \leq \frac{1}{2}x \\ x^2 - 6x + 9 + a^2 < 9 \\ 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq \frac{1}{2}x \\ (x-3)^2 + a^2 < 3^2 \\ a \leq -x + 6 \\ 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

область
ниже прямой
 $a = \frac{1}{2}x$

область
внутри
окружности
с центром $(3; 0)$
и радиусом $R = 3 - 2\sqrt{2}$

область
ниже прямой
 $a = -x + 6$



ОТВЕТ:

$$(-2\sqrt{2}; 2]$$

Найти ординату точки B:
окр-ть $(x-3)^2 + a^2 = 3^2$ пересекает $x=4$

$$(4-3)^2 + a^2 = 9$$

$$a^2 = 8$$

$$a = \pm 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow a = -2\sqrt{2}$ - ордината точки B

Найти ординату точки A:

$$\frac{1}{2}x = -x + 6$$

$$\frac{3}{2}x = 6 \\ x = 4$$

$$a = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех, и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

Источники:
Олимпиада Москва 2014

- а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?
- б) Каково наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?
- в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?

Пусть x — это кол-во мальчиков, y — это кол-во девочек.
Тада $(x+y)$ кол-во девочек

Получаем: 4м стр. по 4м канд.
3м стр. по 21м канд.
119 писем
17 девочек получили по 7 писем каждая

Ответ: а) да

а) $x \cdot 4 + y \cdot 21 = (x+y) \cdot 7$
кол-во отправл. кол-во получ.

$4x + 21y = 7x + 7y$
 $4x - 7x = 7y - 21y$
 $-3x = -14y$
 $x = \frac{14y}{3}$
Если $x=14$, то $y=3$
или получили верное рав. во

б) $x \cdot 4 + y \cdot 21 = (x+y) \cdot k$ где k — это кол-во полученных писем
 $4x + 21y = kx + ky$
 $4x - kx = ky - 21y$
 $(4-k) \cdot x = (k-21)y$

Ответ:

а)	
б)	
в)	

Если $k=4, 50$ $0 \cdot x = -17 \cdot y \neq$
 $k=71, 50$ $-17x = 0 \cdot y \neq$
 $k=3, 50$ $x = -18 \cdot y \neq$
 $k < 3, 50$ x или y будет отриц.
 $k > 21, 50$ там же
 $k=5, 50$ $-x = -16y$
 $x = 16y$
 $x = 16$
 $y = 1$
($y \geq 2$ по укл.)
 $2x = 15y$
 $x = 15$
 $y = 2$
 $(x+y)_{\max} = 17$
 $k=7, 50$ $3x = 14y$
 $x = 14$
 $y = 3$
 $(x+y)_{\max} = 17$

$k=19$
Для любого $k \in [6, 19]$
 $(x+y)_{\max} = 17$
Ответ: б) 17 (минимум как раз в а))

В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех, и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

- а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?
- б) Каково наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?
- в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?

в) Пусть n — кол-во девушек

Количество полученных писем = $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n-1 = \frac{0+n-1}{2} \cdot n$
(минимально возможное)

Кол-во отправленных писем = $2 \cdot 4 + (n-2) \cdot 21$
(максимально возможное)

$\frac{n-1}{2} \cdot n \leq \text{кол-во писем} \leq 21n - 34$

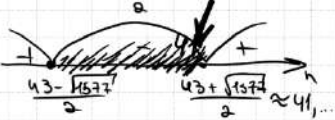
$\frac{(n-1) \cdot n}{2} \leq 21n - 34 \quad | \cdot 2$

$n^2 - n \leq 42n - 68$

$n^2 - 43n + 68 \leq 0$

$D = 1849 - 4 \cdot 68 = 1849 - 272 = 1577$

$n = \frac{43 \pm \sqrt{1577}}{2}$



$39 < \sqrt{1577} < 40$
 $82 < 43 + \sqrt{1577} < 83$
 $41 < \frac{43 + \sqrt{1577}}{2} < 41,5$

$\Rightarrow n_{\max} = 41$

Покажем, что $n=41$ можно было.
2 макс стр по 4 } 827 писем
39 макс по 21 м

Первые 40 девочек получили 0, 1, 2, ..., 39, т.е. $\frac{0+39}{2} \cdot 40 = 780$ писем
41-ая девочка получила 47 писем
Ответ: б) 41