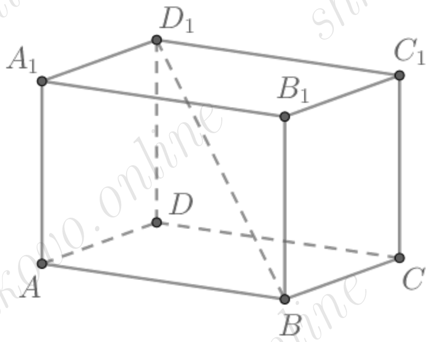
1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $CC_1 = 9$, $AB = 2$, $B_1C_1 = 6$. Найдите длину диагонали BD_1.



Ответ

11

Решение

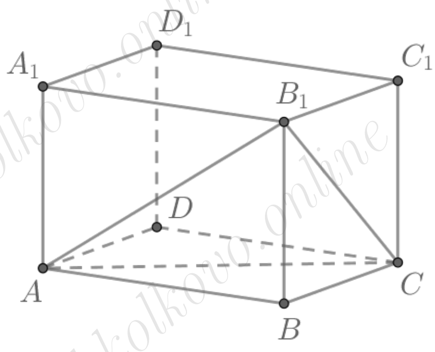
В прямоугольном параллелепипеде с измерениями a, b и c длина его диагонали равна

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Следовательно,

$$BD_1 = \sqrt{9^2 + 2^2 + 6^2} = 11.$$

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 9$, $BC = 7$, $AA_1 = 6$. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1.



Ответ

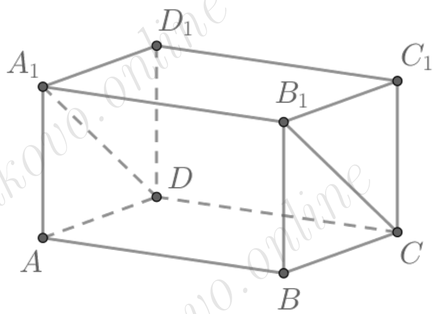
63

Решение

Многогранник, объем которого необходимо найти, является прямоугольной треугольной пирамидой, высота которой равна BB_1, а основание представляет собой прямоугольный треугольник ABC. Следовательно, этот объем равен

$$V_{B_1ABC} = \frac{1}{3} \cdot BB_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7 = 63.$$

3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 6$, $BC = 5$, $AA_1 = 4$. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1.



Ответ

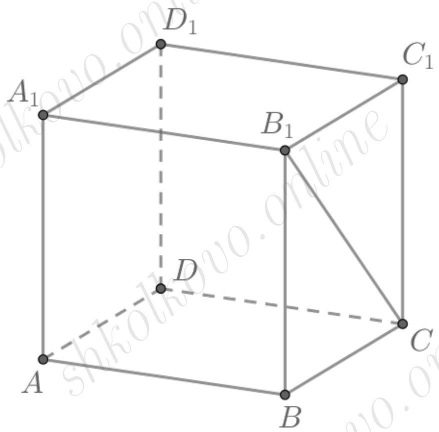
60

Решение

Искомый объем равен половине объема прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, следовательно, он равен

$$V = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60.$$

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AB = 9$, $AD = 12$, $AA_1 = 9$. Найдите синус угла между прямыми DD_1 и B_1C.



Ответ

0,8

Решение

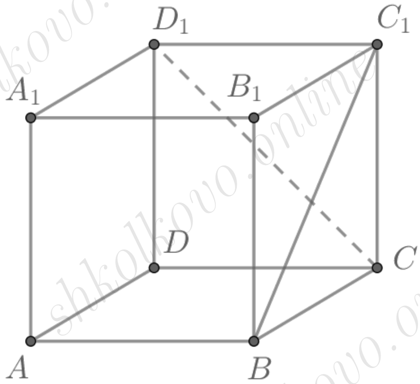
Так как $DD_1 \parallel CC_1$, то $\angle(DD_1, B_1C) = \angle(CC_1, B_1C) = \angle B_1CC_1$. По теореме Пифагора

$$B_1C = \sqrt{B_1C_1^2 + CC_1^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$$

Следовательно,

$$\sin\angle B_1CC_1 = \frac{B_1C_1}{B_1C} = \frac{12}{15} = 0,8.$$

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми CD_1 и BC_1. Ответ дайте в градусах.



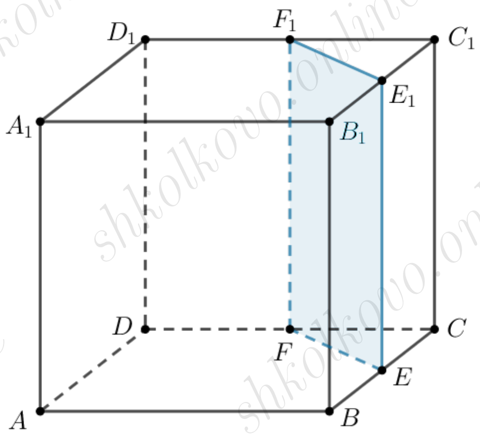
Ответ

60

Решение

Так как $AD_1 \parallel BC_1$, то $\angle(BC_1, CD_1) = \angle(AD_1, CD_1) = \angle AD_1C$. Рассмотрим $\triangle AD_1C$. Его стороны — диагонали одинаковых квадратов, следовательно, этот треугольник равносторонний. Значит, все его углы равны по 60°, то есть $\angle AD_1C = 60^\circ$.

6. Плоскость проходит через середины двух рёбер куба с общей вершиной параллельно третьему ребру, выходящему из той же вершины. Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба этой плоскостью, равен 11. Найдите объём куба.



Ответ

88

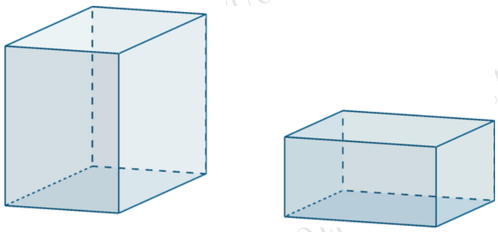
Решение

Пусть a — длина ребра куба. Поскольку основанием призмы служит прямоугольный треугольник, катеты которого составляют половину от a, то объём призмы равен

$$V = Sh = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \cdot a = \frac{1}{8}a^3$$

Так это в 8 раз меньше объёма куба a^3, то объём куба равен $11 \cdot 8 = 88$.

7. Объем первого прямоугольного параллелепипеда равен 105. Найдите объем второго прямоугольного параллелепипеда, если известно, что высота первого параллелепипеда в 7 раз больше высоты второго, ширина второго в 2 раза больше ширины первого, а длина первого в 3 раза больше длины второго.



Ответ

10

Решение

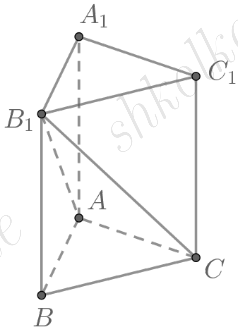
Пусть буквы a, b и c обозначают высоту, ширину и длину соответственно. Объем прямоугольного параллелепипеда ищется по формуле $V = abc$. Следовательно, объем первого параллелепипеда относится к объему второго как

$$\frac{105}{V_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{a_1 b_1 c_1}{a_2 b_2 c_2}$$

Из условия следует, что $a_1 = 7a_2$, $b_2 = 2b_1$, $c_1 = 3c_2$. Тогда

$$\frac{105}{V_2} = \frac{7a_2 \cdot b_1 \cdot 3c_2}{a_2 \cdot 2b_1 \cdot c_2} = \frac{7 \cdot 3}{2} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{105 \cdot 2}{21} = 10$$

8. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 8, а боковое ребро равно 6. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, C, A_1, B_1, C_1.



Ответ

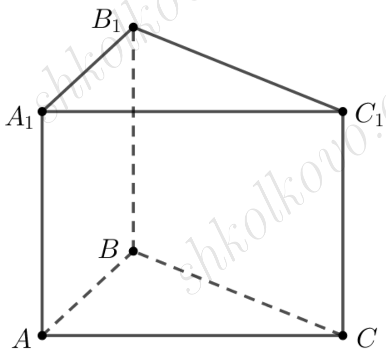
32

Решение

Искомый объем равен разности объема призмы $ABCA_1B_1C_1$ и объема треугольной пирамиды B_1ABC. Следовательно, этот объем равен

$$V = V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{B_1ABC} = 8 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 6 = \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot 6 = 32.$$

9. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, C, A_1, B_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. При этом площадь основания призмы равна 9, а боковое ребро равно 4.



Ответ

12

Решение

Многогранник с вершинами A, C, A_1, B_1 — это треугольная пирамида. Тогда ее объем вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

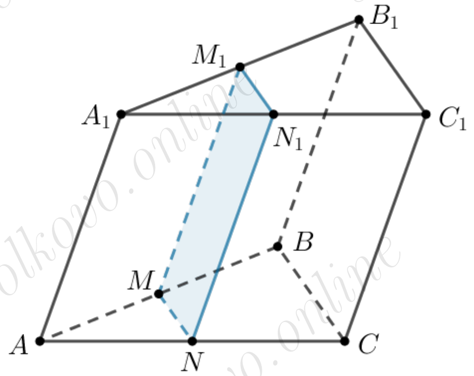
Здесь S — площадь основания, h — длина высоты, опущенной на это основание.

При этом объем этой пирамиды равен объему пирамиды $ABCA_1$, так как у этих пирамид равные по площади основания AA_1B_1 и AA_1B, лежащие в одной плоскости, и общая вершина C.

Тогда объем пирамиды $ABCA_1$ равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot A_1A = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4 = 12$$

10. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен 5. Найдите объем исходной призмы.



Ответ

20

Решение

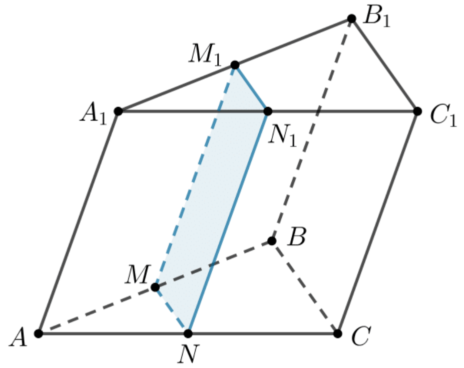
Пусть S — площадь основания треугольной призмы, а h — ее высота. Тогда объем треугольной призмы равен $V = Sh$.

Рассмотрим отсеченную призму. Ее высота равна высоте изначальной треугольной призмы, то есть равна h. Так как MN — средняя линия треугольника ABC, то треугольник AMN, лежащий в основании отсеченной призмы, подобен с коэффициентом $\dfrac{1}{2}$ треугольнику ABC, лежащему в основании изначальной призмы, по отношению сторон $AM : AB = AN : AC = 1 : 2$ и общему углу между ними. Тогда площадь треугольника AMN в $2^2 = 4$ раза меньше площади треугольника ABC.

Значит, объем отсеченной призмы равен

$$V_o = \frac{1}{4}Sh = \frac{1}{4}V \quad \Rightarrow \quad V = 4V_o = 4 \cdot 5 = 20$$

11. Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 36. Через среднюю линию основания этой призмы проведена плоскость, параллельная боковой грани. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ

18

Решение

Обозначим площадь боковой поверхности исходной призмы за $S_{\text{исх.}}$, площадь боковой поверхности отсеченной призмы за $S_{\text{отс.}}$.

Площадь боковой поверхности исходной призмы равна:

$$S_{\text{исх.}} = S_{A_1B_1BA} + S_{B_1C_1CB} + S_{A_1C_1CA}$$

Площадь боковой поверхности отсеченной призмы равна:

$$S_{\text{отс.}} = S_{A_1M_1MA} + S_{M_1N_1NM} + S_{A_1N_1NA}$$

Так как MN — средняя линия $\triangle ABC$, то

$$MN = \frac{1}{2}BC, \quad AM = MB = \frac{1}{2}AB, \quad AN = NC = \frac{1}{2}AC$$

В параллелограммах A_1M_1MA и A_1B_1BA высоты, проведенные к основаниям AM и AB совпадают, а основание AM в 2 раза меньше основания AB. Так как площадь параллелограмма равна произведению высоты на основание, то:

$$S_{A_1M_1MA} = \frac{1}{2}S_{A_1B_1BA}$$

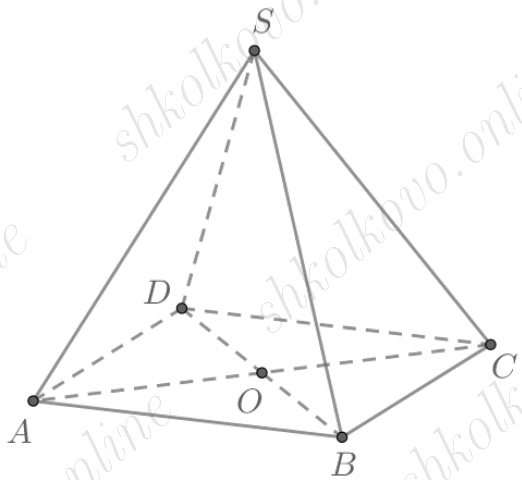
Аналогично:

$$S_{M_1N_1NM} = \frac{1}{2}S_{B_1C_1CB}, \quad S_{A_1N_1NA} = \frac{1}{2}S_{A_1C_1CA}$$

Найдем площадь боковой поверхности отсеченной призмы:

$$S_{\text{отс.}} = S_{A_1M_1MA} + S_{M_1N_1NM} + S_{A_1N_1NA} = \frac{1}{2}S_{A_1B_1BA} + \frac{1}{2}S_{B_1C_1CB} + \frac{1}{2}S_{A_1C_1CA} = \frac{1}{2}S_{\text{исх.}} = 18$$

12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 48$, $SC = 80$. Найдите длину отрезка BD.



Ответ

128

Решение

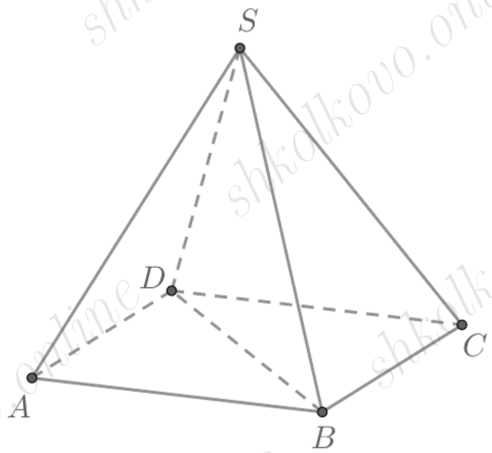
Так как пирамида правильная, то SO — высота пирамиды. Следовательно, $\triangle SOC$ прямоугольный, значит, по теореме Пифагора

$$OC = \sqrt{SC^2 - SO^2} = \sqrt{80^2 - 48^2} = 64.$$

Так как пирамида правильная, то в основании лежит квадрат, следовательно, его диагонали равны, причем точкой O делятся пополам, значит,

$$BD = AC = 2OC = 128.$$

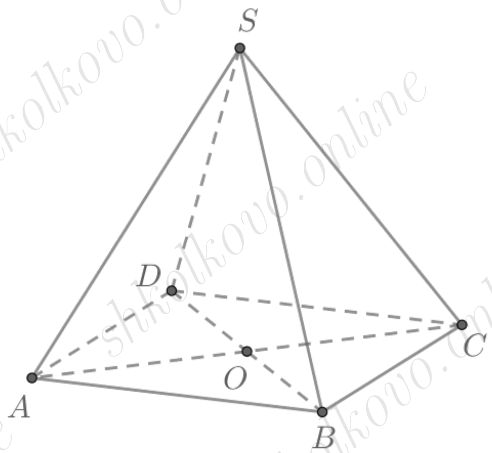
13. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SC равно 17, сторона основания равна $15\sqrt{2}$. Найдем объем пирамиды.



Ответ

1200

Решение



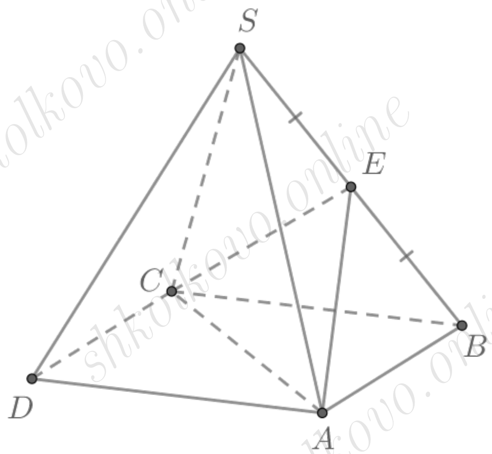
Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Тогда SO — высота пирамиды. Следовательно, $\triangle SOC$ — прямоугольный. Так как $AC = AB\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 30$, а $OC = \frac{1}{2}AC = 15$, то по теореме Пифагора

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8.$$

Следовательно, объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot AB^2 = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \left(15\sqrt{2}\right)^2 = 1200.$$

14. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 116. Точка E — середина ребра SB. Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.



Ответ

29

Решение

Объем пирамиды $SABCD$ рассчитвается по формуле

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot h = 116$$

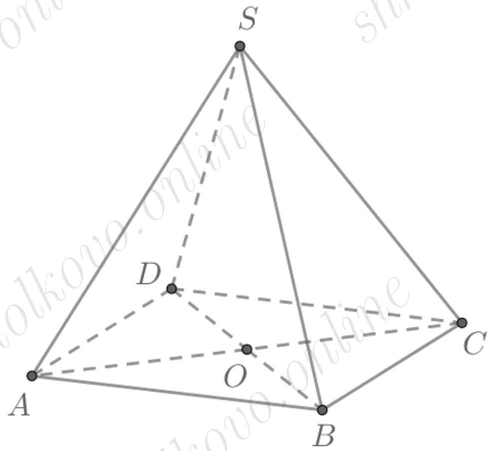
Точка E — середина ребра SB, значит, высота пирамиды $EABC$ равна половине высоты пирамиды $SABCD$, то есть $\frac{1}{2}h$.

Площадь основания ABC пирамиды $EABC$ равна $\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Таким образом, искомый объем равен

$$V_{EABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{ABCD} \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{4} \cdot V_{SABCD} = \frac{1}{4} \cdot 116 = 29$$

15. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $AC = 30,\ SC = 39$. Найдите высоту пирамиды.



Ответ

36

Решение

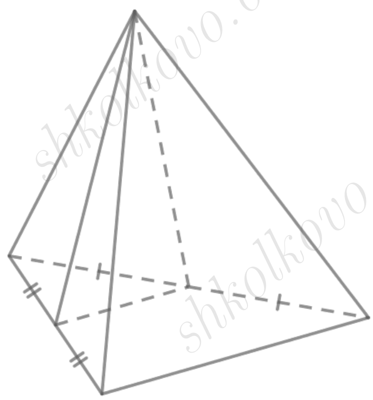
Точка O — центр основания, то есть $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$.

Рассмотрим треугольник SOC. Он прямоугольный, так как SO — высота пирамиды. Она перпендикулярна основанию, значит, перпендикулярна и прямой AC.

По теореме Пифагора найдем высоту пирамиды

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{39^2 - 15^2} =$$
$$= \sqrt{(39+15)(39-15)} = \sqrt{54 \cdot 24} =$$
$$= \sqrt{9 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6} = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$$

16. Объем треугольной пирамиды равен 78. Через вершину пирамиды и среднюю линию ее основания проведена плоскость. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.



Ответ

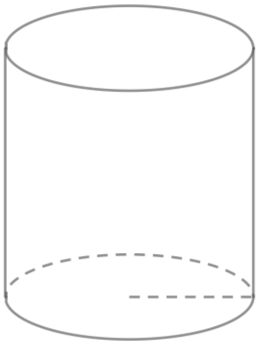
19,5

Решение

Так как средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$, то площадь отсекаемого треугольника в 4 раза меньше площади исходного треугольника. Высоты исходной пирамиды и отсеченной, проведенные к плоскости этого треугольника, одинаковы. Следовательно, объем отсеченной пирамиды в 4 раза меньше объема исходной пирамиды, значит, он равен

$$V = \frac{1}{4} \cdot 78 = 19,5.$$

17. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π.



Ответ

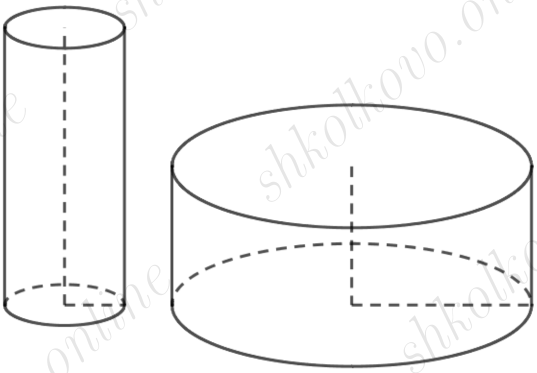
12

Решение

Площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле $S_б = 2\pi Rh$, где R — радиус основания цилиндра, а h — высота. Тогда

$$\frac{S_б}{\pi} = \frac{2\pi Rh}{\pi} = 2Rh = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

18. Объём первого цилиндра равен 6. У второго цилиндра высота в два раза меньше, а радиус основания в три раза больше, чем у первого. Найди объём второго цилиндра.



Ответ

27

Решение

Объем цилиндра вычисляется по формуле

$$V = \pi r^2 h,$$

где r — радиус цилиндра, h — высота цилиндра.

Пусть r_1, h_1, V_1 — радиус, высота и объем первого цилиндра, r_2, h_2, V_2 — радиус, высота и объем второго цидиндра. По условию

$$r_2 = 3r_1$$

$$h_2 = \frac{1}{2}r_1$$

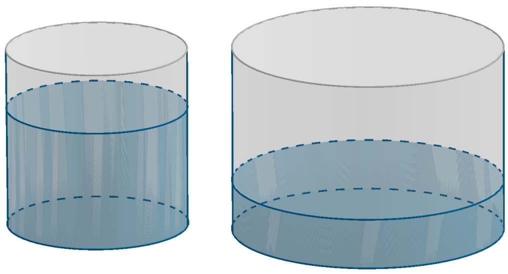
Найдем отношение объема второго цилиндра к объему первого:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi r_2^2 h_2}{\pi r_1^2 h_1} = \frac{(3r_1)^2 \cdot \frac{1}{2}h_1}{r_1^2 h_1} = \frac{4,5 \cdot r_1^2 h_1}{r_1^2 h_1} = 4,5$$

Найдем объем второго цилиндра:

$$V_2 = 4,5V_1 = 4,5 \cdot 6 = 27$$

19. В цилиндрическом сосуде уровень воды достигает 384 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 8 раз больше диаметра первого? Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ

6

Решение

Пусть уровень воды в первом цилиндрическом сосуде равен h_1 см, а во втором — h_2 см. Пусть диаметр первого сосуда равен D см. Тогда площадь дна этого сосуда равна

$$S_1 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \text{ см}^2$$

Значит, объем воды в сосуде равен

$$V = S_1 h_1 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot 384 \text{ см}^3$$

По условию диаметр второго сосуда равен $8D$ см. Тогда площадь его дна равна

$$S_2 = \frac{\pi \cdot (8D)^2}{4} \text{ см}^2$$

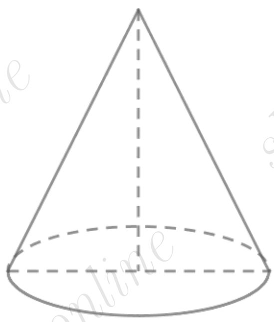
Так как количество воды не изменилось, то

$$V = S_2 h_2 = \frac{\pi \cdot (8D)^2}{4} \cdot h_2 \text{ см}^3$$

Тогда искомый уровень воды равен

$$h_2 = \frac{V}{S_2} = \frac{\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot 384}{\frac{\pi \cdot (8D)^2}{4}} = \frac{\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot 384}{\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot 64} = \frac{384}{64} = 6 \text{ см}$$

20. Образующая конуса равна 26, а диаметр основания равен 48. Найдите высоту конуса.



Ответ

10

Решение

Диаметр основания равен 48, значит, радиус основания равен 24.

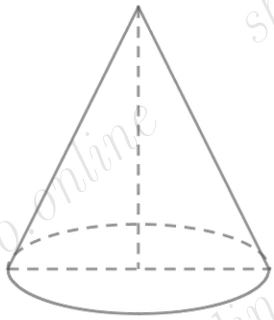
Образующая, высота и радиус конуса образуют прямоугольный треугольник. Тогда по теореме Пифагора можем найти квадрат высоты конуса:

$$h^2 = 26^2 - 24^2 = (26 - 24) \cdot (26 + 24) = 2 \cdot 50 = 100$$

Тогда высота конуса равна

$$h = \sqrt{100} = 10$$

21. Высота конуса равна 16, а диаметр основания равен 60. Найдите длину образующей конуса.



Ответ

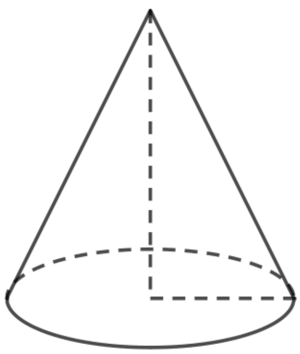
34

Решение

Высота конуса, радиус основания и образующая составляют прямоугольный треугольник, в котором образующая является гипотенузой. Следовательно, по теореме Пифагора она равна

$$\sqrt{16^2 + 30^2} = 34.$$

22. Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 9 раз, а радиус основания останется прежним?



Ответ

9

Решение

Объем конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

где r — радиус основания, h — высота цилиндра.

Пусть r_1, h_1, V_1 — радиус основания, высота и объем исходного цилиндра, r_2, h_2, V_2 — радиус основания, высота и объем цилиндра, у которого высоту уменьшили в 9 раз, а радиус основания оставили прежним. Тогда

$$r_2 = r_1$$

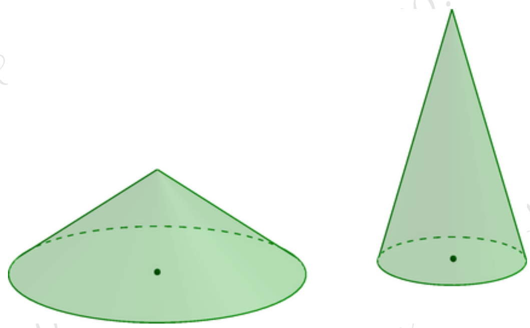
$$h_2 = \frac{1}{9}h_1$$

Найдем $\frac{V_2}{V_1}$:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2}{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1} = \frac{r_2^2 h_2}{r_1^2 h_1} = \frac{r_1^2 \cdot \frac{1}{9}h_1}{r_1^2 h_1} = \frac{1}{9}$$

То есть объем цилиндра уменьшится в 9 раз.

23. Даны два конуса. Радиус второго конуса в 3 раза больше радиуса первого конуса, а высота второго конуса в 6 раз меньше высоты первого конуса. Найдите объем первого конуса, если объем второго конуса равен 18.



Ответ

12

Решение

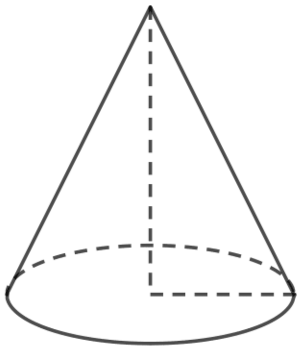
Объем конуса с высотой h и радиусом основания R вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Следовательно, объем первого конуса относится к объему второго конуса как

$$\frac{V_1}{18} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi\, R_1^2\, h_1}{\frac{1}{3}\pi\, R_2^2\, h_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot \frac{h_1}{h_2}$$

Так как радиус второго в 3 раза больше радиуса первого, то $R_2 = 3R_1$. Так как высота второго в 6 раз меньше высоты первого, то $h_1 = 6h_2$. Следовательно,

$$\frac{V_1}{18} = \left(\frac{R_1}{3R_1}\right)^2 \cdot \frac{6h_2}{h_2} = \frac{1}{9} \cdot 6 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12$$

24. Площадь боковой поверхности конуса равна 48π, а площадь основания равна 36π. Найдите длину образующей конуса.



Ответ

8

Решение

Если радиус окружности, лежащей в основании конуса, обозначить за r, а длину образующей за l, то площадь основания и площадь боковой поверхности конуса выразятся по формулам:

$$S_{\text{осн.}} = \pi r^2, \quad S_{\text{бок.пов.}} = \pi r l$$

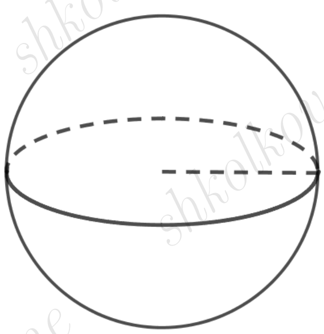
Из первой формулы получаем:

$$\pi r^2 = 36\pi \quad \Rightarrow \quad r^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad r = 6$$

Из второй формулы получаем:

$$6\pi l = 48\pi \quad \Rightarrow \quad 6l = 48 \quad \Rightarrow \quad l = 8$$

25. Площадь поверхности шара равна 24. Найдите площадь большого круга шара.



Ответ

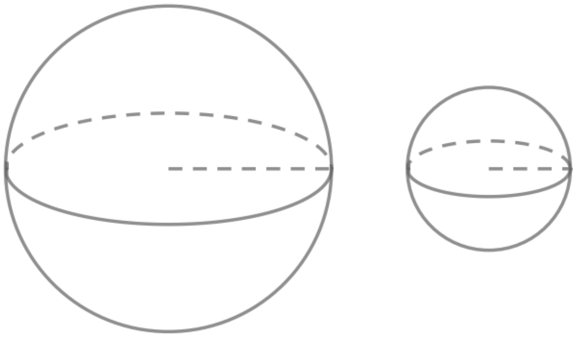
6

Решение

Площадь поверхности шара вычисляется по площади $S = 4\pi R^2$, где R — радиус шара. Площадь большого круга шара вычисляется по формуле $S_k = \pi R^2$, где R — радиус шара. Тогда искомая площадь равна

$$S_k = \pi R^2 = \frac{1}{4} \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{4} S = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$$

26. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в 2 раза?



Ответ

4

Решение

Пусть R — изначальный радиус шара. Площадь поверхности шара вычисляется по формуле

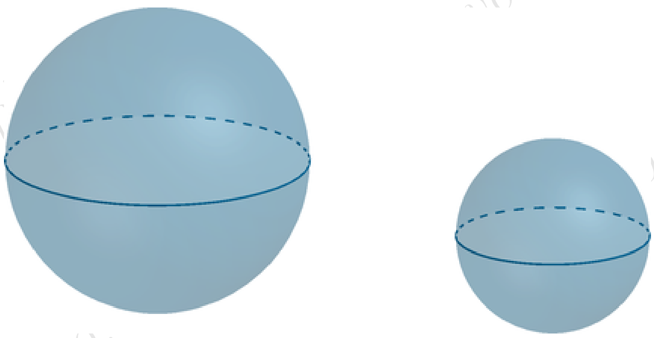
$$S = 4\pi R^2$$

После увеличения радиуса шара в 2 раза площадь поверхности равна

$$S_1 = 4\pi(2R)^2 = 16\pi R^2$$

Это в 4 раза больше, чем изначальная площадь поверхности.

27. Объем первого шара равен равен 54. Найдите объем второго шара, если его радиус в 3 раза меньше радиуса первого шара.



Ответ

2

Решение

Объем шара радиуса R ищется по формуле $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. Следовательно, объем первого шара относится к объему второго как

$$\frac{54}{V_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi\, R_1^3}{\frac{4}{3}\pi\, R_2^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3$$

Так как радиус второго шара в 3 раза меньше радиуса первого шара, то $R_1 = 3R_2$, следовательно,

$$\frac{54}{V_2} = \left(\frac{3R_2}{R_2}\right)^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{54}{27} = 2$$

28. Объем шара равен $\dfrac{36}{\sqrt{\pi}}$. Чему будет равна площадь поверхности шара, если его радиус увеличить на $\dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$?

Ответ

324

Решение

По формуле объема шара с радиусом R имеем:

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{36}{\sqrt{\pi}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

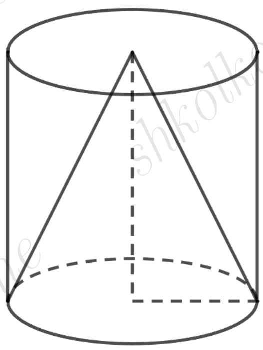
Радиус нового шара равен

$$R_{\text{нов.}} = R + \frac{6}{\sqrt{\pi}} = \frac{9}{\sqrt{\pi}}$$

Тогда найдем площадь поверхности:

$$S_{\text{пов.}} = 4\pi R_{\text{нов.}}^2 = 4\pi\left(\frac{9}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 4\pi\frac{81}{\pi} = 324$$

29. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 25. Найдите объём цилиндра.



Ответ

75

Решение

Объём конуса равен

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3}Sh$$

где S — площадь основания конуса, h — его высота.

Объём цилиндра равен

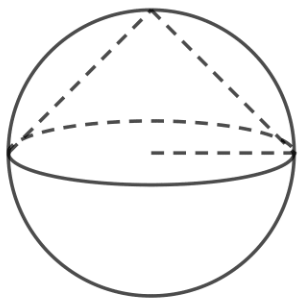
$$V_{\text{ц}} = Sh$$

где S — площадь основания цилиндра, h — его высота.

По условию конус и цилиндр имеют общие основание и высоту, тогда

$$V_{\text{ц}} = 3V_{\text{к}} = 3 \cdot 25 = 75$$

30. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 6. Найдите объем шара.



Ответ

24

Решение

Так как конус вписан в шар, то высота конуса равна радиусу шара.

Объем конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

где r — радиус основания конуса, h — высота конуса.

Пусть R — радиус шара. Тогда высота конуса также равна R.

Объем конуса равен

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{1}{3}\pi R^3$$

Объем шара вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

где r — радиус шара.

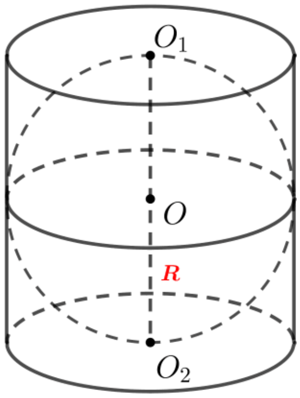
Объем шара равен

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Найдем отношение объема шара к объему конуса:

$$\frac{V_{\text{шара}}}{V_{\text{кон.}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi R^3} = 4 \quad \Rightarrow \quad V_{\text{шара}} = 4V_{\text{кон.}} = 4 \cdot 6 = 24$$

31. Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 6. Найдите площадь поверхности шара.



Ответ

4

Решение

Так как шар вписан в цилиндр, то радиус шара равен радиусу цилиндра, а высота цилиндра равна двум радиусам шара.

Пусть радиус шара равен R. Тогда радиус цилиндра равен R, высота цилиндра равна $2R$.

Площадь поверхности шара вычисляется по формуле

$$S = 4\pi r^2,$$

где r — радиус шара.

Тогда площадь поверхности шара равна

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2$$

Площадь полной поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$S = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

где $S_{\text{осн.}}$ — площадь основания, $S_{\text{бок.}}$ — площадь боковой поверхности, r — радиус цилиндра, h — высота цилиндра.

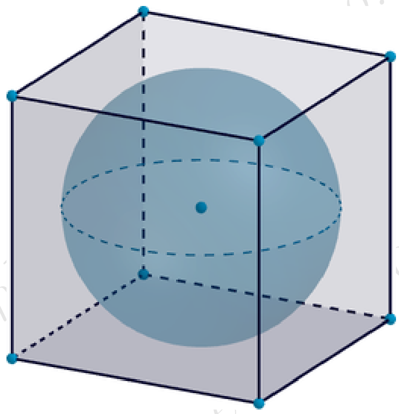
Тогда площадь полной повехрности цилиндра равна

$$S_{\text{цил.}} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$$

Найдем отношение площади полной поверхности цилиндра к площади поверхности шара:

$$\frac{S_{\text{шара.}}}{S_{\text{цил.}}} = \frac{4\pi R^2}{6\pi R^2} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad S_{\text{шара}} = \frac{2}{3} S_{\text{цил.}} = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

32. Куб описан около сферы радиуса 3. Найдите объем куба.



Ответ

216

Решение

Так как сфера вписана в куб, то сторона куба равна диаметру сферы. Следовательно, сторона куба равна $2 \cdot 3 = 6$. Тогда объем куба равен $6^3 = 216$.