15 задание из ЕГЭ

Что такое математическая модель и как получить минимум 1 балл на ЕГЭ

Перед вами задача, в которой описывается некоторый процесс и от вас требуется найти или максимизировать/минимизировать определенную величину. Для описания математической модели от вас требуется введение неизвестных, составление таблицы (желательно, например, в случае кредитов и вкладов), а также составление уравнений/неравенств/систем с вашими неизвестными, отражаемых то, что дано в условии и то, что требуется найти. Будет это — будет минимум 1 балл.

Пример математической модели

Клиент взял в банке некоторую сумму S руб. под 10% годовых. Каждый год после начисления процентов он должен выплатить банку определенную сумму денег в счет погашения задолженности. В первый год эта сумма составила 20% от изначальной, во второй — 45% от изначальной и еще 50 000 руб. В итоге по окончании второго платежа долг был погашен полностью. Найдите S.

► Составим таблицу.

Год	Долг до %	Долг после %	Выплата
1	S	$1,1S$	$0,2S$
2	$0,9S$	$1,1\cdot 0,9S$	$0,45S+50\,000$

Так как после второй выплаты долг полностью выплачен, то
$1,1\cdot 0,9S-0,45S+50\,000=0.$ ■

На этом этапе заканчивается построение математической модели (таблица + уравнение, из которого можно найти то, что требует задача). Даже если вы не решите уравнение, но запишете его, у вас будет 1 балл.

Кредитование: аннуитетная система

Вы взяли в кредит в банке некоторую сумму денег S под определенный процент годовых. Аннуитетные платежи – это такая система выплат, при которой кредит выплачивается ежегодно (ежемесячно) равными платежами x. При этом каждый год (месяц) банк начисляет на оставшуюся часть долга некоторый процент $r\%$, то есть оставшаяся сумма долга увеличивается в $p=1+0,01r$ раз. После этого уже клиент вносит платеж в счет погашения кредита.

Год	Долг до %	Долг после %	Выплата
1	S	pS	x
2	$S-x$	$p(S-x)$	x
3	$p(S-x)-x$	$p(p(S-x)-x)$	x
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Кредитование: дифференцированная система

Вы взяли в кредит определенную сумму денег S под определенный процент годовых. Дифференцированные платежи — это система выплат, при которой сумма долга уменьшается равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый год. При этом платежи каждый год разные.

Таким образом, если в кредит взято S на n лет под $r\%$ процентов годовых, это означает, что

- каждый год долг увеличивается на $k=0,01\cdot r$ часть от долга на начало текущего года;
- платежи состоят из двух частей: первая часть — это начисленные проценты, вторая — сумма S, разделенная на n равных частей. Тогда долг каждый год уменьшается на $\frac{1}{n}S$.

Год	Долг до %	Долг после %	Выплата
1	S	$S+k\cdot S$	$k\cdot S+\frac{1}{n}S$
2	$\frac{n-1}{n}S$	$\frac{n-1}{n}S+k\cdot\frac{n-1}{n}S$	$k\cdot\frac{n-1}{n}S+\frac{1}{n}S$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$\frac{1}{n}S$	$\frac{1}{n}S+k\cdot\frac{1}{n}S$	$k\cdot\frac{1}{n}S+\frac{1}{n}S$

Пример, где встречается

Клиент взял в банке кредит на некоторую сумму A рублей на 3 года под 15% годовых. Выплачивать кредит он должен ежегодными платежами так, чтобы каждый год сумма долга уменьшалась равномерно. Чему равно A, если оказалось, что в итоге он заплатил банку 390 000 рублей?

► Так как кредит взят на 3 года, значит после первой выплаты долг должен составлять $A-\frac{1}{3}A=\frac{2}{3}A$ рублей, после второй выплаты долг будет равен $\frac{2}{3}A-\frac{1}{3}A=\frac{1}{3}A$ рублей, а после последней третьей $\frac{1}{3}A-\frac{1}{3}A=0$.

Год	Сумма долга до начисл. %	Сумма долга после начисл. %	Выплата
1	A	$A+0,15A$	$0,15A+\frac{1}{3}A$
2	$\frac{2}{3}A$	$\frac{2}{3}A+0,15\cdot\frac{2}{3}A$	$0,15\cdot\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}A$
3	$\frac{1}{3}A$	$\frac{1}{3}A+0,15\cdot\frac{1}{3}A$	$0,5\cdot\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}A$

То, что клиент в итоге заплатил банку, есть не что иное, как сумма всех выплат по кредиту (еще говорят общая сумма выплат).

Будем складывать выплаты следующим образом: (сумма первых частей)+(сумма вторых частей).

$$\left(0,15A+0,15\cdot\frac{2}{3}A+0,15\cdot\frac{1}{3}A\right)+\left(\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}A\right)=390\,000\quad\Leftrightarrow$$

$$0,15A\cdot\underbrace{\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)}_{\text{сумма арифметической прогрессии}}+A=390\,000\quad\Leftrightarrow\quad A=300\,000.$$

■

Пример, где встречается

Клиент взял S млн рублей в банке под 10% годовых и должен погасить кредит через 4 года равными ежегодными платежами. Найдите отношение суммы, взятой в кредит, к ежегодному платежу.

► Обозначим ежегодный платеж за x млн рублей. После начисления процентов долг увеличивается в $1,1$ раз. Составим таблицу, отслеживающую долг

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после платежа
1	S	$1,1\cdot S$	$1,1\cdot S-x$
2	$1,1\cdot S-x$	$1,1(1,1\cdot S-x)$	$1,1(1,1\cdot S-x)-x$
3	$1,1(1,1\cdot S-x)-x$	$1,1(1,1(1,1\cdot S-x)-x)$	$1,1(1,1(1,1\cdot S-x)-x)-x$
4	$1,1(1,1(1,1\cdot S-x)-x)-x$	$1,1(1,1(1,1(1,1\cdot S-x)-x)-x)$	$1,1(1,1(1,1(1,1\cdot S-x)-x)-x)-x$

Так как в конце четвертого года кредит должен быть выплачен полностью, то это значит, что долг банку на конец четвертого года равен нулю.
То есть $1,1(1,1(1,1(1,1-x)-x)-x)-x=0$ или

$$1,1^4\cdot S-x\underbrace{(1,1^3+1,1^2+1,1+1)}_{\text{сумма геометрической прогрессии}}=0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{S}{x}=\frac{1,1^3+1,1^2+1,1+1}{1,1^4}$$

■

Банковский вклад

Вы положили в банк определенную сумму S денег. Банковский вклад — это некоторая сумма, переданная банку на хранение с целью получить доход в виде начисленных процентов. Раз в какой-то промежуток времени (в месяц, в квартал, в год и т.п.) банк начисляет на текущую сумму некоторое число $r\%$ процентов, то есть увеличивает находящуюся на счете сумму на $0,01r$ часть или в $(1+0,01r)$ раз. Раз в этот промежуток времени после начисления процентов клиент, как правило, имеет право доложить на счет любую сумму денег. Также клиент имеет право снимать со счета любую сумму (естественно, не превышающую имеющуюся). Время, когда он может это сделать, указывается в задаче.

Пример, где встречается

В январе 2014 года клиент положил в банк 30 000 рублей под 10%, которые банк начисляет раз в год в декабре. Сколько рублей будет на счете у клиента в январе 2017 года?

► То, что банк начисляет на текущую сумму 10%, значит, что после начисления процентов сумма будет составлять 110% от суммы, находящейся на счете до начисления процентов.

Год	Сумма до % (январь)	Сумма после % (декабрь)
2014	30 000	$1,1\cdot 30\,000$
2015	$1,1\cdot 30\,000$	$1,1^2\cdot 30\,000$
2016	$1,1^2\cdot 30\,000$	$1,1^3\cdot 30\,000$

Таким образом, в декабре 2016 года после начисления процентов на счете у клиента будет $1,1^3\cdot 30\,000$ рублей. Эта же сумма будет у него на счете и в январе 2017 года (так как проценты начисляются только в декабре).
Значит, ответом будет $1,1^3\cdot 30\,000=39\,930$ рублей. ■

Пример на смешанные платежи

15 января планируется взять кредит в банке на сумму 700 тыс.руб. на $(n+1)$ месяцев. Условия:

- 01 числа каждого месяца банк начисляет 1% на текущую сумму долга;
- до 14 числа каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- с 1-го по n-ый месяц выплаты должны быть таковы, чтобы долг уменьшался равномерно;
- 15 числа n-го месяца долг должен составить 300 тыс.руб;
- 15 числа $(n+1)$-го месяца кредит должен быть погашен полностью.

Найдите n, если общая сумма выплат составит 755 тыс.руб.

► Из условия следует, что с 1-го по n-ый месяц выплачено 400 т.р., причем равными долями. Следовательно, с 1-го по n-ый месяц долг равномерно уменьшался на $x=\frac{400}{n}$ т.р. Обозначим $p=0,01$, $S=700$ т.р.

Месяц	Долг до % 15 число	Долг после % 01 число	Выплата
1	S	$S+pS$	$pS+x$
2	$S-x$	$S-x+p(S-x)$	$p(S-x)+x$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$S-(n-1)x$	$S-(n-1)x+p(S-(n-1)x)$	$p(S-(n-1)x)+x$
$n+1$	300	$300+300p$	$300p+300$

Если сложить вторые слагаемые всех выплат: $nx+300$, получим сумму, взятую в кредит, то есть $nx+300=700$. Тогда сумма первых слагаемых выплат равна переплате по кредиту, то есть 55 т.р. Первые n слагаемых образуют арифметическую прогрессию, где $a_1=pS$, $d=-px$. Следовательно, получаем уравнение для переплаты

$$(pS+(pS-px)+\ldots+(pS-(n-1)px)+300p=55$$

Все до этой черты образует математическую модель, дающую 1 балл на ЕГЭ.

Решаем уравнение:

$$\frac{pS+pS-(n-1)px}{2}\cdot n+300p=55\,\Big|\cdot 2\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 2npS-n(n-1)px=110-600p=110-6=104\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\cdot 0,01\cdot 700n-n(n-1)\cdot 0,01\cdot\frac{400}{n}=104\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 10n=100\quad\Leftrightarrow\quad n=10$$

Ответ: 10. ■

Типичные ошибки. Рекомендации

- При введении неизвестной, обозначающей процент, писать $r=10\%=0,1$, или использовать в таблице r как $0,1$, когда в условии было сказано $r=10\%$, или при решении получить $r=0,1$, а в ответ записать $r=10\%$ — все это неверно.
- Если в задаче дано A рублей, $r\%$ и т.п. и просят найти A или r, то ответ должен быть представлен в виде числа без единицы изменения (без слова “рублей” или знака %).
- Будет ошибкой использовать без вывода формулы, не представленные в официальных учебниках. Выводить формулы для аннуитетной и дифференцированной системы выплат, демонстрировать арифметическую или геометрическую прогрессии, если они есть, и т.п.
- Рекомендуют оформлять изменения, происходящие с суммой долга/вклада с помощью таблицы. Столбцы подписывать так, чтобы было понятно проверяющим. Названия столбцов видны на примерах.
- В задачах не может быть никакого округления значений переменных, если об этом не сказано в условии. Поэтому, если вы, например, получили нецелое число лет n — ищите у себя ошибку либо в самой модели, либо арифметического характера.
- Некоторые проценты в девятичном виде удобнее использовать в виде рациональной дроби. Например, 25% как $\frac{1}{4}$, $12,5\%$ как $\frac{1}{8}$, 20% как $\frac{1}{5}$.
- Не ленитесь использовать слова, объясняющие ваши действия при решении: “чтобы найти переплату, нужно из суммы всех платежей вычесть сумму, взятую в кредит”; “здесь мы получили сумму арифметической прогрессии, я буду вычислять ее по такой-то формуле” и т.д.
- Если в задаче нестандартная кредитная схема и даны значения долга, которые он должен принимать в начале каждого года (до начисления процентов), то составляя таблицу, столбец выплат заполняйте в последнюю очередь как разность долга с начисленными процентами и суммы, которую должен составить долг после платежа.

Пример на задачу с таблицей

15-го января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн рублей. Условия:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r\in\mathbb{Z}$ процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять сумму в соответствии с таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн руб)	1	$0,9$	$0,8$	$0,7$	$0,6$	$0,5$	0

Найдите наименьшее r, при котором общая сумма выплат будет больше $1,2$ млн рублей.

► Процентная ставка равна $r\%$, значит, после каждого начисления процентов долг становится на $0,01r$ часть больше: был S — станет $S+0,01rS$. Следовательно, можно составить стандартную таблицу.

Месяц	Долг на 15 число	Долг на 1 число	Выплата
1	1	$1+0,01r$	$0,01r+0,1$
2	$0,9$	$0,9+0,01r\cdot 0,9$	$0,01r\cdot 0,9+0,1$
3	$0,8$	$0,8+0,01r\cdot 0,8$	$0,01r\cdot 0,8+0,1$
4	$0,7$	$0,7+0,01r\cdot 0,7$	$0,01r\cdot 0,7+0,1$
5	$0,6$	$0,6+0,01r\cdot 0,6$	$0,01r\cdot 0,6+0,1$
6	$0,5$	$0,5+0,01r\cdot 0,5$	$0,01r\cdot 0,5+0,5$

Сложим все платежи: первые слагаемые отдельно, вторые – отдельно:

$$0,01r\cdot(1+0,9+0,8+0,7+0,6+0,5)+(5\cdot 0,1+0,5)>1,2$$

Все до этой черты образует математическую модель, дающую 1 балл на ЕГЭ.

Решим неравенство.

$$0,01r\cdot 4,5+1>1,2\quad\Leftrightarrow\quad r>\frac{40}{9}\quad\Rightarrow\quad r\geqslant 5$$

Ответ: 5. ■

Арифметическая и геометрическая прогрессии

Арифметическая прогрессия — это последовательность чисел $\{a_n\}$, члены которой связаны следующим соотношением: $a_n=a_{n-1}+d$, где число d называется разностью арифметической прогрессии.

- $a_n=a_1+(n-1)d$
- $a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n$
- $a_{n-k}+a_{n+k}=2a_n$
- $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$
- $S_n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрическая прогрессия — это последовательность чисел $\{b_n\}$, члены которой связаны соотношением $b_n=b_{n-1}\cdot q$, где число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

- $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$
- $\sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}}=b_n\quad(b_i\geqslant 0)$
- $\sqrt{b_{n-k}\cdot b_{n+k}}=b_n\quad(b_i\geqslant 0)$
- $S_n=\dfrac{b_n\cdot q-b_1}{q-1}$
- $S_n=\dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$

Алгоритм решения задач на оптимизацию

1. Выделить неизвестные переменные x и y, определить их множества значений, если это возможно (целые, натуральные, принадлежат некоторому отрезку, не превосходят некоторого числа и т.п.)
2. Определить зависимость между этими неизвестными (зачастую это уравнение). Зависимость как правило можно будет использовать, чтобы выразить одну неизвестную через другую.
3. Составить уравнение с этими неизвестными и тем параметром a, наибольшее или наименьшее значение которого надо найти: $F(a,x,y)=0$.
4. Если на шаге 2 вы выразили одну переменную через другую, например, y через x: $y=y(x)$, и получили уже уравнение $F(a,x)=0$, то можно
   - исследовать его в таком виде как уравнение с неизвестной x и параметром a, обязательно указав, что должно выполняться для этого уравнения;
   - выразить a через x и получить функцию $a=a(x)$. Указать область ее определения. Найти ее максимум/минимум или наибольшее/наименьшее значение одним из знакомых вам способов.

Задать математическую модель в задачах на оптимизацию значит выполнить все шаги этого алгоритма с единственной поблажкой: возможностью не исследовать полученное уравнение или функцию и не доводить вычисления до конца.

Рекомендации

1. Вводить неизвестные и обязательно указывать их области значений.
2. Вводить неизвестную величину (параметр), неибольшее/наименьшее значение которой требуется найти, и составлять с ней и имеющимися неизвестными уравнение/неравенство/систему с указанием, к каким действиям с этими данными сводится решение задачи.
3. Если вы рассматриваете функцию $f(x)$, наибольшее/наименьшее значение которой требуется найти, указывайте ее область определения.
4. Используйте свойства простых функций типа квадратичной функции либо производную для исследования более сложных функций (например, часто встречается функция вида $f(x)=ax+b\sqrt{c-dx^2}$). Поэтому повторите решение иррациональных уравнений и неравенств. Вспомните всё о производной сложной функции.
5. Исследуйте функцию, сразу учитывая ее область определения, которая зачастую в рамках задачи уже, чем могла бы быть.
6. Аргументируйте, почему та или иная точка является точкой максимума/минимума или то или иное значение функции является наибольшим/наименьшим.
7.

Построение математической модели

Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Владимир платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе — 300 рублей.

Владимир готов выделять 1200000 рублей на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

► Пусть на первом заводе трудятся x^2 часов, на втором трудятся y^2 часов. Тогда в неделю будет произведено $(x+y)$ ед. товара при затратах $500x^2+300y^2=1\,200\,000$ * (что дано по условию).

Требуется найти наибольшее значение параметра $a=x+y$, равное числу произведенных единиц товара в неделю.

Переменные $a,x,y\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ (целые неотрицательные).

1 способ Из $a=x+y$ находим $y=a-x$ и подставляем в *:

$$500x^2+300(a-x)^2=1\,200\,000 \quad\Leftrightarrow$$
$$8x^2-6ax+3a^2-12\,000=0\ ^{\star\star}$$

Задача сводится к тому, чтобы найти наибольшее целое неотрицательное значение параметра a, при котором полученное квадратное относительно x уравнение имеет решение $x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, при котором существует $y=a-x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Математическая модель описана.

Продолжим решение. Уравнение ** имеет решения, если:

$$D=-64a^2+32\cdot 12\,000\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad -80\leqslant a\leqslant 80$$

При $a_{max}=80$ получаем $x=30$, $y=50$. Все требования выполнены.

2 способ Из $5x^2+3y^2=12\,000$ выразим $y=\sqrt{4\,000-\frac{5}{3}x^2}$ (так как $y\geqslant 0$) и подставим в $a=x+y$:

$$a=a(x)=x+\sqrt{4\,000-\frac{5}{3}x^2}$$

Получили функцию от одной неизвестной, наибольшее целое неотрицательное значение которой требуется найти, достигаемое при $x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, при котором также $y\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Область определения функции, учитывая $x\geqslant 0$:

$$4\,000-\frac{5}{3}x^2\geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad 0\leqslant x\leqslant 20\sqrt{6}$$

Математическая модель описана.

Продолжим решение. Исследуем функцию $a=a(x)$ через производную:

$$a'(x)=1-\frac{5x}{36\,000-15x^2}=0 \quad\Rightarrow\quad x=30$$

Поэтому на области определения при $x\in[0;30)$ имеем $a'(x)>0$, при $x\in(30;20\sqrt{6})$ имеем $a'(x)<0$. Следовательно, $x=30$ — точка максимума, значит, $a_{\text{наиб}}=a(30)=80$. При $x=30$ получаем $y=50$. Требования к областям значений всех переменных соблюдены.

Ответ: 80. ■

Пример задачи с квадратичной функцией, ЕГЭ, 2019

Строительство нового завода стоит 159 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2+2x+6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-(0,5x^2+2x+6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p=10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

► Найдем такое количество производимой продукции x, при котором прибыль фирмы будет наибольшей при фиксированном p. Для этого нам нужно найти максимум прибыли, равной

$$PR=px-(0,5x^2+2x+6)$$

Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned}px-(0,5x^2+2x+6)&=-0,5x^2+(p-2)x-6=\\&=-0,5(x^2-2(p-2)x+12)=\\&=-0,5(x^2-2(p-2)x+(p-2)^2-(p-2)^2+12)=\\&=-0,5(x-p+2)^2+0,5(p-2)^2-6.\end{aligned}$$

Заметим, что $-0,5(x-p+2)^2\leqslant 0$, поэтому

$$-0,5(x-p+2)^2+0,5(p-2)^2-6\leqslant 0,5(p-2)^2-6$$

Значит, максимальное значение выражения $Pr=px-(0,5x^2+2x+6)$ равно $Pr_{max}=0,5(p-2)^2-6$ и достигается при $x-p+2=0$, откуда $x_0=p-2$. То есть за каждый год фирма будет зарабатывать $Pr_{max}=0,5(p-2)^2-6$ млн рублей.

1 год $p=10$. Тогда прибыль фирмы за этот год составит $Pr_{max}(10)=0,5(10-2)^2-6=26<159$ млн рублей.

2 год $p=11$. Прибыль фирмы за второй год составит $Pr_{max}(11)=0,5(11-2)^2-6=34,5$ млн рублей. Значит, за первые два года фирма заработает $26+34,5=60,5<159$ млн рублей.

3 год $p=12$. Прибыль фирмы за третий год $Pr_{max}(12)=0,5(12-2)^2-6=44$ млн рублей. Значит, за первые три года фирма заработает $60,5+44=104,5$ млн рублей.

4 год $p=13$. Прибыль фирмы за четвертый год $Pr_{max}(13)=0,5(13-2)^2-6=54,5$ млн рублей. Всего за первые четыре года фирма заработает $104,5+54,5=159$ млн рублей.

Значит, строительство окупится за 4 года. ■