Неравенства

Свойства неравенств

1. Если числа a и b такие, что $a < b$, то $b > a$, и, если $a > b$, то $b < a$.
2. Если числа a, b и c таковы, что $a < b$ и $b < c$, то $a < c$, и, если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
3. Если $a < b$ и c – любое число, то $a+c < b+c$.
4. Если для чисел a и b выполняется неравенство $a < b$ и c – положительное число, то $a \cdot c < b \cdot c$, если c – отрицательное число, то $a \cdot c > b \cdot c$.

Следствия

1. Если $a < b$, то $-a > -b$.
2. Если a и b – положительные числа, при этом $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
3. Если для чисел a, b, c и d справедливы неравенства $a < b$ и $c < d$, то верным является и числовое неравенство $a + c < b + d$.
4. Если $a < b$ и $c < d$, где a, b, c и d – положительные числа, справедливо числовое неравенство $a \cdot c < b \cdot d$.

Области допустимых значений (ОДЗ) для различных функций

1. Если $\frac{1}{g(x)} = 0$, то ОДЗ: $g(x) \neq 0$;

2. Для $\log_{g(x)} f(x)$, получим ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$

3. $\sqrt[2n]{f(x)}$, ОДЗ: $f(x) \geq 0$, где $n \in N$.

4. $y = \arcsin(x)$, $y = \arccos(x)$, ОДЗ $-1 \leq x \leq 1$

5. *Есть две функции, которые содержат "скрытую" дробь:*

$$tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \cos x \neq 0;$$

$$ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \sin \neq 0.$$

Метод интервалов

Рациональным называется всякое неравенство, сводящееся к неравенству вида: $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или вида $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, где P(x), Q(x) — некоторые многочлены. Для решения рациональных неравенств удобно применять метод интервалов.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) * Q(x) > 0$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) * Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим пример (Задание 15, РЕШУ ЕГЭ)

$$\log_2 16x \geq \log_{0,5x} 2 * \log_4 16x^4$$

Найдем ОДЗ.

$$\begin{cases} 16x > 0, \\ 16x^4 > 0, \\ 0{,}5x > 0, \\ 0{,}5x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x\epsilon(0; 2) \cup (2; +\infty).$$

Упростим все до логарифма с основанием 2

$$4 + \log_2 x \geq \frac{2 + 2\log_2 x}{\log_2 \frac{x}{2}};$$

$$4 + \log_2 x - \frac{2 + 2\log_2 x}{\log_2 x - 1} \geq 0;$$

$$\frac{4\log_2 x - 4 + \log_2^2 x - \log_2 x - 2 - 2\log_2 x}{\log_2 x - 1} \geq 0;$$

$$\frac{\log_2^2 x + \log_2 x - 6}{\log_2 x - 1} \geq 0.$$

Воспользуемся теоремой Виета для разложения числителя на множители, получим:

$$\frac{(\log_2 x + 3)(\log_2 x - 2)}{\log_2 x - 1} \geq 0;$$

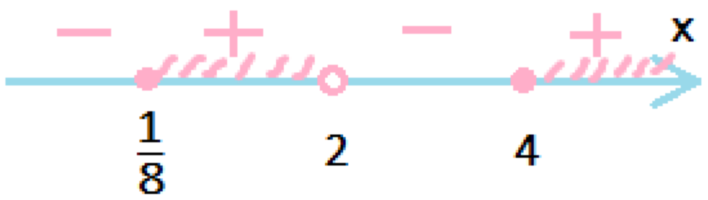
Найдем нули каждой скобки и заменим неравенство на эквивалентное.

$$\frac{(x-4)(x-8)}{x-2} \geq 0;$$

Применим метод интервалов, заменив неравенство на эквивалентную систему.

$$\begin{cases} (x-4)\left(x-\frac{1}{8}\right)(x-2) \geq 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Покажем нули на числовой прямой и найдем решение.



Учтем ОДЗ $x \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$ и получим ответ

$$\boldsymbol{x \in \left[\frac{1}{8}; 2\right) \cup [4; +\infty).}$$

Метод замены переменной

Если неравенство *F (x) > 0* приводится к виду *f (g(x)) > 0* , то можно ввести новую переменную *g(x) = a*, решить неравенство *f (a) > 0* относительно переменной *a* и, затем, решить полученные неравенства с первоначальной переменной *x*.

Рассмотрим на примере (Задание 15, РЕШУ ЕГЭ)

$$\frac{2-(x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1}-1} \le -0{,}2$$

Введем замену $t = \frac{1}{x-6}$, получим

$$\frac{2-t}{5t-1} \le -0{,}2;$$

$$\frac{2-t+t-0{,}2}{5t-1} \le 0;$$

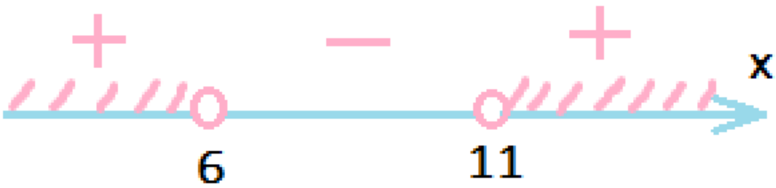
$$\frac{1{,}8}{5t-1} \le 0;$$

$$t < \frac{1}{5}.$$

Вернемся обратной замене $t = \frac{1}{x-6}$,

$$\frac{1}{x-6} < \frac{1}{5};$$

$$\frac{x-11}{x-6} < 0.$$



Ответ $\boldsymbol{x} \in (-\infty; \mathbf{6}) \cup (\mathbf{11}; +\infty)$.

Метод рационализации

Метод рационализации — это весьма мощная процедура, позволяющая в определённых случаях упростить неравенство и свести его к рациональному неравенству (которое решается методом интервалов).

Метод рационализации для решения показательных неравенств вида

$$\left(h(x)\right)^{f(x)} \geq \left(h(x)\right)^{g(x)}$$

Если бы мы решали данное неравенство классическим способом, то оно было бы равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) \neq 1, \\ h(x) > 1, \\ f(x) \geq g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) \leq g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

По методу рационализации данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} (h(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

Метод рационализации применим для 15-го задания

$2^{x^2} \leq 64 * 2^{x}$;

$2^{x^2} \leq 2^{x+6}$;

Применяя метод рационализации, получаем:

$(2-1)*\left(x^2-(x+6)\right)\le 0;$

$(x-3)(x+2)\le 0.$

Ответ $\boldsymbol{x\,\epsilon[-2;3]}$.

Метод рационализации для решения логарифмических неравенств вида

$$\log_{h(x)} f(x)\ge \log_{h(x)} g(x)$$

Если бы мы решали данное неравенство классическим способом, то оно было бы равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} h(x)>1,\\ f(x)\ge g(x),\\ g(x)>0,\end{cases}\\ \begin{cases} 0<h(x)<1,\\ f(x)\le g(x),\\ f(x)>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

По методу рационализации данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}(h(x)-1)*(f(x)-g(x))\ge 0,\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ h(x)>0,\\ h(x)\ne 1.\end{cases}$$

Если *f(x),h(x),g(x)* — многочлены (что бывает очень часто в задачах), то метод рационализации позволяет перейти от показательного или логарифмического неравенства к рациональному, которое уже легко решается методом интервалов.

Рассмотрим еще один пример, показывающий удобство использования метода рационализации

$$\log_{x^2+x}(x^2-2x+1)\le 1$$

Найдем ОДЗ.

$$\begin{cases} x^2+x>0,\\ x^2+x\ne 1,\\ x^2-2x+1>0.\end{cases}$$

$x\epsilon(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;+\infty);\ x\ne \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$

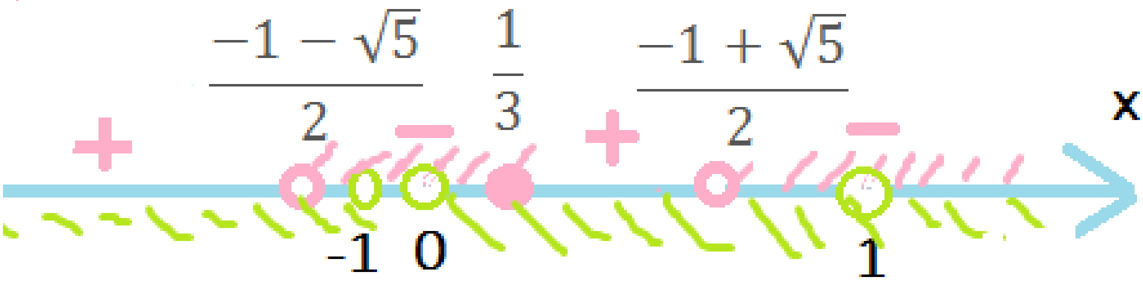
Представим $1=\log_{x^2+x}x^2+x$, тогда получим неравенство

$$\log_{x^2+x}(x^2-2x+1)\le \log_{x^2+x}x^2+x$$

Применим метод рационализации

$(x^2+x-1)(x^2-2x+1-x^2-x)\le 0,$

$\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)*\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)*(1-3x)\le 0,$



Ответ

$$\boldsymbol{x\epsilon\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-1\right)\cup\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right)\cup(1;+\infty).}$$

Метод рационализации *для неравенств с модулями*

Неравенство типа $|f(x)|-|g(x)|>0$, равносильно неравенству $\big(f(x)-g(x)\big)*\big(f(x)+g(x)\big)>0$.

Пример

$$|x^2-8x+15|\geq|x^2+2x-15|$$

Воспользуемся методом рационализации для решения данного неравенства. Заменим его равносильным и более простым неравенством:

$(x^2-8x+15-x^2-2x+15)*(x^2-8x+15+x^2+2x-15)\geq 0;$

$(-10x+30)*(2x^2-6x)\geq 0.$

Из первой скобки вынесем множитель -10, а из второй — множитель $2x$ и разделим обе части неравенства на -20, поменяв при этом его знак:

$x(x-3)^2\leq 0;$

Видно, что выражение слева может быть меньше нуля только при $x < 0$ (так как второй множитель всегда не отрицателен, ибо является полным квадратом), а равно нулю при $x = 0$ или $x = 3$.

Итак, окончательный ответ к данному неравенству

$$x\epsilon(-\infty; 0] \cup \{3\}.$$