

#методички

# проФиматика

возможно, самый понятный  
канал по математике

## Задача 13 Ященко 2023



1

В основании пирамиды  $SABCD$  лежит трапеция  $ABCD$  с большим основанием  $AD$ . Диагонали пересекаются в точке  $O$ . Точки  $M$  и  $N$  – середины боковых сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $M$  и  $N$  параллельно прямой  $SO$ .

- Докажите, что сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$  является трапецией.
- Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если  $AD = 9$ ,  $BC = 7$ ,  $SO = 6$ , а прямая  $SO$  перпендикулярна прямой  $AD$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ [Видеоразбор задачи](#)



2

В основании пирамиды  $SABCD$  лежит трапеция  $ABCD$  с большим основанием  $AD$ . Диагонали пересекаются в точке  $O$ . Точки  $M$  и  $N$  – середины боковых сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $M$  и  $N$  параллельно прямой  $SO$ .

- Докажите, что сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$  является трапецией.
- Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если  $AD = 8,5$ ,  $BC = 7,5$ ,  $SO = 6,5$ , а прямая  $SO$  перпендикулярна прямой  $AD$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ [Видеоразбор задачи](#)



3

В прямой пятиугольной призме  $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$  высота  $AA_1$  равна  $3\sqrt{5}$ ,  $BC = CD = 6$ , а четырехугольник  $ABDE$  – прямоугольник со сторонами  $AB = 5$  и  $AE = 4\sqrt{5}$ .

- Докажите, что плоскости  $CA_1E_1$  и  $AED_1$  перпендикулярны.
- Найдите объем многогранника  $CAED_1B_1$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ [Видеоразбор задачи](#)



4

В прямой пятиугольной призме  $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$  высота  $AA_1$  равна  $2\sqrt{3}$ , треугольник  $BCD$  – правильный, со стороной 6, а четырехугольник  $ABDE$  – равнобедренная трапеция со сторонами  $AB = DE = 2$ ,  $BD = 6$  и  $AE = 4$ .

- Докажите, что плоскости  $CA_1E_1$  и  $AED_1$  перпендикулярны.
- Найдите объем многогранника  $CAED_1B_1$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



5

В правильную треугольную пирамиду с боковым ребром  $\sqrt{13}$  и стороной основания 6 вписан шар. Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна высоте пирамиды и проходит через ее середину.

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  и шар пересекаются более чем в одной точке.
- Найдите площадь сечения шара плоскостью  $\alpha$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



6

В правильную треугольную пирамиду с боковым ребром 4 и стороной основания  $2\sqrt{3}$  вписан шар. Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна высоте пирамиды и проходит через ее середину.

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  и шар не имеют общих точек.
- Найдите расстояние от центра шара до плоскости  $\alpha$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



7 Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  относится к боковому ребру как  $1 : \sqrt{2}$ . Через вершину  $D$  проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная боковому ребру  $SB$  и пересекающая его в точке  $M$ .

а) Докажите, что  $M$  – середина  $SB$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $AC$  и  $DM$ , если высота пирамиды равна  $6\sqrt{3}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



8 Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  относится к боковому ребру как  $1 : \sqrt{2}$ . Через вершину  $D$  проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная боковому ребру  $SB$  и пересекающая его в точке  $M$ .

а) Докажите, что сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$  – это четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны.

б) Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 6.

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



9 Грань  $ABCD$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  является вписанной в основание конуса, а сечением конуса плоскостью  $A_1B_1C_1$  является круг, вписанный в четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$ .

а) Высота конуса равна  $h$ , ребро куба равно  $a$ . Докажите, что  $3a < h < 3,5a$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $SA_1D$ , где  $S$  – вершина конуса.

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



**10** Грань  $ABCD$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является вписанной в основание конуса, а сечением конуса плоскостью  $A_1 B_1 C_1$  является круг, вписанный в четырехугольник  $A_1 B_1 C_1 D_1$ ;  $AB = a$ ,  $AA_1 = \sqrt{2}a$ .

- а) Высота конуса равна  $h$ . Докажите, что  $4,5a < h < 5a$ .  
б) Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $SD_1C$ , где  $S$  – вершина конуса.

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



**11** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 16, высота  $SH$  равна 10. Точка  $K$  – середина бокового ребра  $SA$ . Плоскость, параллельная плоскости  $ABC$ , проходит через точку  $K$  и пересекает ребра  $SB$  и  $SC$  в точках  $Q$  и  $P$  соответственно.

- а) Докажите, что площадь четырехугольника  $BSPQ$  составляет  $\frac{3}{4}$  площади треугольника  $SBC$ .  
б) Найдите объем пирамиды  $KBCPQ$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



**12** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AD$  равна 10, высота  $SH$  равна 12. Точка  $K$  – середина бокового ребра  $SD$ . Плоскость  $AKB$  пересекает боковое ребро  $SC$  в точке  $P$ .

- а) Докажите, что площадь треугольника  $CDKP$  составляет  $\frac{3}{4}$  площади треугольника  $SCD$ .  
б) Найдите объем пирамиды  $ACDKP$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



**13** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  на ребрах  $AC$  и  $BC$  отмечены соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM : MC = CN : BN = 2 : 1$ .

- а) Докажите, что плоскость  $MNB_1$  проходит через середину ребра  $A_1C_1$ .  
б) Найдите площадь сечения призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостью  $MNB_1$ , если  $AB = 6$ ,  $AA_1 = \sqrt{3}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ [Видеоразбор задачи](#)



**14** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  на ребрах  $AC$  и  $BC$  отмечены соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM : MC = CN : BN = 2 : 1$ , точка  $K$  – середина ребра  $A_1C_1$ .

- а) Докажите, что плоскость  $MNK$  проходит через вершину  $B_1$ .  
б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $KMN$ , если  $AB = 6$ ,  $AA_1 = 2,4$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ [Видеоразбор задачи](#)



**15** В правильной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с основанием  $ABCD$  боковое ребро равно  $\sqrt{3}$ , а сторона основания равна 2. Через точку  $A_1$  перпендикулярно плоскости  $AB_1 D_1$  проведена прямая  $l$ .

- а) Докажите, что прямая  $l$  пересекает отрезок  $AC$  и делит его в отношении 3 : 1.  
б) Найдите угол между прямыми  $l$  и  $CB_1$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ [Видеоразбор задачи](#)



16

В правильной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с основанием  $ABCD$  боковое ребро равно 2, а сторона основания равна  $\sqrt{6}$ . Через точку  $A_1$  перпендикулярно плоскости  $AB_1 D_1$  проведена прямая  $l$ .

- а) Докажите, что прямая  $l$  пересекает отрезок  $AC$  и делит его в отношении 2 : 1.  
б) Найдите угол между прямыми  $l$  и  $CD_1$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ [Видеоразбор задачи](#)



17

Основание пирамиды  $SABC$  – прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$ . Высота пирамиды проходит через точку  $B$ .

- а) Докажите, что середина ребра  $SA$  равноудалена от вершин  $B$  и  $C$ .  
б) Найдите угол между плоскостью  $SBC$  и прямой, проходящей через середины ребер  $BC$  и  $SA$ , если известно, что  $BS = AC$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ [Видеоразбор задачи](#)



18

Основание пирамиды  $SABC$  – прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$ . Высота пирамиды проходит через точку  $B$ .

- а) Докажите, что середина ребра  $SA$  равноудалена от вершин  $B$  и  $C$ .  
б) Найдите угол между плоскостью  $SBC$  и прямой, проходящей через середины ребер  $BC$  и  $SA$ , если известно, что  $BS = 2AC$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ [Видеоразбор задачи](#)



**19** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  точка  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $AB = AA_1$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $K$  и  $B_1$  параллельно прямой  $BC_1$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $A_1C_1$  в отношении  $1 : 2$ .
- Найдите расстояние от точки  $A_1$  до плоскости  $\alpha$ , если  $AB = 6$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ [Видеоразбор задачи](#)



**20** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  точки  $K$  и  $N$  – соответственно середины ребер  $AA_1$  и  $AC$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $K$  и  $B_1$  параллельно прямой  $CB_1$ .

- Докажите, что сечением призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскость  $\alpha$  является равнобедренная трапеция.
- Найдите угол между прямой  $CC_1$  и плоскостью  $\alpha$ , если  $AB = 4$ ,  $AA_1 = \sqrt{3}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ [Видеоразбор задачи](#)



**21** В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  сторона основания  $AB$  равна 2, а боковое ребро  $SA$  равно 8. Точка  $M$  – середина ребра  $AB$ . Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $ABC$  и содержит точки  $M$  и  $D$ . Прямая  $SC$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $K$ .

- Докажите, что  $KM = KD$ .
- Найдите объём пирамиды  $CDKM$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ [Видеоразбор задачи](#)





22

В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 8$  и  $BC = 6$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = \sqrt{21}$ ,  $SB = \sqrt{85}$ ,  $SD = \sqrt{57}$ .

- Докажите, что  $SA$  – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямыми  $SC$  и  $BD$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



23

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $SA$  равно  $\sqrt{21}$ . На ребрах  $AB$  и  $SB$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причем  $AM = 4$ ,  $SK : KB = 1 : 3$ .

- Докажите, что плоскость  $CKM$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .
- Найдите объем пирамиды  $BCKM$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



24

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 8, а боковое ребро  $SA$  равно 7. На ребрах  $AB$  и  $SB$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причем  $AM = 2$ ,  $SK = 1$ . Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $ABC$  и содержит точки  $M$  и  $K$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  содержит точку  $C$ .
- Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



25

В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  сторона основания  $AB$  равна 4, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $5\sqrt{3}$ . На ребре  $DD_1$  отмечена точка  $M$  так, что  $DM : MD_1 = 3 : 2$ . Плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $A_1 F_1$  и проходит через точки  $M$  и  $E$ .

- а) Докажите, что сечение призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  плоскостью  $\alpha$  – равнобедренная трапеция.
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка  $F$ , а основанием – сечение призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  плоскостью  $\alpha$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



26

В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $5\sqrt{3}$ . На ребре  $DD_1$  отмечена точка  $M$  так, что  $DM : MD_1 = 2 : 3$ . Плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $A_1 F_1$  и проходит через точки  $M$  и  $E$ .

- а) Докажите, что сечение призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  плоскостью  $\alpha$  – равнобедренная трапеция.
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка  $F$ , а основанием – сечение призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  плоскостью  $\alpha$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



27

В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания  $AB$  равна  $2\sqrt{3}$ , а боковое ребро  $AA_1$  равно 3. На рёбрах  $A_1 D_1$  и  $DD_1$  отмечены соответственно точки  $K$  и  $M$  так, что  $A_1 K = KD_1$ , а  $DM : MD_1 = 2 : 1$ .

- а) Докажите, что прямые  $MK$  и  $BK$  перпендикулярны.
- б) Найдите угол между плоскостями  $BMK$  и  $BCC_1$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.



⇒ Видеоразбор задачи

**28** В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания  $AB$  равна 3, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $\sqrt{3}$ . На рёбрах  $C_1 D_1$  и  $DD_1$  отмечены соответственно точки  $K$  и  $M$  так, что  $D_1 K = KC_1$ , а  $DM : MD_1 = 1 : 3$ .

- Докажите, что прямые  $MK$  и  $BK$  перпендикулярны.
- Найдите угол между плоскостями  $BMK$  и  $ABB_1$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.



⇒ Видеоразбор задачи

**29** В правильной восьмиугольной призме  $ABCDEFGH A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1$  сторона основания  $AB$  равна  $3\sqrt{2}$ , а боковое ребро  $AA_1$  равно 6. На ребре  $CC_1$  отмечена точка  $M$  так, что  $CM : MC_1 = 1 : 2$ . Плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $H_1 E_1$  и проходит через точки  $M$  и  $A$ .

- Докажите, что сечение данной призмы плоскостью  $\alpha$  – равнобедренная трапеция.
- Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка  $F_1$ , а основанием – сечение данной призмы  $ABCDEFGH A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1$  плоскостью  $\alpha$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.



⇒ Видеоразбор задачи

**30** Радиус основания конуса равен 12, а высота конуса равна 5.

- Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и взаимно перпендикулярные образующие.
- Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания конуса.

Ответ: \_\_\_\_\_.



⇒ Видеоразбор задачи

**31** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $SA$  равно 7. На ребрах  $AB$  и  $SC$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причем  $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $KM$  и параллельна прямой  $BC$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $SA$ .
- Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $SBC$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



**32** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 4, а боковое ребро  $SA$  равно 5. На ребре  $SC$  отмечена точка  $K$ , причем  $SK : KC = 1 : 3$ . Плоскость  $\alpha$  содержит точку  $K$  и параллельна плоскости  $SAD$ .

- Докажите, что сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$  – трапеция.
- Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка  $S$ , а основанием – сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



**33** В правильной треугольной усечённой пирамиде  $ABCA_1B_1C_1$  площадь нижнего основания  $ABC$  в четыре раза больше площади меньшего основания  $A_1B_1C_1$ . Через ребро  $AC$  проведена плоскость  $\alpha$ , которая пересекает ребро  $BB_1$  в точке  $K$  и делит пирамиду на два многогранника равного объёма.

- Докажите, что точка  $K$  делит ребро  $BB_1$  в отношении  $7 : 1$ , считая от точки  $B$ .
- Найдите площадь сечения усечённой пирамиды плоскостью  $\alpha$ , если высота пирамиды равна  $2\sqrt{2}$ , а ребро меньшего основания равно  $2\sqrt{6}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



34

В правильной треугольной усечённой пирамиде  $ABCA_1B_1C_1$  площадь нижнего основания  $ABC$  в четыре раза больше площади меньшего основания  $A_1B_1C_1$ . Через ребро  $AB$  проведена плоскость  $\alpha$ , которая пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $N$  и делит пирамиду на два многогранника равного объёма.

- Докажите, что точка  $N$  делит ребро  $CC_1$  в отношении  $5 : 13$ , считая от точки  $C$ .
- Найдите площадь сечения усечённой пирамиды плоскостью  $\alpha$ , если высота пирамиды равна  $13$ , а ребро меньшего основания равно  $3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



35

Основанием пирамиды  $FABC$  является правильный треугольник  $ABC$  со стороной  $36$ . Все боковые рёбра пирамиды равны  $30$ . На рёбрах  $FB$  и  $FC$  отмечены соответственно точки  $K$  и  $N$  так, что  $BK = CN = 20$ . Через точки  $K$  и  $N$  проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная плоскости  $ABC$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $AM$  в отношении  $2 : 7$ .
- Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $\alpha$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



36

Основанием пирамиды  $FABC$  является правильный треугольник  $ABC$  со стороной 48. Все боковые рёбра пирамиды равны 40. На рёбрах  $FB$  и  $FC$  отмечены соответственно точки  $K$  и  $N$  так, что  $FK = FN = 10$ . Через точки  $K$  и  $N$  проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная плоскости  $ABC$ .

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $AM$  в отношении  $1 : 3$ .  
б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\alpha$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

⇒ Видеоразбор задачи



Ответы:

1. б) 24
2. б) 26
3. б) 180
4. б) 40
5. б)  $(2\sqrt{3} - 3,25)\pi$
6. б)  $\frac{7\sqrt{3} - \sqrt{39}}{6}$
7. б) 3
8. б)  $6\sqrt{3}$
9. б)  $\operatorname{arctg}(\sqrt{6} + 2\sqrt{3})$
10. б)  $\operatorname{arctg}(2\sqrt{6} + 2\sqrt{3})$
11. б)  $80\sqrt{3}$
12. б) 150
13. б)  $5\sqrt{3}$
14. б)  $1\frac{11}{13}$
15. б)  $\arccos \frac{2\sqrt{210}}{35}$
16. б)  $\arccos \frac{2\sqrt{210}}{35}$
17. б)  $45^\circ$
18. б)  $\operatorname{arctg} 0,5$
19. б)  $0,3\sqrt{30}$
20. б)  $\operatorname{arctg} 2$
21. б)  $\frac{9\sqrt{5}}{4}$
22. б)  $\arccos \frac{14}{55}$
23. б)  $\frac{9\sqrt{3}}{4}$
24. б)  $\frac{30\sqrt{17}}{7}$

25. б) 36

26. б) 189

27. б)  $45^\circ$

28. б)  $\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{21}}{7}$

29. б)  $36 + 30\sqrt{2}$

30. б)  $\frac{5\sqrt{119}}{13}$

31. б)  $\arccos \frac{31\sqrt{10}}{140}$

32. б)  $\frac{5\sqrt{17}}{8}$

33. б)  $13\sqrt{6}$

34. б) 48,5

35. б)  $4\sqrt{3}$

36. б)  $6\sqrt{3}$