#методички

профиматика

возможно, самый понятный
канал по математике

Задача 10

профильного ЕГЭ
по математике

Содержание

Введение

Абсцисса точки — ее координата по оси x.
Ордината точки — ее координата по оси y.

Посмотрим на формулировки нескольких задач и обсудим, что в них нужно найти.

Пример 1.
На рисунке изображен график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(-9)$.
Тут надо найти y.

Пример 2.
На рисунке изображен график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -13{,}5$.
Тут надо найти x.

Пример 3.
На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.
Тут надо найти координату x точки пересечения графиков.

Пример 4.
На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.
Тут надо найти координату y точки пересечения графиков.

Если вы хотите узнать лайфхак, как не путать абсциссу и ординату, то посмотрите следующее видео:

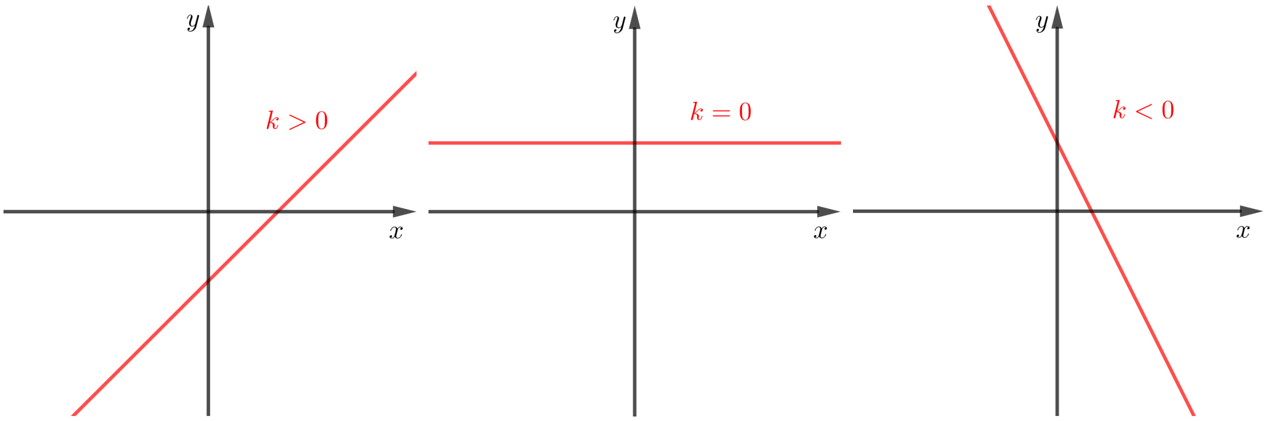
$\Longrightarrow$ **Как не путать абсциссу и ординату**

1 Прямые

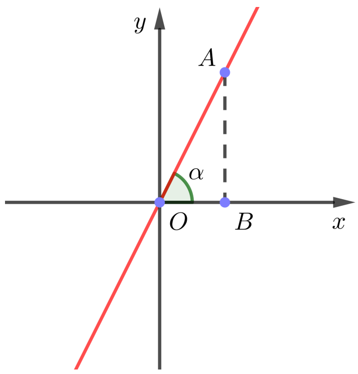
$\Longrightarrow$ Теория и пример решения

1.1 Теория

Прямая на плоскости задается уравнением $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент наклона прямой, b — сдвиг на b единиц по оси y. Также b — это ордината точки пересечения прямой и оси y.

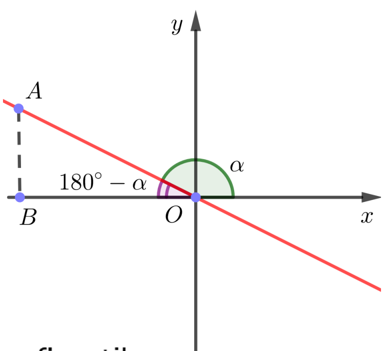


Коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к оси x — угла между положительным направлением оси x и прямой:
Найдем коэффициент k в том случае, когда $k > 0$. Он равен тангенсу угла α.



$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{|AB|}{|OB|}$$

Найдем коэффициент k в том случае, когда $k < 0$. Он равен тангенсу угла α. Удобно так же, как в первом случае построить прямоугольный треугольник, но для угла $180^\circ - \alpha$.

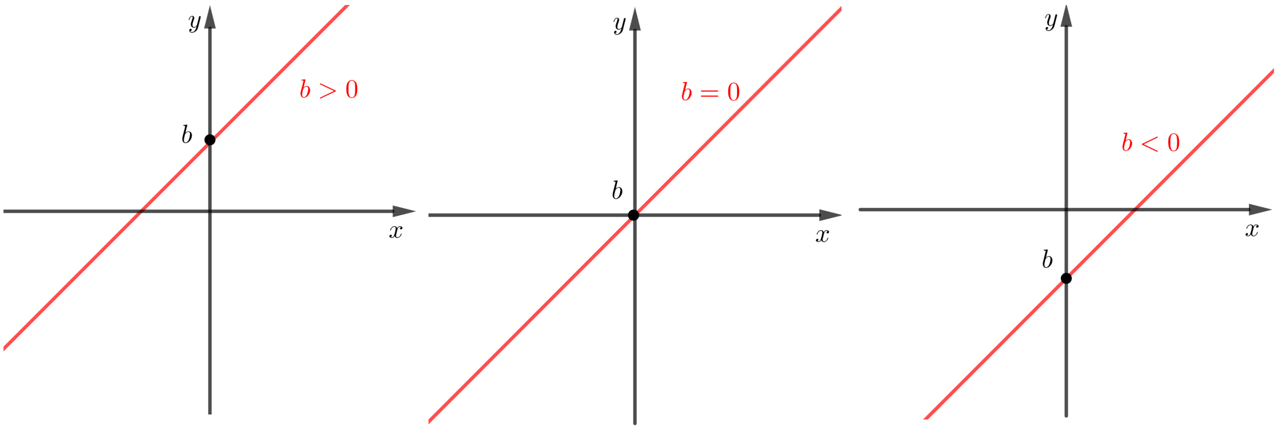


$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{|AB|}{|OB|}.$$

Воспользуемся формулой приведения, чтобы найти $\operatorname{tg}\alpha$: $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

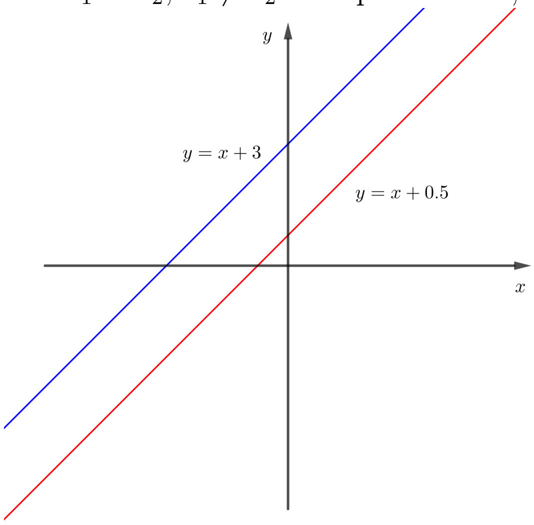
Тогда $k = \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\dfrac{|AB|}{|OB|}$.

Коэффициент b равен значению ординаты точки пересечения прямой с осью y. Действительно, если подставить в уравнение $y = kx + b$: $x = 0$, получим значение ординаты $y = b$:

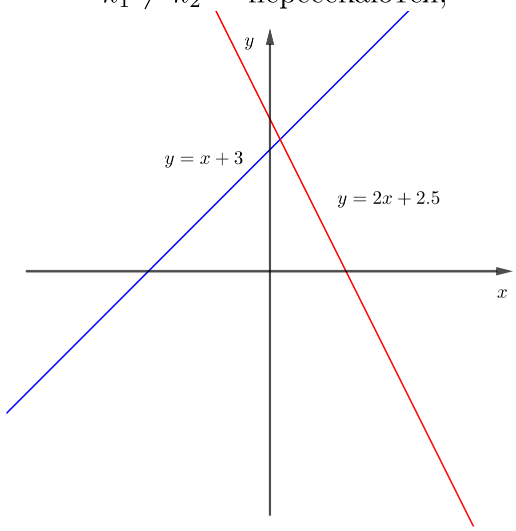


Взаимное расположение прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ на плоскости:

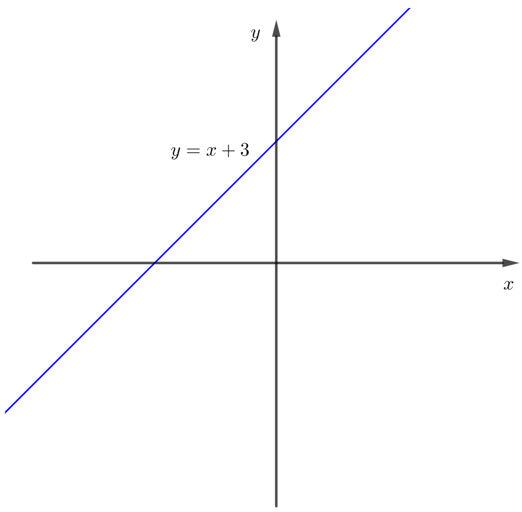
$k_1 = k_2$; $b_1 \neq b_2$ — параллельны;



$k_1 \neq k_2$ — пересекаются;

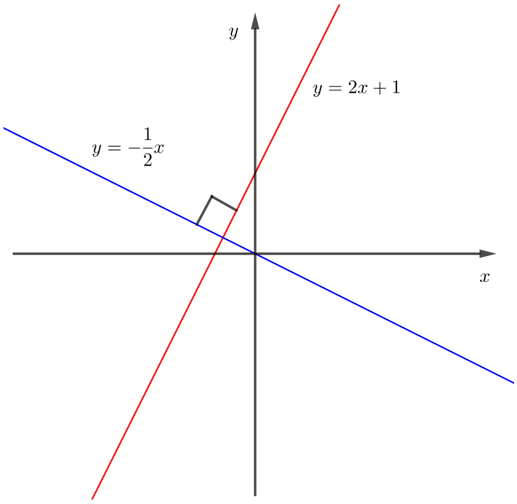


$k_1 = k_2$; $b_1 = b_2$ — совпадают;



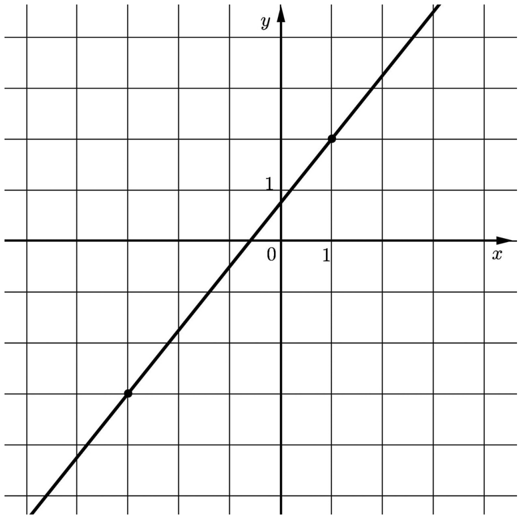
На самом деле тут две прямые, просто они совпали :).

$k_1k_2 = -1$ — перпендикулярны.



Решим задачу:

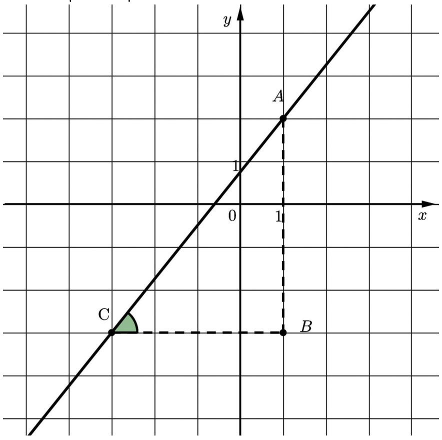
На рисунке изображен график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(-9)$.



Решим задачу двумя способами: с помощью системы уравнений и с нахождением тангенса угла наклона прямой:

Способ 1. Найдем две точки на графике: $(-3; -3)$, $(1; 2)$ (они обычно выделены жирно, но можно брать любые целочисленные точки, главное убедитесь в том, что они действительно целочисленные). Возьмем уравнение прямой $y = kx + b$ и подставим в него координаты этих двух точек. Получим систему уравнений:
$$\begin{cases} -3 = -3 \cdot k + b, \\ 2 = 1 \cdot k + b. \end{cases}$$
Найдем коэффициенты k и b из системы:
Выразим b из первого уравнения: $b = -3 + 3k$ и подставим во второе уравнение системы: $2 = k - 3 + 3k \Leftrightarrow 4k = 5$. Отсюда находим k: $k = \frac{5}{4}$.
Подставим k во второе уравнение и найдем b: $2 = \frac{5}{4} + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}$.
Получили уравнение $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$. Теперь подставим $x = -9$ в уравнение и найдем значение функции в этой точке: $f(-9) = \frac{5}{4} \cdot (-9) + \frac{3}{4} = -10{,}5$.

Способ 2. Найдем коэффициент k как тангенс угла наклона прямой. Заметим, что графику принадлежат две выделенные точки A и C. Построим точку B: для этого опустим перпендикуляры из точки A на ось x и из точки C на ось y и продолжим их до пересечения — это точка B. Получили прямоугольный треугольник ΔABC. Отсюда тангенс угла наклона прямой — отношение противолежащего катета к прилежащему: $k = \dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{5}{4}$.

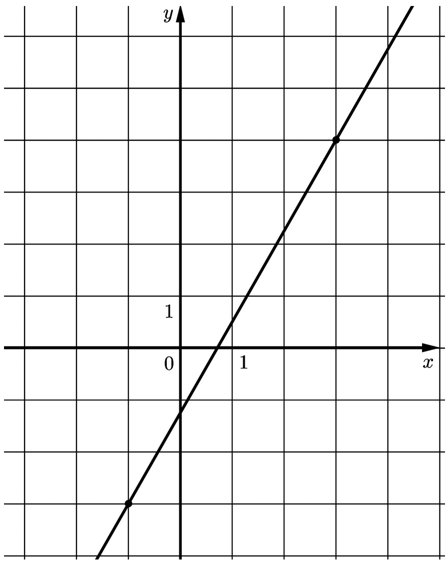


Коэффициент b можно было бы найти как точку пересечения прямой с осью y, но в данной задаче это не целое число, поэтому подставим одну из точек, принадлежащих графику, например, $(1; 2)$ в уравнение $y = \dfrac{5}{4}x + b$ и найдем b: $2 = 1 \cdot \dfrac{5}{4} + b \Rightarrow b = \dfrac{3}{4}$.
Далее найдем значение функции в точке также, как в первом способе: подставим $x = -9$ в уравнение $y = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{4}$ и найдем значение функции в этой точке: $f(-9) = -10{,}5$.

1.2 Задачи

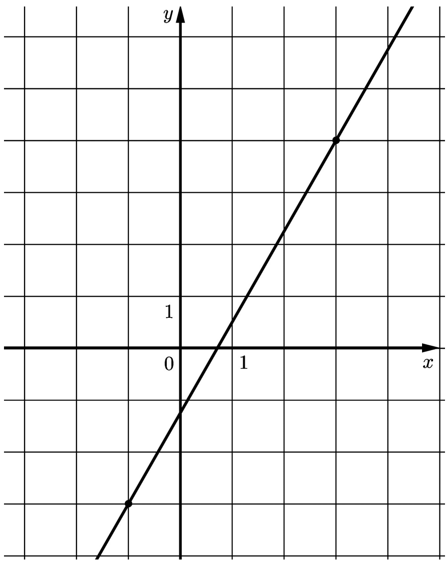
Задача 1

На рисунке изображен график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(-5)$.



Задача 2

На рисунке изображен график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -13{,}5$.

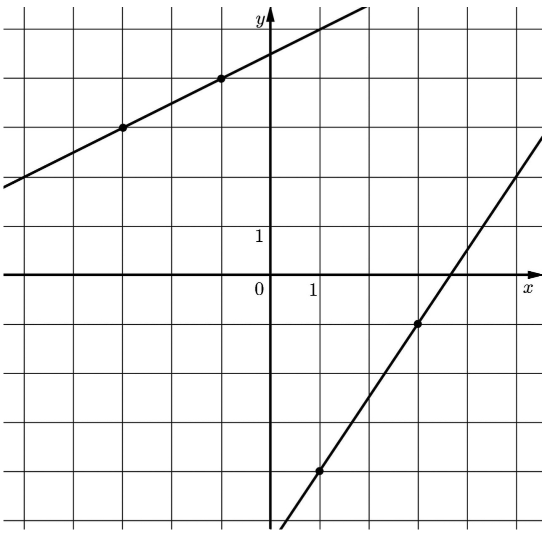


Как искать пересечение двух прямых.

1.3 Теория

Решим задачу:

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



Найдем уравнения каждой из двух прямых, представив их в виде $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Итак, подставим в уравнение $y = k_1x + b_1$ вместо x и y координаты двух выделенных точек графика: $(-1; 4)$ и $(-3; 3)$, а в уравнение $y = k_2x + b_2$ точки $(3; -1)$ и $(1; -4)$.

1) $\begin{cases} 4 = -k_1 + b_1, \\ 3 = -3k_1 + b_1. \end{cases}$

Выразим b_1 из первого уравнения и подставим во второе:

$$b_1 = 4 + k_1,$$

$$3 = -3k_1 + 4 + k_1 \Leftrightarrow 2k_1 = 1.$$

Отсюда $k_1 = \dfrac{1}{2}$.
Теперь подставим k_1 в первое уравнение и найдем b_1:

$$b_1 = 4 + k_1 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

Получаем уравнение $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2}$.

2) $\begin{cases} -1 = 3k_2 + b_2, \\ -4 = k_2 + b_2. \end{cases}$

Выразим b_2 из первого уравнения и подставим во второе:

$$b_2 = -1 - 3k_2,$$

$$-4 = k_2 + b_2 = k_2 - 1 - 3k_2 \Leftrightarrow -4 = -2k_2 - 1,$$
$$2k_2 = 4 - 1 = 3.$$

Отсюда $k_2 = \dfrac{3}{2}$.
Теперь подставим k_2 в первое уравнение и найдем b_2:

$$b_2 = -1 - 3k_2 = -1 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{11}{2}.$$

Получаем уравнение $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{11}{2}$.
Мы получили уравнения двух прямых. Так как левые части одинаковые, приравняем их правые части друг к другу и найдем x — абсциссу точки пересечения двух графиков:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2},$$

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) x = \left(\frac{9}{2} + \frac{11}{2}\right),$$
$$x = 10.$$

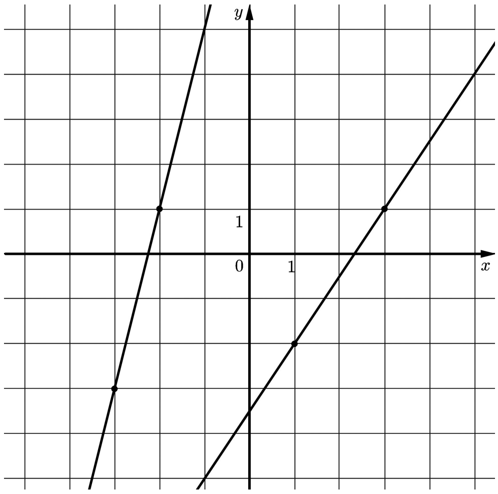
Получили абсциссу точки пересечения графиков $x = 10$. Теперь найдем ординату. Для этого подставим $x = 10$ в одно из двух уравнений (неважно, в какое, ведь точка пересечения лежит на обеих прямых):

$$y = \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{9}{2} = \frac{19}{2}.$$

1.4 Задачи

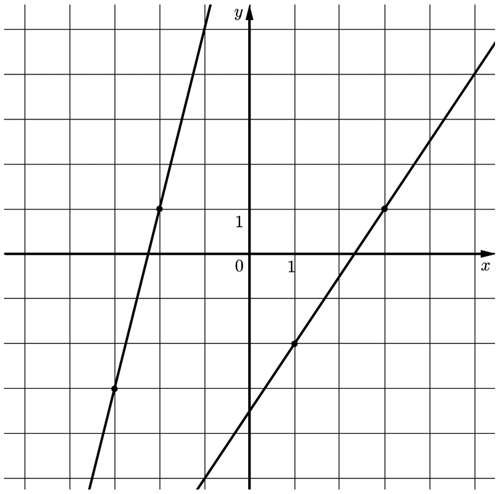
Задача 1

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



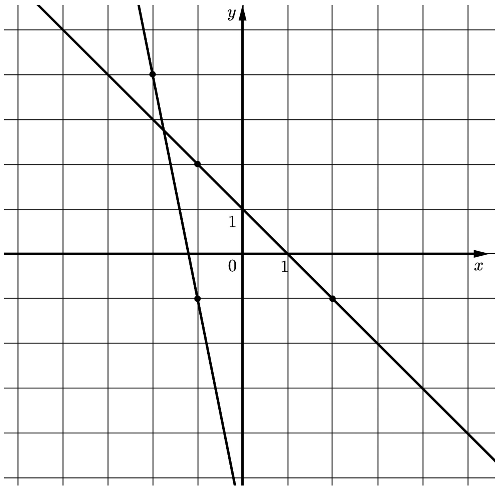
Задача 2

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



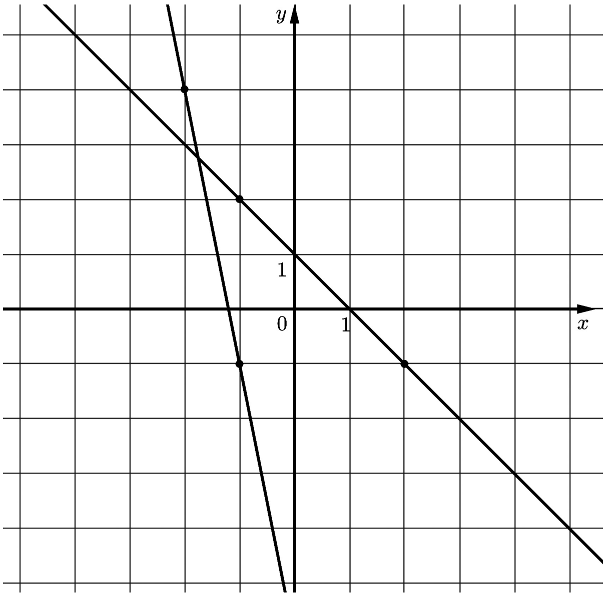
Задача 3

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



Задача 4

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



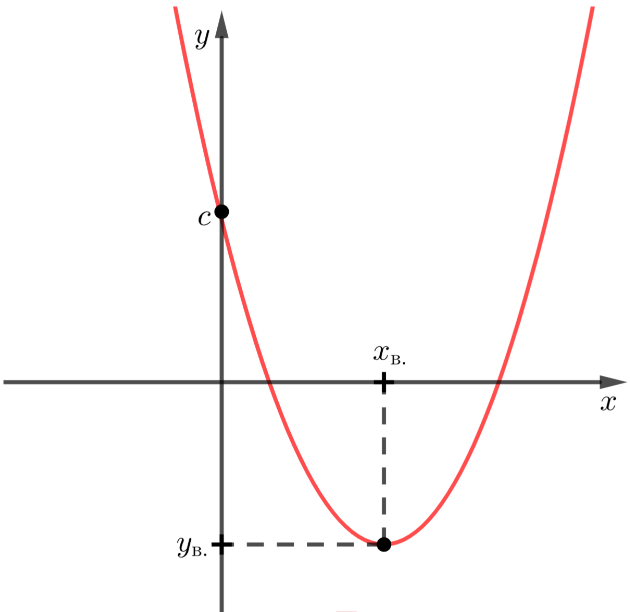
2 Параболы

⟹ Теория и пример решения

2.1 Теория

Параболой называется график, который задается уравнением $y = ax^2 + bx + c$, где коэффициент a отвечает за направление ветвей, c — ордината точки пересечения параболы с осью y.

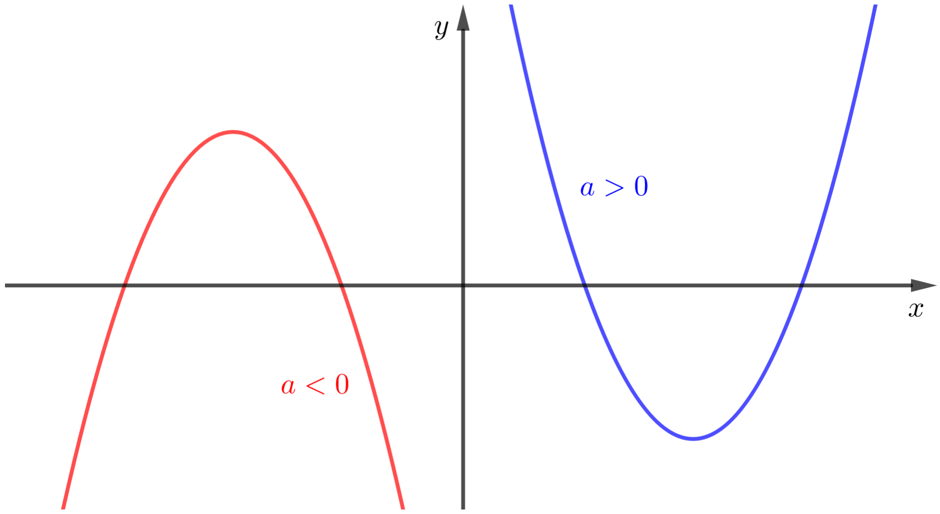
$x_{\text{в.}} = \dfrac{-b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы. Подставим $x_{\text{в.}}$ в уравнение параболы и получим $y_{\text{в.}} = a\dfrac{b^2}{4a^2} + b\dfrac{-b}{2a} + c = = -\dfrac{b^2}{4a} + c = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a} = \dfrac{-D}{4a}$.



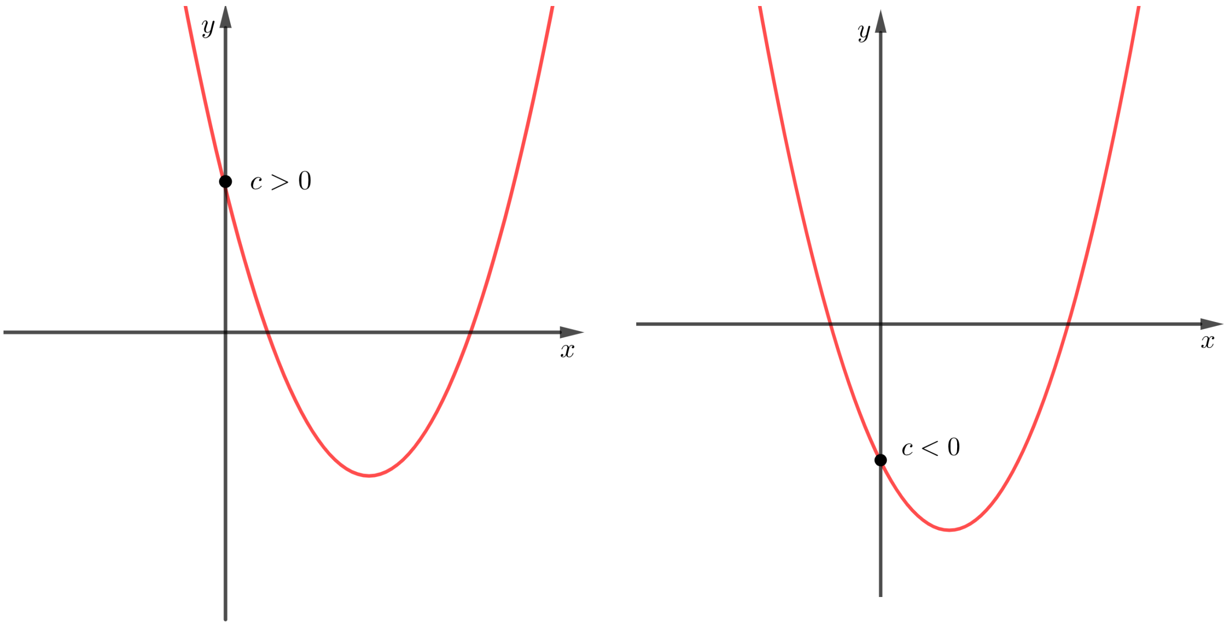
Пример:
Найдем координаты вершины параболы $y = x^2 - 4x + 3$.

$x_{\text{в.}} = \dfrac{4}{2 \cdot 1} = 2$. Подставим $x_{\text{в.}}$ в уравнение: $y_{\text{в.}} = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$.

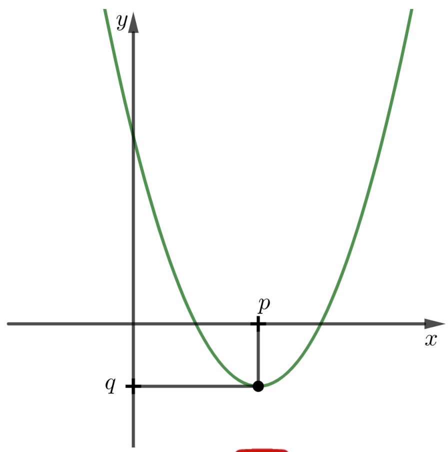
Как коэффициент a влияет на уравнение параболы?



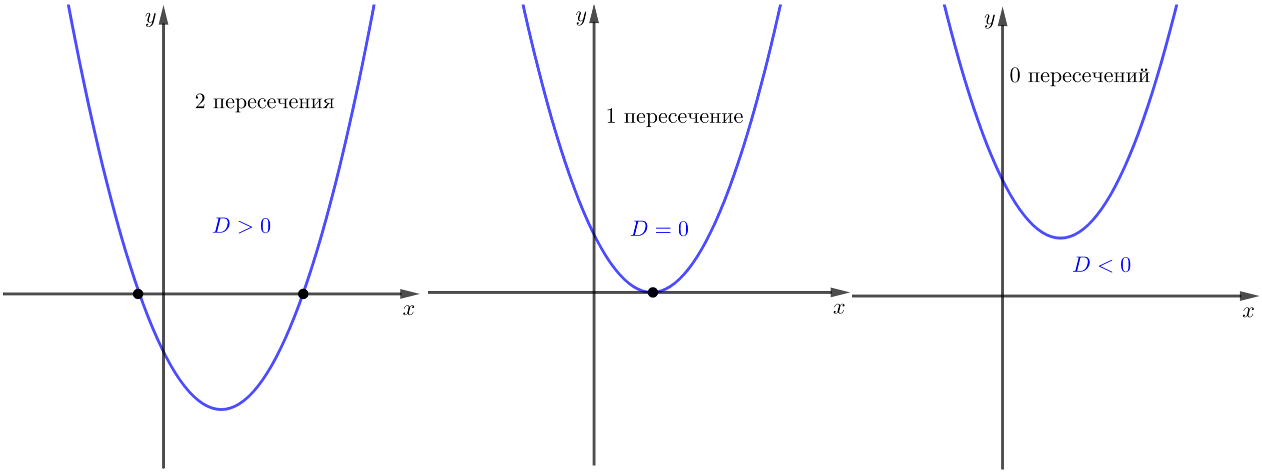
Как коэффициент c влияет на уравнение параболы?



Также удобно искать уравнение параболы в виде $y = k(x-p)^2 + q$, где p — сдвиг параболы $y = kx^2$ по оси x, а q — сдвиг по оси y.

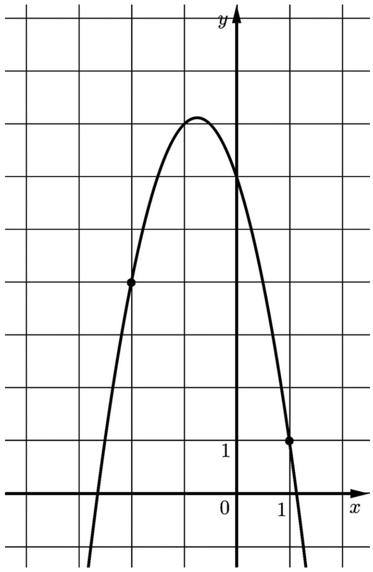


Парабола, заданная уравнением $y = ax^2 + bx + c$ имеет 2 пересечения с осью x, если дискриминант уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ больше нуля; касается оси x, если дискриминант равен нулю; не пересекается с осью x, если дискриминант меньше нуля.



Решим задачу:

На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 - 3x + c$. Найдите $f(-4)$.



Найдем коэффициенты a и c уравнения параболы $y = ax^2 - 3x + c$, подставив две выделенные точки графика: $(-2; 4)$ и $(1; 1)$. Решим систему уравнений:
$\begin{cases} 4 = 4a - 3 \cdot (-2) + c, \\ 1 = a - 3 + c. \end{cases}$
Выразим из второго уравнения c: $c = 4 - a$ и подставим в первое:

$$4 = 4a + 6 + 4 - a.$$

Отсюда получаем, что $a = -2$.
Теперь подставим $a = -2$ во второе уравнение и найдем c:

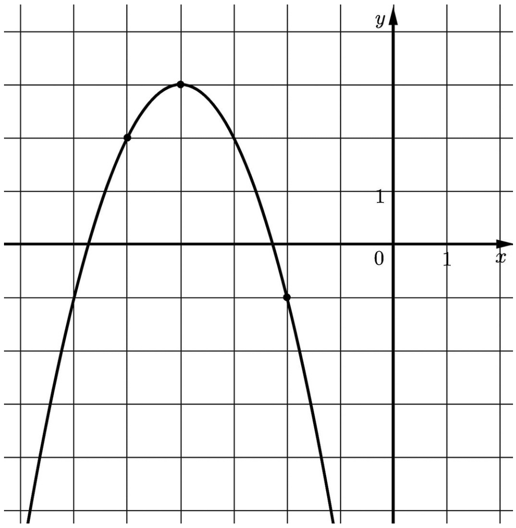
$$c = 1 + 3 - a = 4 + 2 = 6.$$

Получили уравнение параболы: $y = -2x^2 - 3x + 6$.

Теперь найдем $f(-4)$, подставив в полученное уравнение $x = -4$:
$f(-4) = -2 \cdot (-4)^2 - 3 \cdot (-4) + 6 = -14$.

Решим задачу:

На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(2)$.



Способ 1. Найдем уравнение параболы. Для этого подставим в уравнение $f(x) = ax^2 + bx + c$ три выделенные точки: $(-2; -1)$, $(-4; 3)$, $(-5; 2)$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} -1 = 4a - 2b + c, \\ 3 = 16a - 4b + c, \\ 2 = 25a - 5b + c. \end{cases}$$

Выразим c из первого уравнения и подставим во второе и третье:

$$c = -1 - 4a + 2b,$$

$$\begin{cases} 3 = 16a - 4b - 1 - 4a + 2b, \\ 2 = 25a - 5b - 1 - 4a + 2b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 12a - 2b, \\ 3 = 21a - 3b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 6a - b, \\ 1 = 7a - b. \end{cases}$$

Выразим b из первого уравнения: $b = 6a - 2$. Подставим во второе: $1 = 7a - 6a + 2$.
Отсюда $a = -1$. Тогда $b = -6 - 2 \Leftrightarrow b = -8$,
$c = -1 - 4a + 2b = -1 - 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-8) \Leftrightarrow c = -13$.
Получили уравнение параболы $f(x) = -x^2 - 8x - 13$.
Теперь найдем $f(2)$. Подставим $x = 2$ в уравнение параболы:

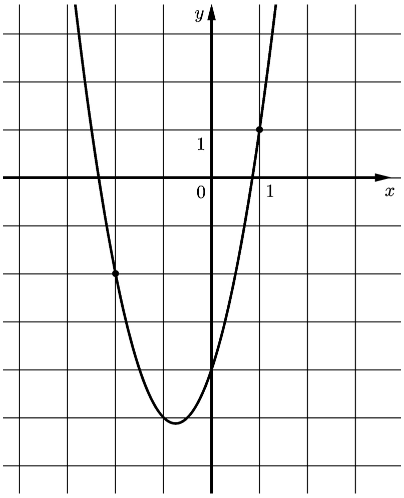
$$f(2) = -2^2 - 8 \cdot 2 - 13 = -33.$$

Способ 2. Заметим, что вершина параболы — одна из выделенных точек, а при сдвиге параболы в точку $(0; 0)$ получится график параболы $y = -x^2$. Значит, можно представить уравнение параболы в виде $f(x) = -(x - p)^2 + q$, где p — сдвиг параболы $y = -x^2$ на p единиц по оси x, q — сдвиг параболы $y = -x^2$ на q единиц по оси y.
Значит, наша парабола задается уравнением $f(x) = -(x + 4)^2 + 3$.
Найдем $f(2)$: $f(2) = -(2 + 4)^2 + 3 = -36 + 3 = -33$.

2.2 Задачи

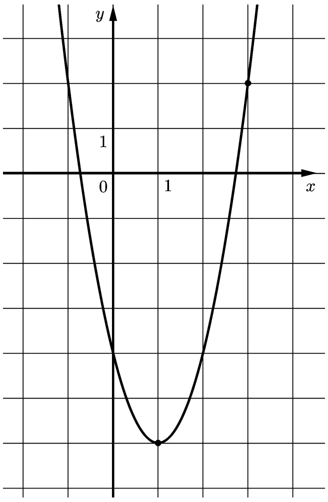
Задача 1

На рисунке изображен график функции $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Найдите $f(-5)$.



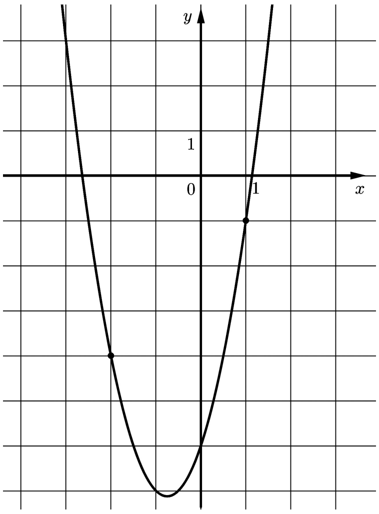
Задача 2

На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 - 4x + c$. Найдите $f(-3)$.



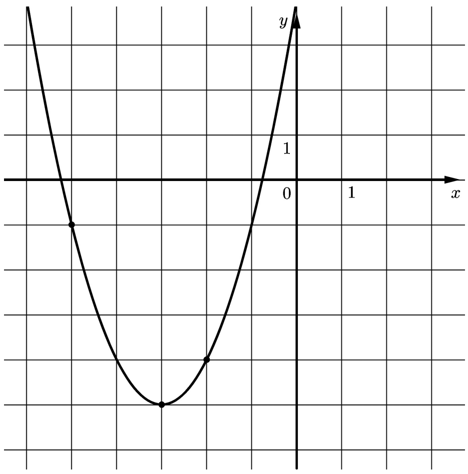
Задача 3

На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx - 6$. Найдите $f(-6)$.



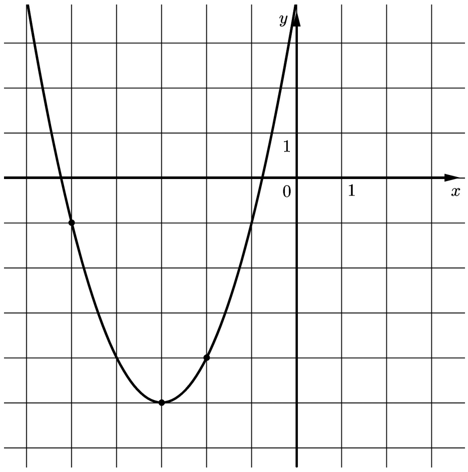
Задача 4

На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-9)$.



Задача 5

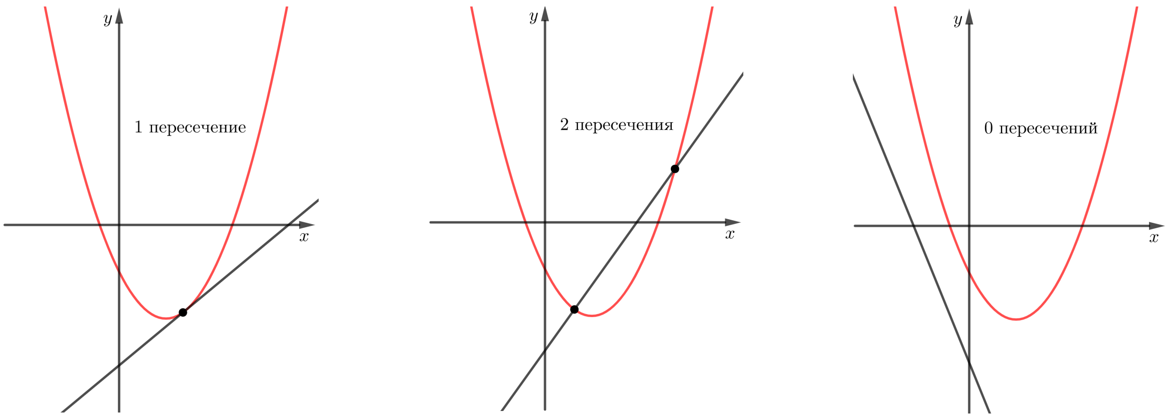
На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите $f(1)$.



3 Как искать пересечение параболы и прямой, двух парабол

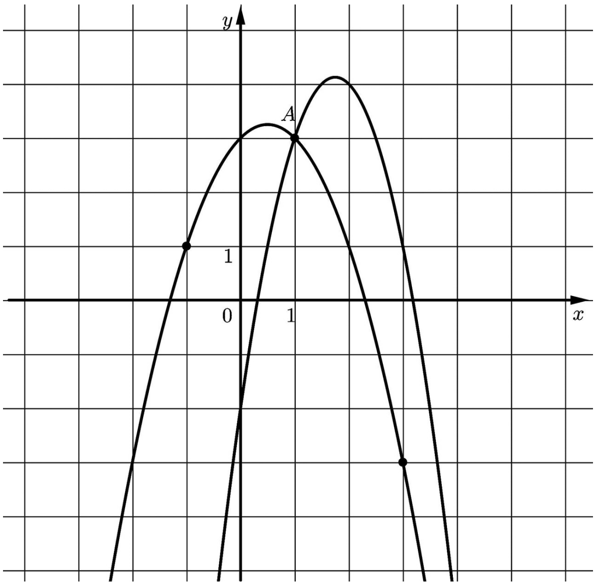
3.1 Теория

Парабола и прямая могут иметь одну или две точки пересечения или не иметь точек пересечения вообще.



Решим задачу:

На рисунке изображены графики функций $f(x) = -2x^2 + 7x - 2$ и $ax^2 + bx + c$, Которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Найдем уравнение второй параболы в виде $y = ax^2 + bx + c$, подставив три выделенные точки графика: $(-1; 1)$ и $(1; 3)$, $(3; -3)$. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 = a - b + c, \\ 3 = a + b + c, \\ -3 = 9a + 3b + c. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое и найдем b: $2 = 2b$, то есть $b = 1$.
Подставим во 2 и 3 уравнения системы $b = 1$:

$$\begin{cases} 3 = a + 1 + c, \\ -3 = 9a + 3 + c. \end{cases}$$

Далее выразим c из первого уравнения и подставим во второе, чтобы найти a:

$$c = 2 - a,$$

$$-3 = 9a + 3 + 2 - a \Leftrightarrow 8a = -8.$$

Отсюда $a = -1$.
Теперь подставим $a = -1$ и $b = 1$ в первое уравнение системы и получим:
$1 = -1 - 1 + c \Leftrightarrow c = 3$.
Уравнение второй параболы: $y = -x^2 + x + 3$.

Далее приравняем правые части уравнений двух парабол, чтобы найти точки их пересечения:

$$y = -2x^2 + 7x - 2 = -x^2 + x + 3,$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0,$$

$$D = 36 - 4 \cdot 5 = 16,$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}.$$

Отсюда получаем $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Точек пересечения две. Точка $x_1 = 1$ — это точка A, она нам известна. Нас интересует вторая точка $x_2 = 5$ — искомая точка B.
Примечание 1: Можно было заметить, что один корень уравнения мы уже знаем — $x = 1$. Тогда найдем второй корень по теореме Виета:

$$1 + x_2 = 6 \quad \text{или} \quad 1 \cdot x_2 = 5.$$

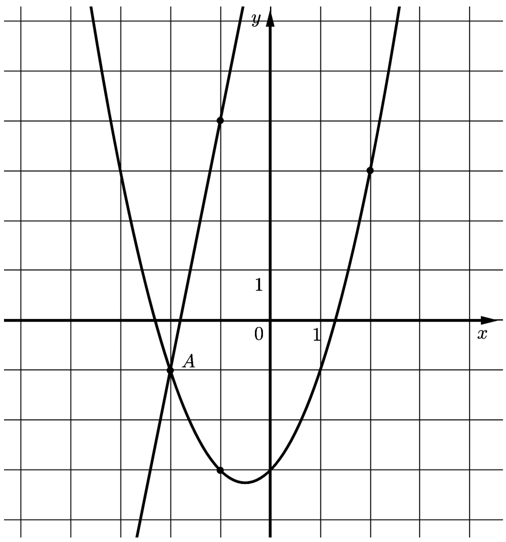
Тогда $x_2 = 5$.

Примечание 2: Систему уравнений $\begin{cases} 1 = a - b + c, \\ 3 = a + b + c, \\ -3 = 9a + 3b + c \end{cases}$ можно решить подстановкой аналогично задачам из параграфа 3.

3.2 Задачи

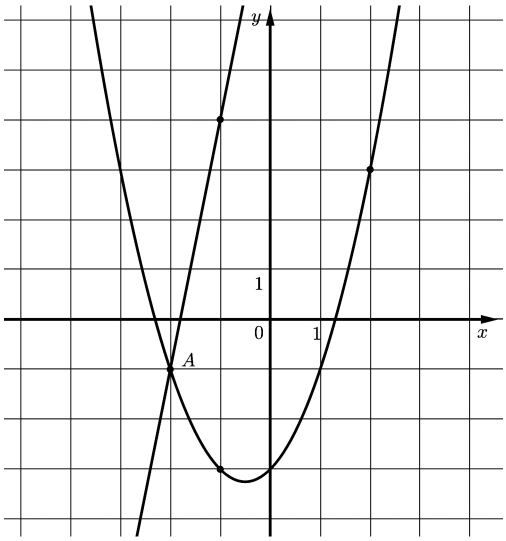
Задача 1

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 5x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



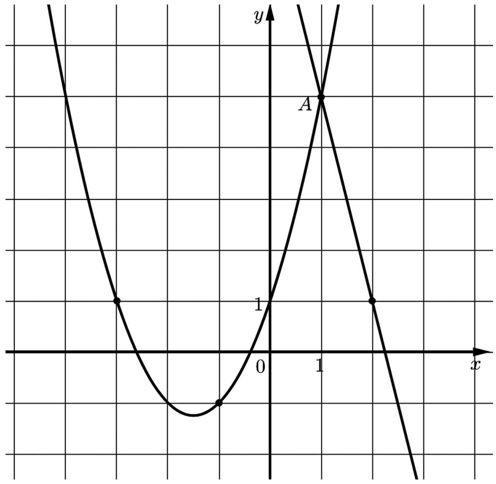
Задача 2

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 5x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



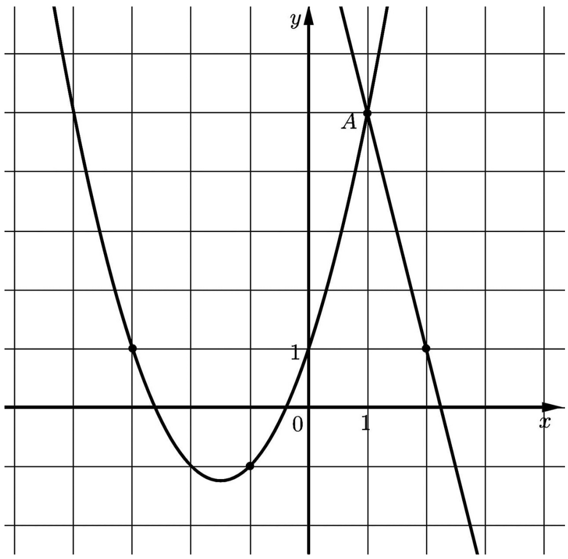
Задача 3

На рисунке изображены графики функций $f(x) = -4x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



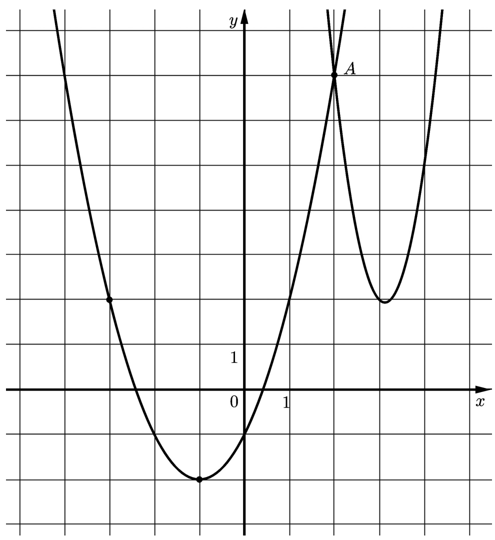
Задача 4

На рисунке изображены графики функций $f(x) = -4x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



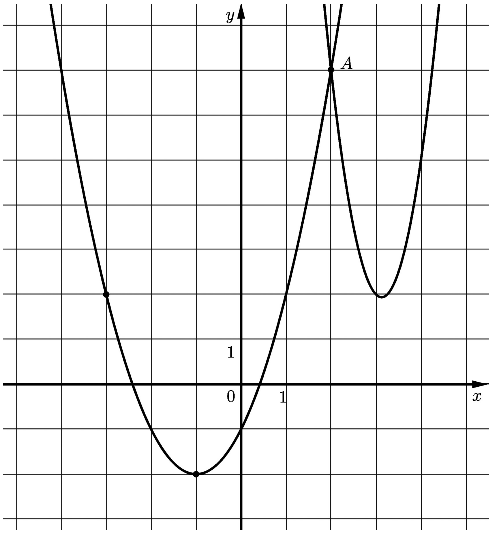
Задача 5

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 - 25x + 41$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



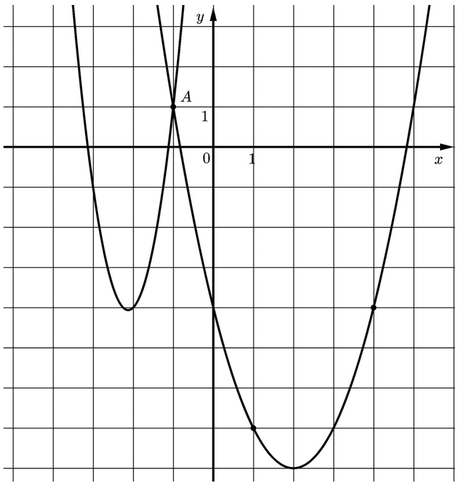
Задача 6

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 - 25x + 41$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



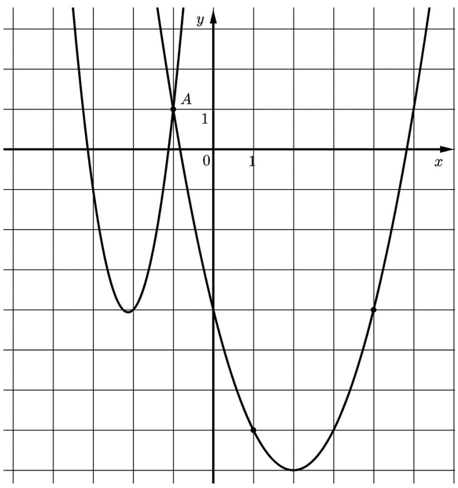
Задача 7

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 + 17x + 14$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Задача 8

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 + 17x + 14$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.

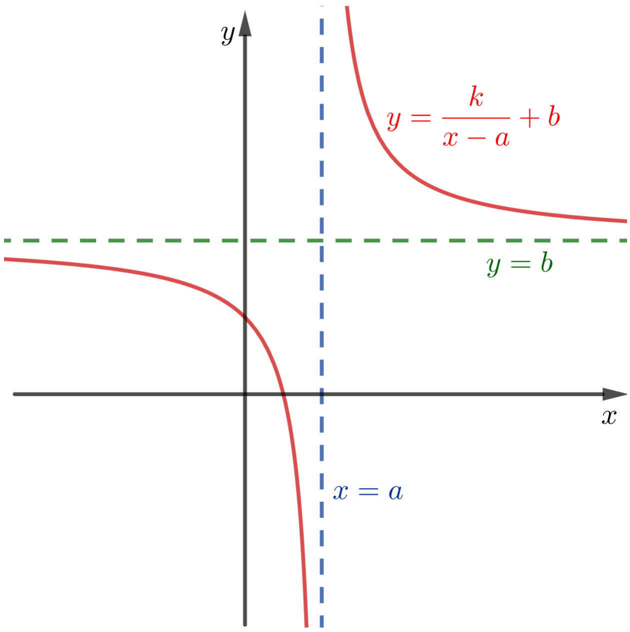


4 Гипербола. Асимптотические точки гиперболы

$\Longrightarrow$ Теория и пример решения

4.1 Теория

Гиперболой называется график, который задается уравнением $y = \dfrac{k}{x-a} + b$.



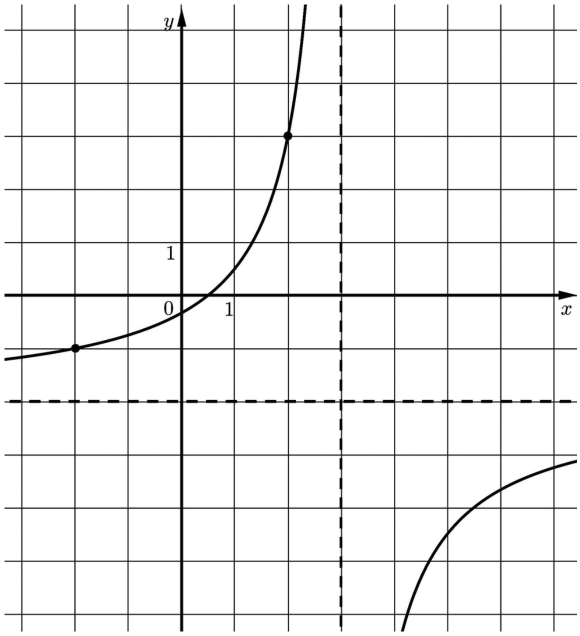
За что отвечают коэффициенты k, a и b?

Если x стремится к a, то знаменатель дроби $x - a$ стремится к 0, значит, мы делим фиксированное число k на очень маленькое положительное или отрицательное число. Тогда $\dfrac{k}{x-a}$ стремится к $\pm\infty$, значит y стремится к $\pm\infty$. В этом случае говорят, что что график гиперболы имеет вертикальную асимптоту — прямую $x = a$. Заметим, что при $x = a$ знаменатель дроби обращается в 0.

Если x стремится к $\pm\infty$, то $\dfrac{k}{x-a}$ стремится к 0, потому что мы делим фиксированное число k на очень большое число, значит, y стремится к b. В этом случае говорят, что график гиперболы имеет горизонтальную асимптоту — прямую $y = b$.

Решим задачу:

На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{kx+a}{x+b}$. Найдите k.



Способ 1. Заметим, что у графика есть вертикальная асимптота: $x = 3$. Значит, при $x = 3$ знаменатель дроби $\dfrac{kx+a}{x+b}$ обращается в 0, то есть $3 + b = 0$. Получаем $b = -3$.

Теперь подставим в уравнение $y = \dfrac{kx+a}{x-3}$ две выделенные точки графика: $(2;3)$ и $(-2;-1)$. Получим систему уравнений: $\begin{cases} 3 = \dfrac{2k+a}{2-3}, \\ -1 = \dfrac{-2k+a}{-2-3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 2k+a, \\ 5 = -2k+a. \end{cases}$

Сложим два уравнения и найдем a: $2 = 2a$, то есть $a = 1$.
Задача уже решена, но, если нужно, мы можем найти k, чтобы узнать все коэффициенты в уравнении гиперболы.
Найдем k из первого уравнения: $-3 = 2k + 1 \;\Leftrightarrow\; 2k = -4 \;\Leftrightarrow\; k = -2$.
Получили уравнение $y = \dfrac{-2x+1}{x-3}$.

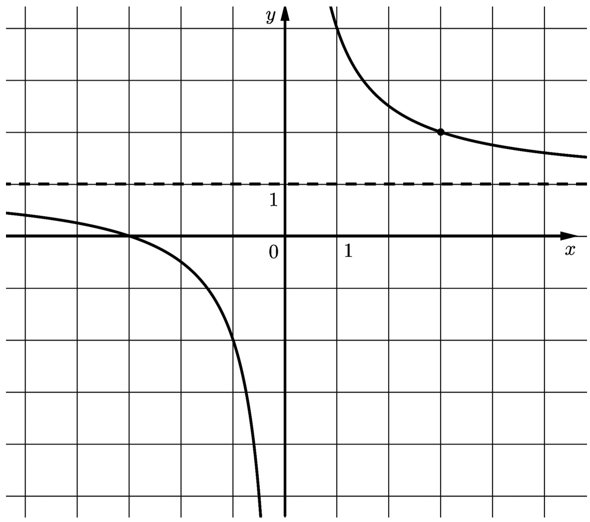
Способ 2. $f(x) = \dfrac{kx+a}{x+b}$. Нашу функцию можно представить в виде:
$f(x) = \dfrac{k(x+b) - kb + a}{x+b}$. Убедиться в этом можно раскрыв скобки в числителе и приведя подобные слагаемые. Мы хотели получить в числителе отдельную скобку $x + b$. Теперь представим дробь в виде суммы двух дробей $f(x) = \dfrac{k(x+b)}{x+b} + \dfrac{a-kb}{x+b}$. Получаем

$$f(x) = k + \frac{a-kb}{x+b}.$$

Заметим, что у графика есть горизонтальная асимптота $y = -2$, а из теории нам известно, что гипербола вида $y = k + \dfrac{a-kb}{x+b}$ имеет горизонтальную асимптоту $y = k$, то есть $k = -2$.

Решим задачу:

На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{k}{x} + a$. Найдите $f(-12)$.



Заметим, что график имеет горизонтальую асимптоту $y = 1$, а из теории нам известно, что гипербола вида $y = \dfrac{k}{x} + a$ имеет горизонтальную асимптоту $y = k$, то есть $a = 1$.

Найдем k. Для этого подставим в уравнение $y = \dfrac{k}{x} + 1$ выделенную точку графика $(3; 2)$:

$$2 = \frac{k}{3} + 1 \Leftrightarrow k = 3.$$

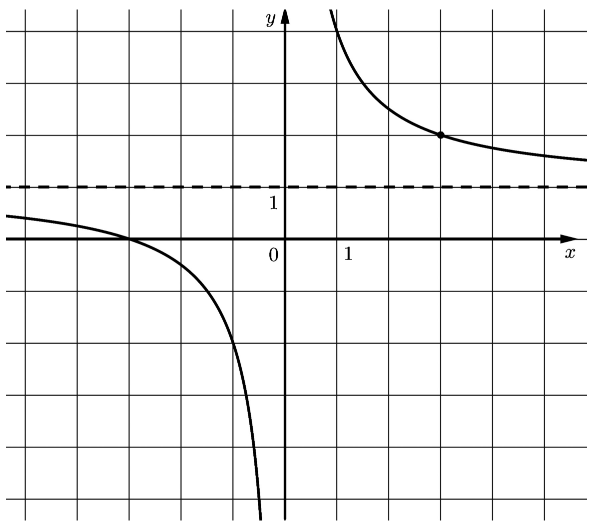
Получили график $y = \dfrac{3}{x} + 1$. Подставим $x = -12$ и получим $f(-12) = \dfrac{3}{-12} + 1 = \dfrac{3}{4}$.

Примечание: Вместо точки $(3; 2)$ можно было подставить любую целочисленную точку, не обязательно выделенную, например, $(-2; -1)$ или $(-3; 0)$. Можно было взять любые две из этих точек, подставить в уравнение гиперболы, получить систему из двух уравнений и решить ее. Главное — быть уверенным в том, что выбранные точки действительно целочисленные!

4.2 Задачи

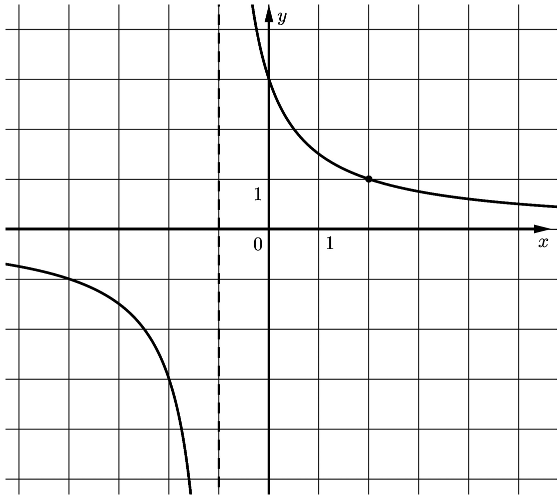
Задача 1

На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,8.



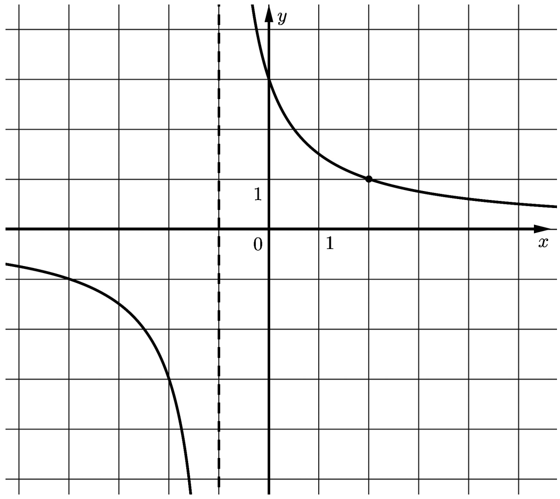
Задача 2

На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{k}{x+a}$. Найдите $f(19)$.



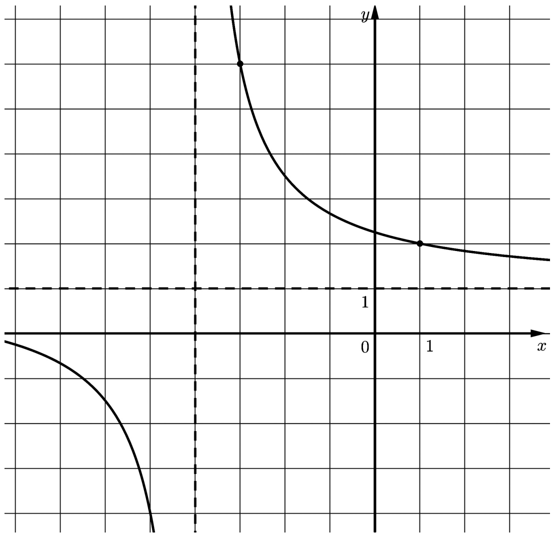
Задача 3

На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{k}{x+a}$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 0{,}2$.



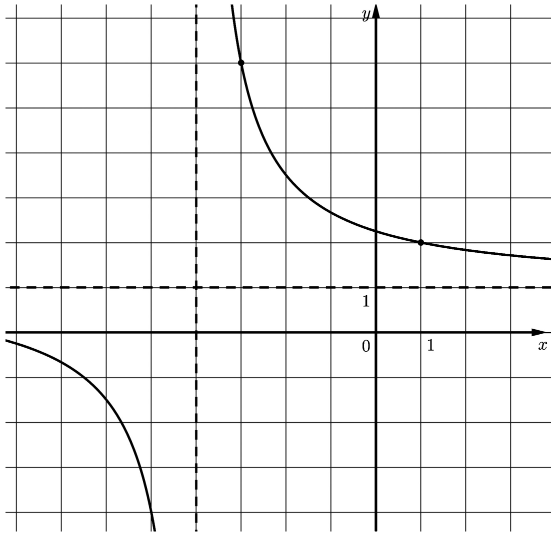
Задача 4

На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{kx+a}{x+b}$. Найдите k.



Задача 5

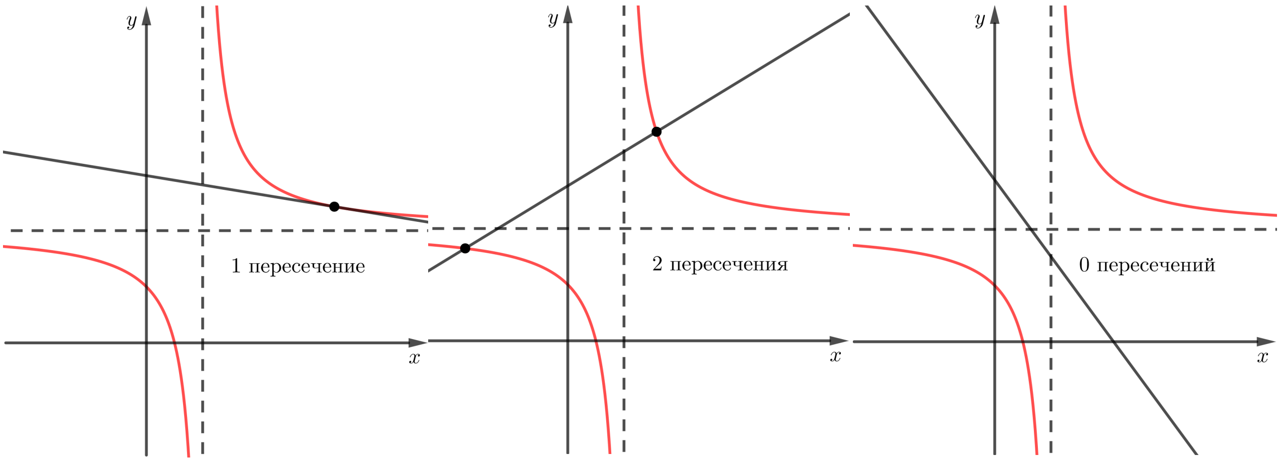
На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{kx+a}{x+b}$. Найдите a.



5 Пересечение гиперболы и прямой

5.1 Теория

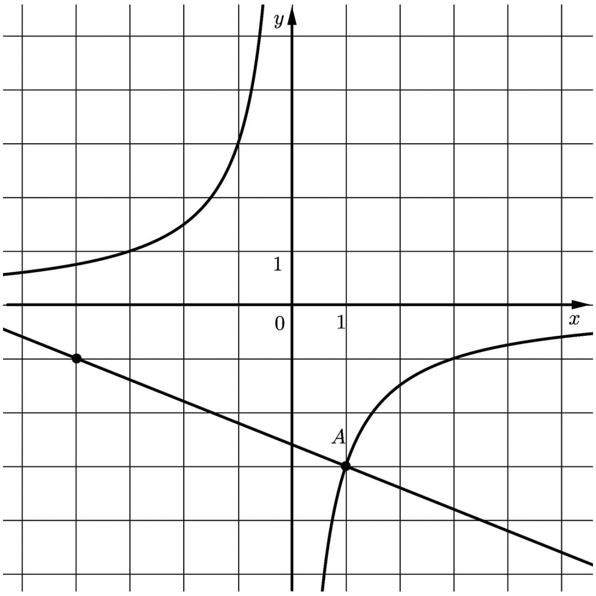
Гипербола и прямая могут иметь одну или две точки пересечения или не иметь точек пересечения вообще.



Горизонтальная прямая не пересекается с гиперболой, когда она является асимптотой, в остальных случаях горизонтальная прямая имеет одну точку пересечения с гиперболой.

Решим задачу:

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Подставим в уравнение $f(x) = \dfrac{k}{x}$ выделенную точку графика $(1; -3)$ (она принадлежит и графику гиперболы, и графику прямой) и найдем k: $-3 = \dfrac{k}{1} \Leftrightarrow k = -3$.

Получили уравнение гиперболы $f(x) = -\dfrac{3}{x}$.

Далее найдем уравнение прямой, подставив в $g(x) = ax + b$ две выделенные точки графика $(-4; -1)$ и $(1; -3)$: $\begin{cases} -1 = -4a + b, \\ -3 = a + b. \end{cases}$

Выразим b из второго уравнения и подставим в первое:

$$b = -3 - a,$$

$$-1 = -4a - 3 - a = -5a - 3.$$

Отсюда получаем: $-2 = 5a$, то есть $a = -\dfrac{2}{5}$.

Теперь подставим $a = -\dfrac{2}{5}$ во второе уравнение и найдем b: $b = -3 - a = -3 + \dfrac{2}{5} = -\dfrac{13}{5}$.

Получили уравнение прямой $g(x) = -\dfrac{2}{5}x - \dfrac{13}{5}$.

Приравняем уравнения графиков, чтобы найти точки их пересечения: $-\dfrac{3}{x} = -\dfrac{2}{5}x - \dfrac{13}{5}$.

Домножим обе части уравнения на $5x$:

$$\frac{-15 + 2x^2 + 13x}{5x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 + 13x - 15 = 0, \\ 5x \neq 0. \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение $2x^2 + 13x - 15 = 0$ и найдем x:

$$D = 13^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) = 169 + 120 = 289,$$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{2 \cdot 2},$$

Отсюда получаем: $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{15}{2}$.
Точек пересечения две. Точка x_1 — то точка A, она нам известна. Нас интересует вторая точка x_2 — искомая точка B.
На самом деле можно было сразу вспомнить, что точка $x_1 = 1$ нам уже известна, а значит, можем использовать теорему Виета:

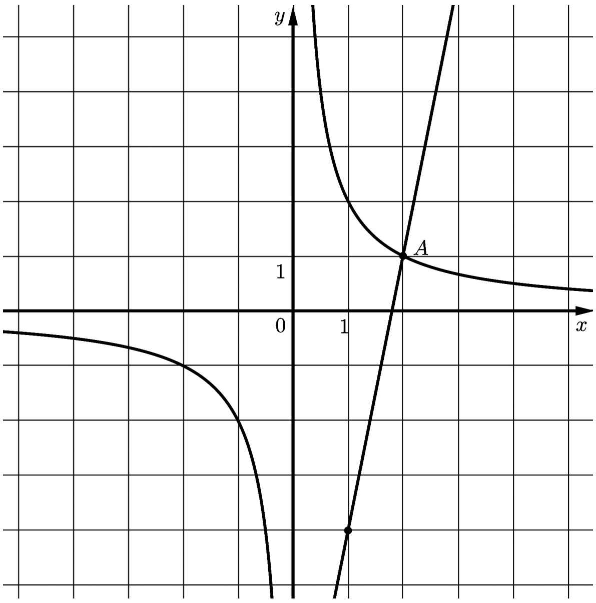
$$1 + x_2 = -\frac{13}{2} \quad \text{или} \quad 1 \cdot x_2 = -\frac{15}{2}.$$

Отсюда $x_2 = -\dfrac{15}{2}$.

5.2 Задачи

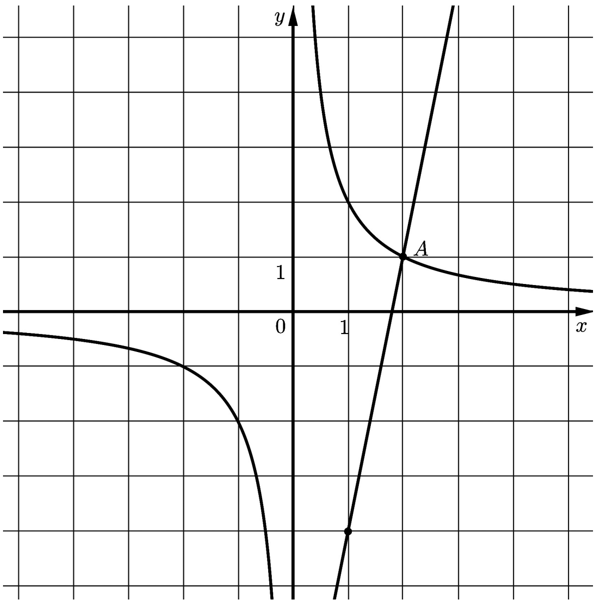
Задача 1

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{a}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Задача 2

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{a}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.

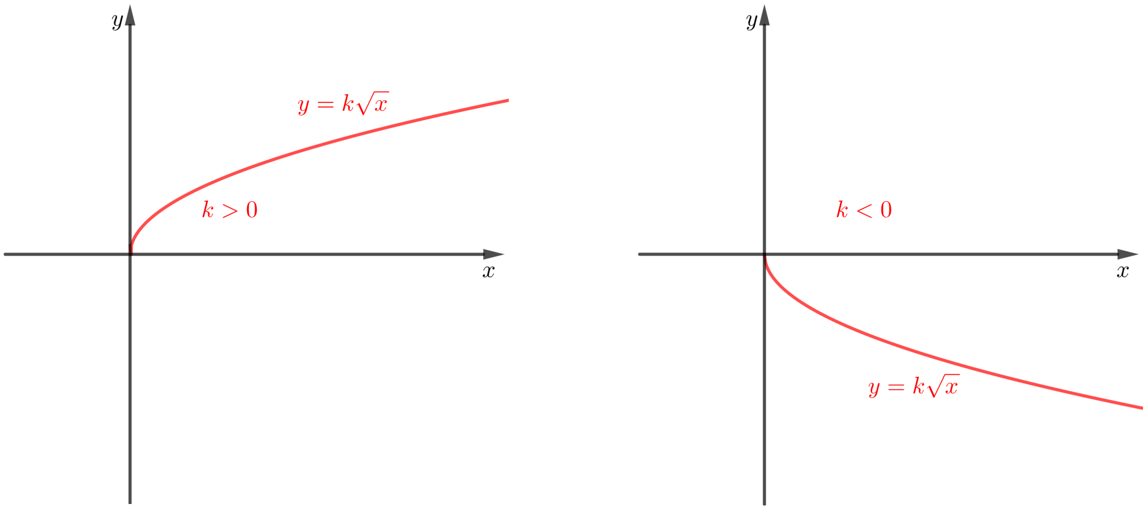


6 Иррациональные функции

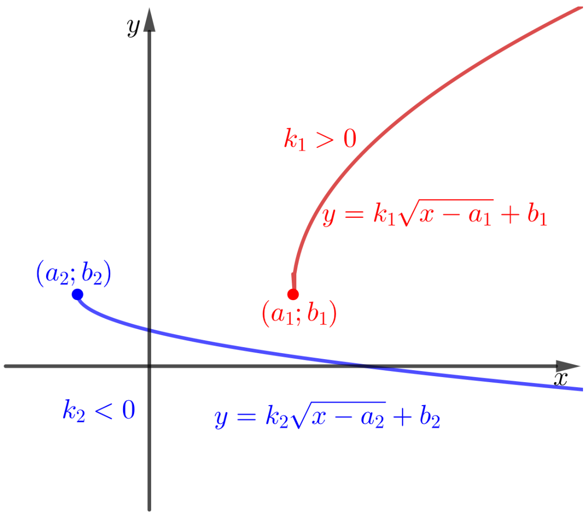
$\Longrightarrow$ Теория и пример решения

6.1 Теория

Иррациональная функция задается уравнением $y = k\sqrt{x}$, где коэффициент k отвечает за растяжение по оси y и направление кривой.

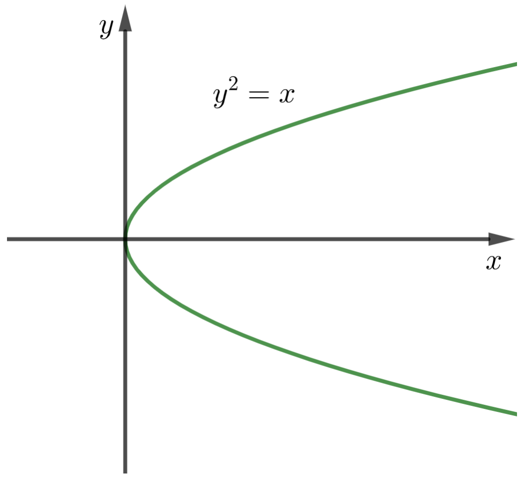


Иррациональная функция в общем виде задается уравнением $y = k\sqrt{x-a} + b$, где коэффициент k отвечает за растяжение по оси y и направление кривой, a — это сдвиг графика $y = k\sqrt{x}$ на a единиц по оси x, а b — на b единиц по оси y.

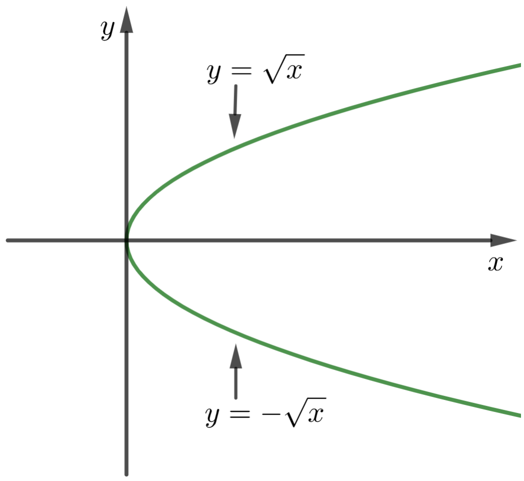


Для тех, кто хочет знать больше!

Посмотрим, что такое $y = \sqrt{x}$. Возведем левую и правую части уравнения в квадрат, учитывая, что $y \geqslant 0$, и получим $y^2 = x$ или $x = y^2$ при $y \geqslant 0$. Получилось уравнение параболы, только x и y поменялись местами.
График $y^2 = x$ выглядит так:

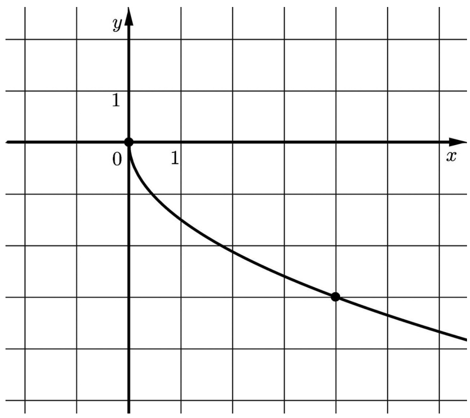


Тогда получаем, что $y = \sqrt{x}$ — это верхняя половина параболы.
Заметим, что нижняя половина параболы — это $y = -\sqrt{x}$.



Решим задачу:

На рисунке изображен график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -12$.



Подставим в уравнение $f(x) = k\sqrt{x}$ выделенную точку графика $(4; -3)$ и найдем k: $-3 = k\sqrt{4}$, то есть $-3 = 2k$. Отсюда $k = -\dfrac{3}{2}$.

Получили уравнение $f(x) = -\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

Найдем точку x, в которой $f(x) = -12$:

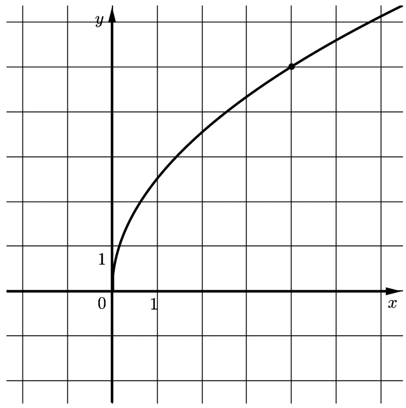
$-12 = -\dfrac{3}{2}\sqrt{x} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} = 8$.

Отсюда получаем: $x = 64$.

6.2 Задачи

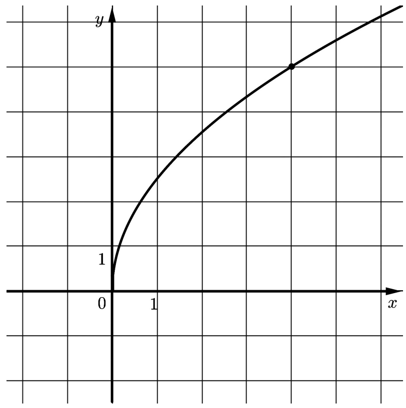
Задача 1

На рисунке изображен график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(6{,}76)$.



Задача 2

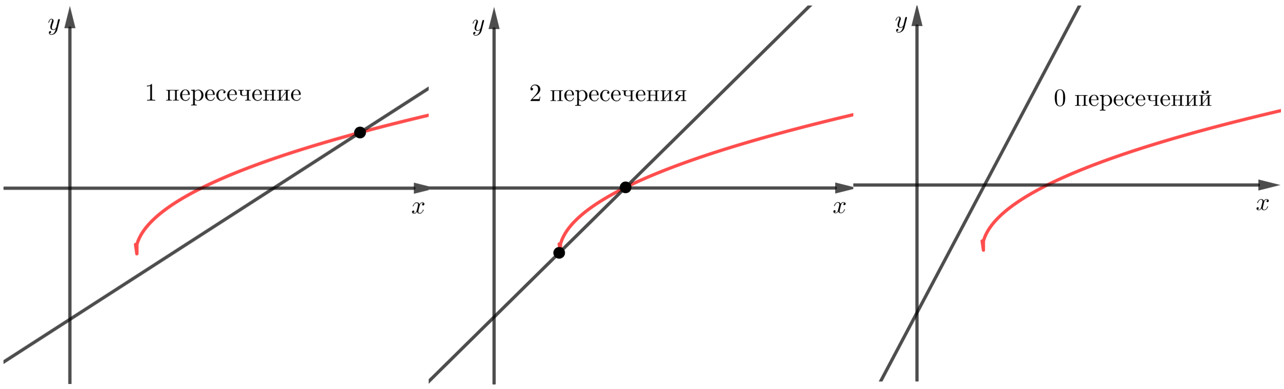
На рисунке изображен график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 3{,}5$.



7 Пересечение корня и прямой

7.1 Теория

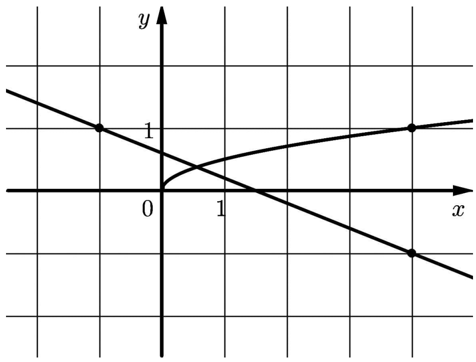
Корень и прямая могут иметь одну или две точки пересечения или не иметь точек пересечения вообще.



При этом горизонтальная и вертикальная прямые не пересекаются с корнем или имеют с ним одну точку пересечения.

Решим задачу:

На рисунке изображены графики функций $f(x) = k\sqrt{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите абсциссу точки A.



Найдем коэффициент k функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Подставим в $f(x) = k\sqrt{x}$ выделенную точку графика $(4; 1)$:

$1 = k\sqrt{4}$. Отсюда получаем, что $k = \dfrac{1}{2}$.

Получили уравнение $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$.

Теперь найдем уравнение прямой. Подставим в $g(x) = ax + b$ две выделенные точки графика $(-1; 1)$ и $(4; -1)$. Решим систему уравнений: $\begin{cases} 1 = -a + b, \\ -1 = 4a + b. \end{cases}$

Выразим b из второго уравнения системы: $b = -1 - 4a$ и подставим в первое: $1 = -a - 1 - 4a$. Отсюда получаем, что $a = -\dfrac{2}{5}$.

Теперь подставим $a = -\dfrac{2}{5}$ в первое уравнение и найдем b: $b = 1 + a = \dfrac{3}{5}$.

Получили уравнение прямой $g(x) = -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{5}$.

Теперь приравняем правые части уравнений и найдем координату x точки пересечения.

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}.$$

Способ 1. Сделаем замену $\sqrt{x} = t \geqslant 0$ и домножим левую и правую части уравнения на 10, тогда

$$5t = -4t^2 + 6,$$

Решим квадратное уравнение $4t^2 + 5t - 6 = 0$:

$$D = 25 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) = 121,$$

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 4},$$

Отсюда $t_1 = \dfrac{3}{4}$, $t_2 = -2$.

Не забываем, что $t \geqslant 0$, значит $t = \sqrt{x} = \dfrac{3}{4}$, то есть $x = \dfrac{9}{16}$.

Способ 2. Домножим уравнение $\dfrac{1}{2}\sqrt{x} = -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{5}$ на 10:

$$5\sqrt{x} = -4x + 6.$$

Воспользуемся равносильным переходом:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x = 16x^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6x + 36, \\ -4x + 6 \geqslant 0; \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 - 73x + 36 = 0, \\ x \leqslant \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$16x^2 - 73x + 36 = 0,$$
$$D = 73^2 - 4 \cdot 16 \cdot 36 = 5329 - 2304 = 3025 = 55^2,$$
$$x_{1,2} = \frac{73 \pm 55}{2 \cdot 16}.$$

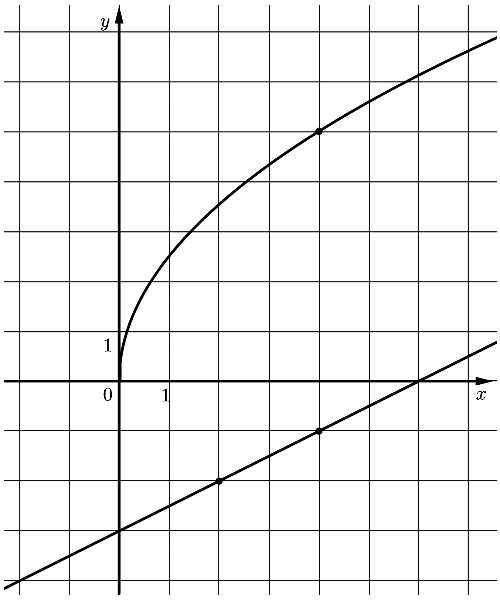
Отсюда $x_1 = 4$, $x_2 = \dfrac{9}{16}$.

Так как $x \leqslant \dfrac{3}{2}$, то подходит один корень уравнения: $x = \dfrac{9}{16}$.

7.2 Задачи

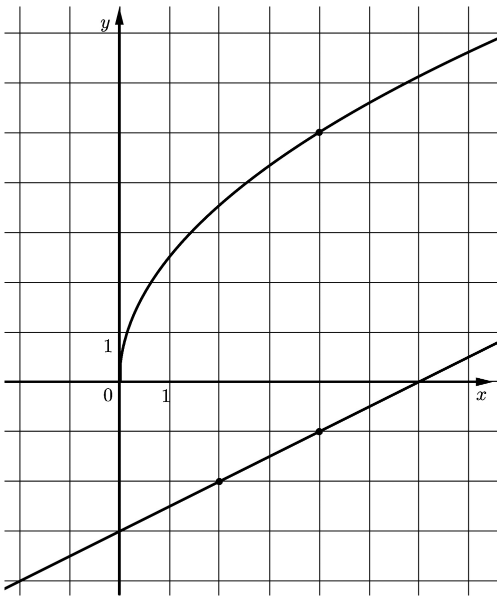
Задача 1

На рисунке изображены графики функций $f(x) = k\sqrt{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите абсциссу точки A.



Задача 2

На рисунке изображены графики функций $f(x) = k\sqrt{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите ординату точки A.



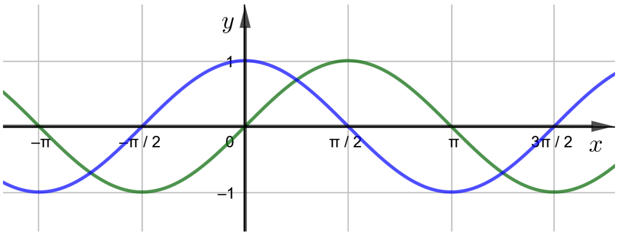
8 Тригонометрические функции

⟹ Теория и пример решения

8.1 Теория

Тригонометрическая функция задается уравнением $y = kf(x - a) + b$, где $f(x)$ — это синус, косинус, тангенс или котангенс, коэффициент a отвечает за сдвиг по оси x на a единиц, а коэффициент b — за сдвиг по оси y на b единиц.
Коэффициент k отвечает за растяжение $k > 1$ и сжатие $0 < k < 1$ по оси y.

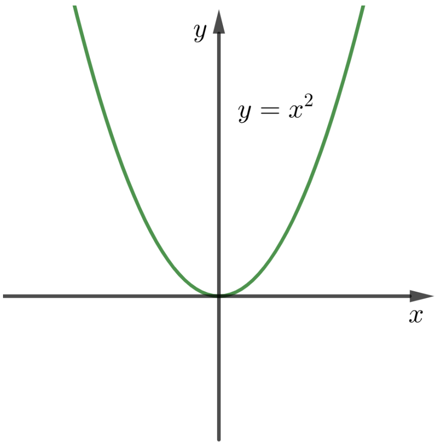
Четная функция — функция, симметричная относительно оси y, нечетная — симметричная относительно точки $(0; 0)$.



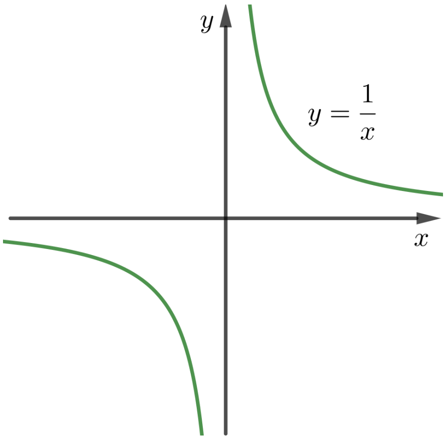
Периодическая функция — это функция, повторяющая свои значения через некоторый регулярный интервал аргумента.

Область определения — это множество $D(y)$, на котором задаётся функция. В каждой точке этого множества значение функции должно быть определено.
Область значений функции — это множество $E(y)$, состоящее из всех значений, которые принимает функция.

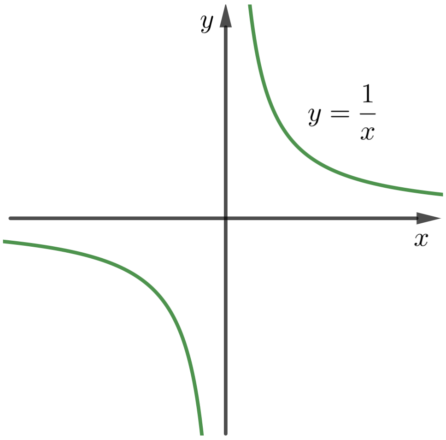
Примеры:



Найдем область определения и область значений функции $y = x^2$.
$D(y): \ x \in \mathbb{R}$,
$E(y): \ y \in [0; +\infty)$.

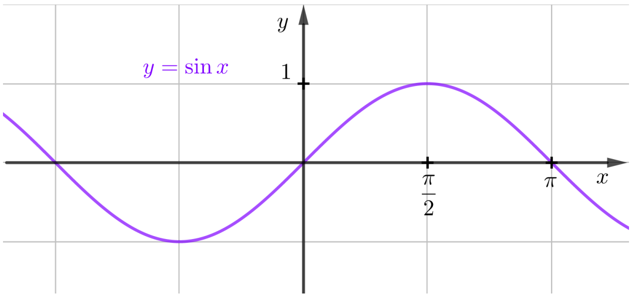


Найдем область определения и область значений функции $y = \dfrac{1}{x}$.
$D(y): \ x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$,
$E(y): \ y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

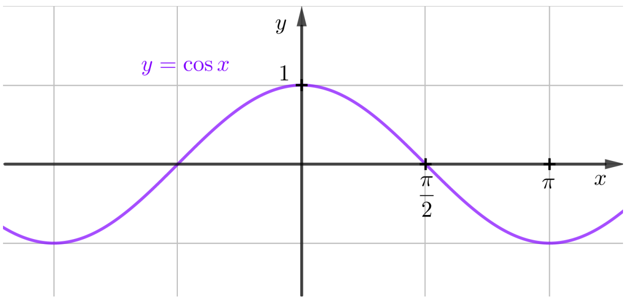


Найдем область определения и область значений функции $y = \sqrt{x}$.
$D(y): \ x \in [0; +\infty)$,
$E(y): \ y \in [0; +\infty)$.

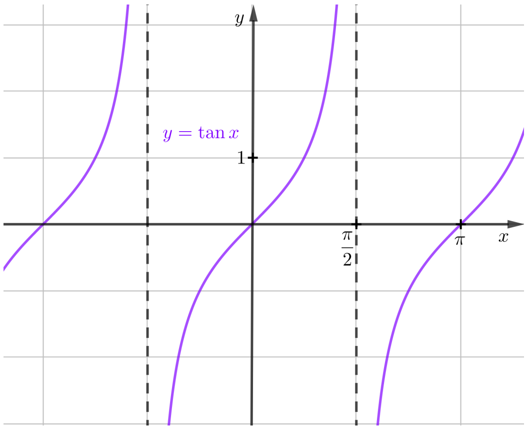
Графиком функции $y = \sin x$ является синусоида. Она периодичная с периодом 2π, нечетная, имеет область определения $x \in \mathbb{R}$ и область значений $y \in [-1; 1]$.



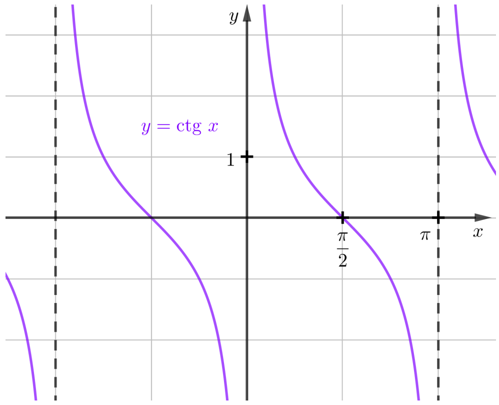
Графиком функции $y = \cos x$ является синусоида, сдвинутая на $\dfrac{\pi}{2}$ влево по оси x. Она периодичная с периодом 2π, четная, имеет область определения $x \in \mathbb{R}$ и область значений $y \in [-1; 1]$.



Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодичная с периодом π, нечетная и имеет вертикальные асимптоты $x = k \cdot \dfrac{\pi}{2}$, где k — целое число. Она имеет область определения $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \pi k \right\}$, где $k \in \mathbb{Z}$, и область значений $y \in \mathbb{R}$.

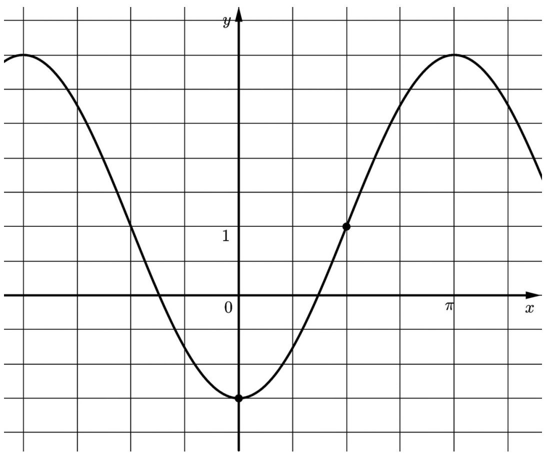


Функция $y = \operatorname{ctg} x$ периодичная с периодом π, нечетная и имеет вертикальные асимптоты $x = k \cdot \pi$ где k — целое число. Она имеет область определения $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k\}$, где $k \in \mathbb{Z}$, и область значений $y \in \mathbb{R}$.



Решим задачу:

На рисунке изображен график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите a.



Найдем уравнение косинусоиды. Подставим в уравнение $f(x) = a \cos x + b$ выделенные точки графика $\left(\dfrac{\pi}{2}; 1\right)$ и $\left(0; -\dfrac{3}{2}\right)$. Решим систему: $\begin{cases} 1 = 0 \cdot a + b, \\ -\dfrac{3}{2} = a + b. \end{cases}$ Из первого уравнения $b = 1$. Подставим $b = 1$ во второе уравнение системы и найдем a: $a = -\dfrac{3}{2} - b = -\dfrac{3}{2} - 1 = -\dfrac{5}{2}$.

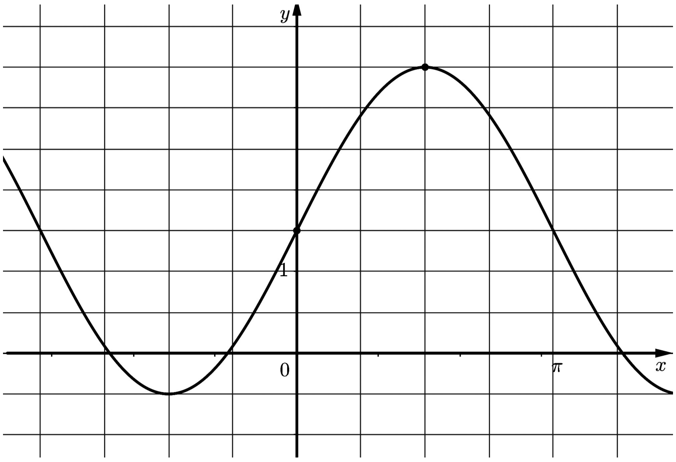
Получили уравнение $f(x) = -\dfrac{5}{2} \cos x + 1$.

Значит, $a = -\dfrac{5}{2}$.

8.2 Задачи

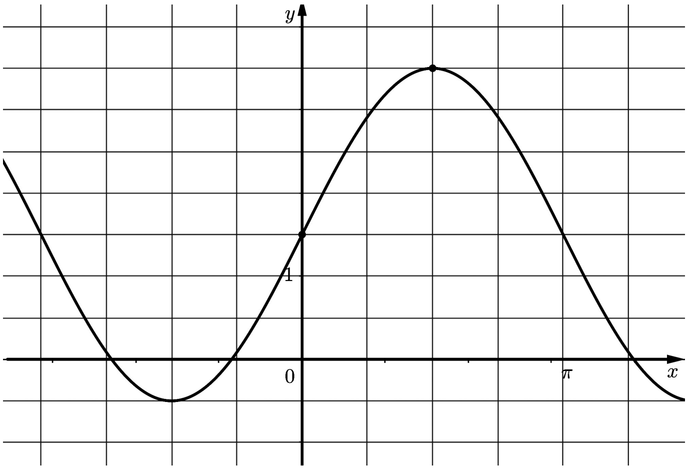
Задача 1

На рисунке изображен график функции $f(x) = a\sin x + b$. Найдите a.



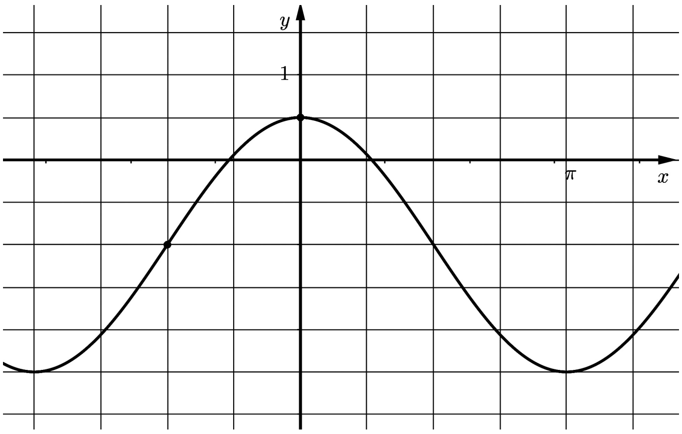
Задача 2

На рисунке изображен график функции $f(x) = a\sin x + b$. Найдите b.



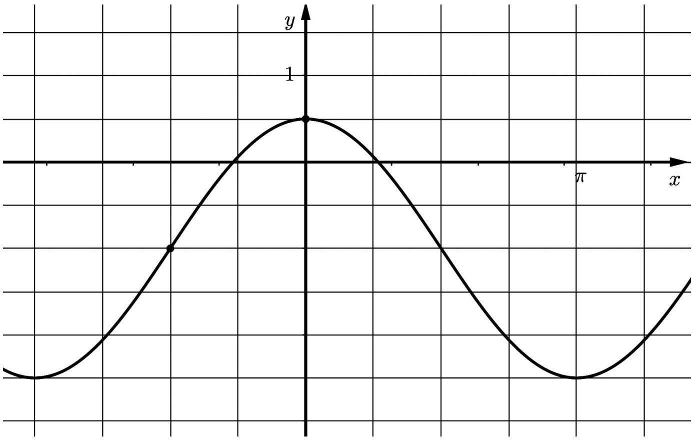
Задача 3

На рисунке изображен график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите a.



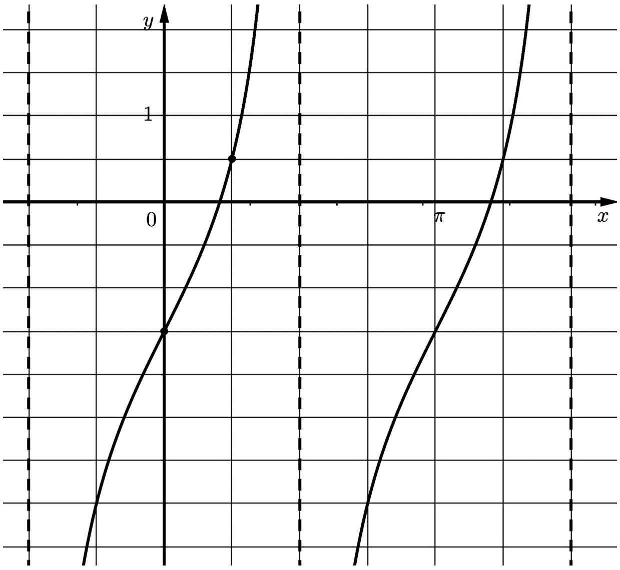
Задача 4

На рисунке изображен график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите b.



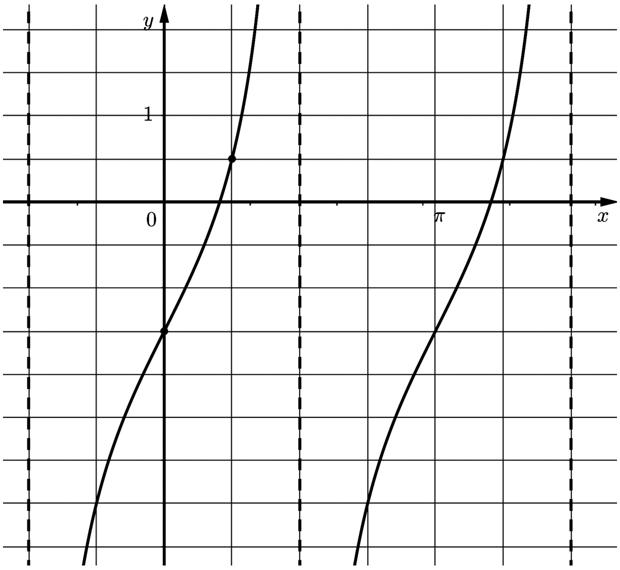
Задача 5

На рисунке изображен график функции $f(x) = a\operatorname{tg} x + b$. Найдите a.



Задача 6

На рисунке изображен график функции $f(x) = a\operatorname{tg} x + b$. Найдите b.

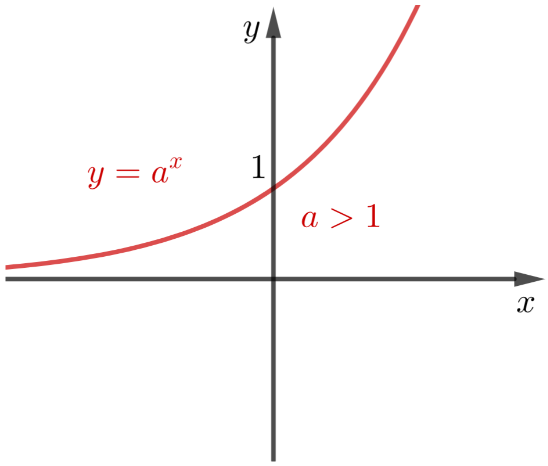


9 Показательные функции

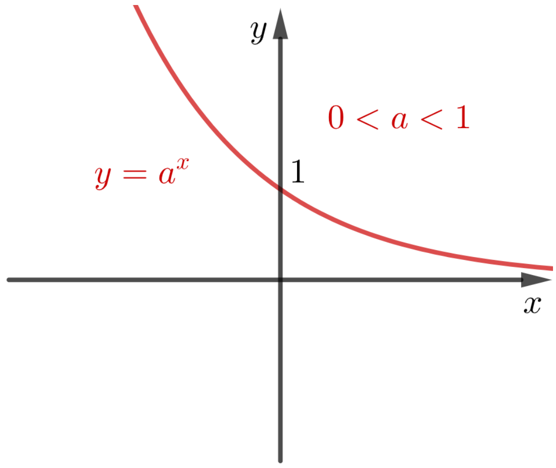
$\Longrightarrow$ Теория и пример решения

9.1 Теория

Показательная функция $y = a^x$ определена при всех x, при $a > 1$ является возрастающей при всех x и принимает значения $y \in (0; +\infty)$. Ее график всегда проходит через точку $(0; 1)$.

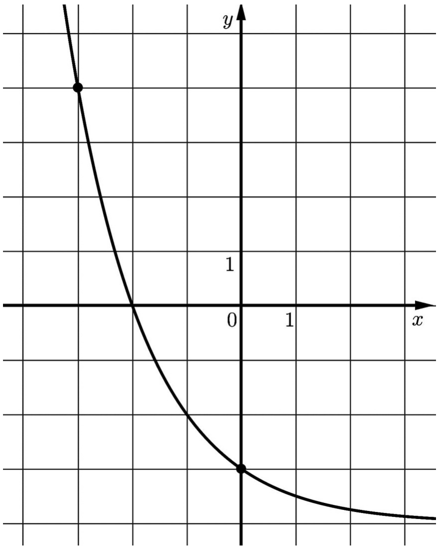


Показательная функция $y = a^x$ определена при всех x, при $0 < a < 1$ является убывающей при всех x и принимает значения $y \in (0; +\infty)$. Ее график всегда проходит через точку $(0; 1)$.



Решим задачу:

На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 12$.



Подставим в уравнение $f(x) = a^x + b$ две выделенные точки графика $(-3; 4)$ и $(0; -3)$.

Решим систему уравнений: $\begin{cases} 4 = a^{-3} + b, \\ -3 = a^0 + b. \end{cases}$

Из второго уравнения получаем, что $b = -3 - 1 = -4$.

Подставим $b = -4$ в первое уравнение и найдем a: $\dfrac{1}{a^3} = 4 - b = 4 + 4 = 8$.

Отсюда получаем $a^3 = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

Получили уравнение $f(x) = \dfrac{1}{2^x} - 4$.

Теперь найдем значение x, при котором $f(x) = 12$:

$$12 = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4,$$

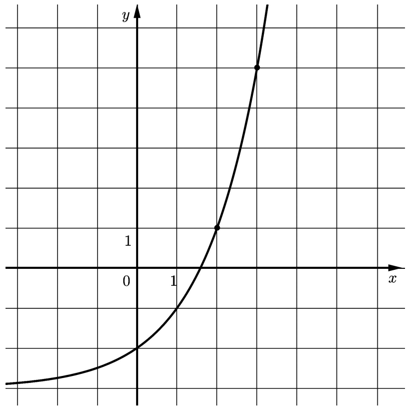
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 12 + 4 = 16,$$

$$2^x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-4} \Leftrightarrow x = -4.$$

9.2 Задачи

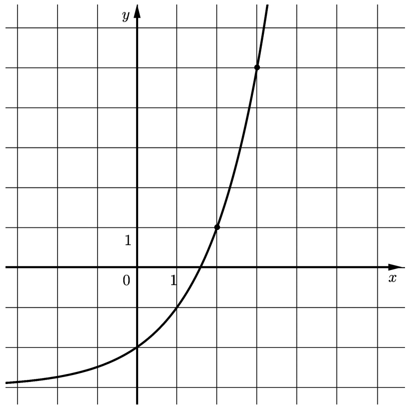
Задача 1

На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(6)$.



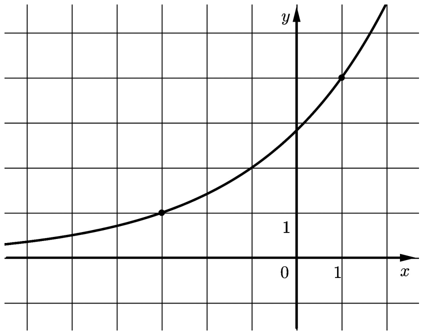
Задача 2

На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 29$.



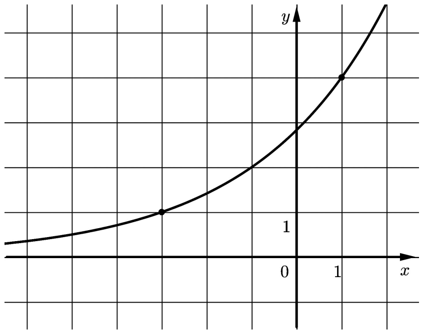
Задача 3

На рисунке изображен график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите $f(-7)$.



Задача 4

На рисунке изображен график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 16$.

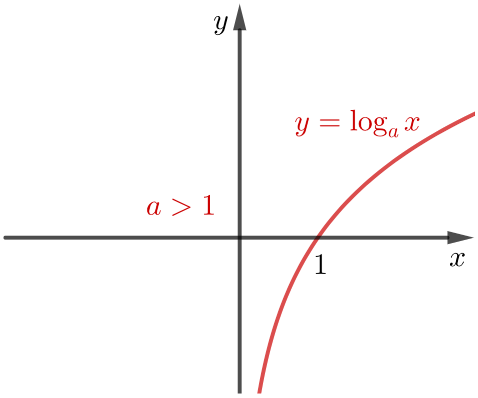


10 Логарифмические функции

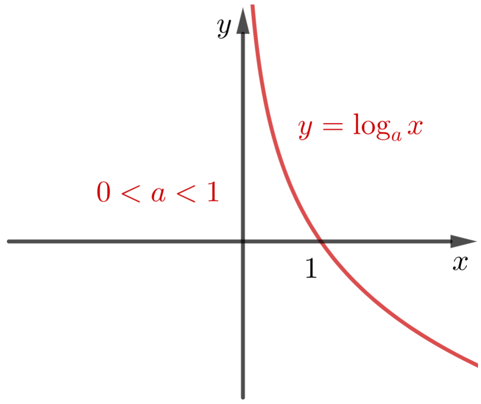
⟹ Теория и пример решения

10.1 Теория

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ является возрастающей, определена при $x > 0$ и принимает значения $y \in (-\infty; +\infty)$. Ее график всегда проходит через точку $(1; 0)$.

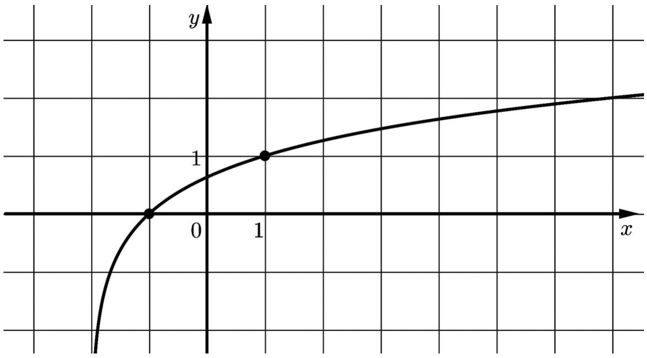


Логарифмическая функция $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ является убывающей, определена при $x > 0$ и принимает значения $y \in (-\infty; +\infty)$. Ее график всегда проходит через точку $(1; 0)$.



Решим задачу:

На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите $f(25)$.



Подставим в уравнение $f(x) = \log_a(x + b)$ две выделенные точки графика $(-1; 0)$ и $(1; 2)$.

Решим систему уравнений: $\begin{cases} 0 = \log_a(b - 1), \\ 1 = \log_a(b + 1). \end{cases}$

Из первого уравнения системы получаем, что $b - 1 = a^0 = 1$, то есть $b = 2$.

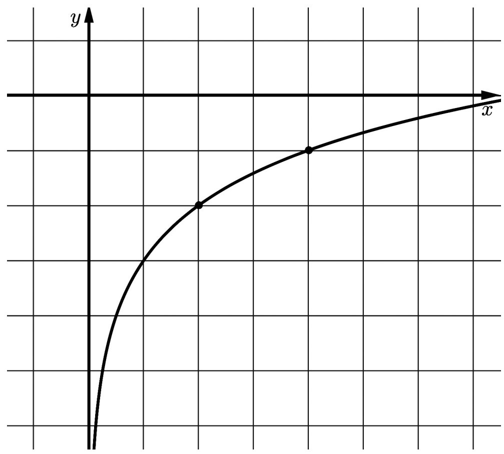
Из второго уравнения получаем, что $a^1 = b + 1 = 3$. Подставим $b = 2$. Отсюда получаем, что $a = 3$.
Получили уравнение $y = \log_3(x + 2)$.
Теперь найдем $f(25)$:

$$f(25) = \log_3(25 + 2) = \log_3(27) = \log_3(3^3) = 3 \log_3 3 = 3.$$

10.2 Задачи

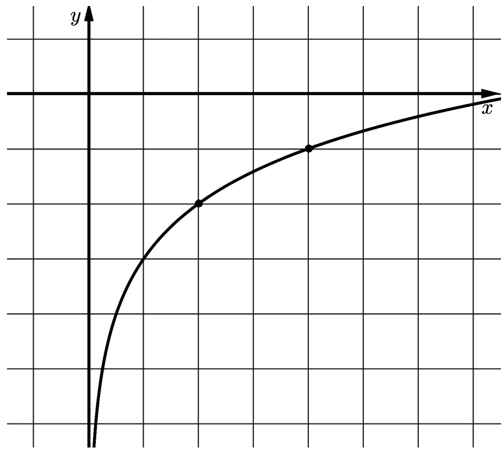
Задача 1

На рисунке изображен график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f(32)$.



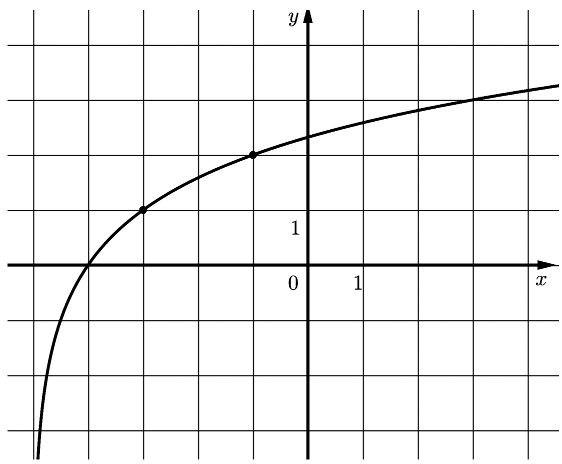
Задача 2

На рисунке изображен график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 1$.



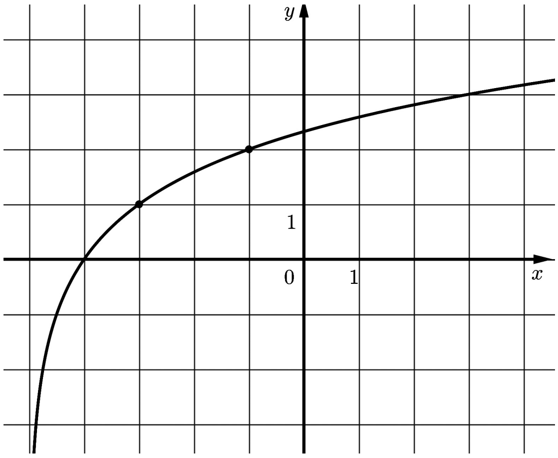
Задача 3

На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите $f(11)$.



Задача 4

На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 4$.



11 Ответы

Прямые

1. -10
2. -7

Как искать пересечение двух прямых

1. -5
2. -11
3. -1,75
4. 2,75

Параболы

1. 31
2. 26
3. 48
4. 31
5. 11

Как искать пересечение параболы и прямой, двух парабол

1. 6
2. 39
3. -8
4. 41
5. 7
6. 62
7. -6
8. 56

Гипербола. Асимптотические точки гиперболы

1. -15
2. 0,15
3. 14
4. 1
5. 9

Пересечение гиперболы и прямой

1. -0,2
2. -10

Иррациональные функции

1. 6,5
2. 1,96

Пересечение корня и прямой

1. 36
2. 15

Тригонометрические функции

1. 2
2. 1,5
3. 1,5
4. -1
5. 2
6. -1,5

Показательные функции

1. 61
2. 5
3. 0,25
4. 5

Логарифмические функции

1. 2
2. 16
3. 4
4. 11