1

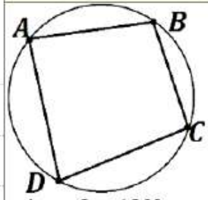
Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 56° и 77°. Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

C3174D

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2020
Основная волна 2014

ПРИЗНАК ВПИСАННОГО 4-КА



$\angle A + \angle C = 180^\circ$

$\angle B + \angle D = 180^\circ$

Ответ: 1 0 3

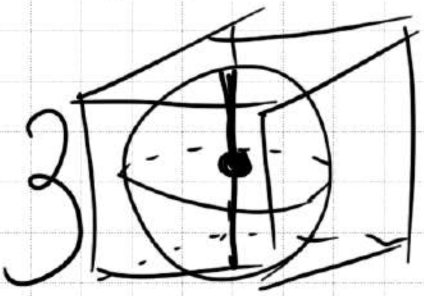
2

В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите объём этого шара, делённый на π.

4DADB3

Источники:

FIPI (старый банк)



$R_ш = 1{,}5$

$V_ш = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{3^3}{2^3} = \frac{9}{2}\cancel{\pi}$

Ответ: 4 , 5

3

В сборнике билетов по химии всего 15 билетов, в 6 из них встречается вопрос по теме «Кислоты». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Кислоты».

58DA7c

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2022
Основная волна 2021
Демо 2022
Демо 2021
Демо 2020
Демо 2019
Основная волна 2019
Демо 2018
Демо 2017
Демо 2016
Демо 2015
Досрочная волна 2014
Основная волна 2013

$$P = \frac{\cancel{6}}{\cancel{15}} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Ответ: 0,4

4

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того,
что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того,
что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,06. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

91D905

Источники:

FIPI (старый банк)
Основная волна 2022
Досрочная волна 2022

P(батарейка забракована)

p(батарейка хорошая, но при этом забракована) — p(батарейка плохая, при этом справедливо забракована)

$$0{,}99 \cdot 0{,}06 + 0{,}01 \cdot 0{,}96$$

$$\frac{594}{10000} + \frac{96}{10000} = \frac{69\cancel{0}}{1000\cancel{0}}$$

Ответ: 0,069

5

Решите уравнение
$\log_{x-2} 16 = 2.$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Источники:
Пробный ЕГЭ 2017

$(x-2)^2 = 16$

$x-2=4$
$x=6$

$x-2=-4$
$\cancel{x=-2}$

Ответ: 6

6

Найдите значение выражения $\log_2 7 \cdot \log_7 4$.

C63976

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2014

$\log_2 7 \cdot \log_7 2^2$

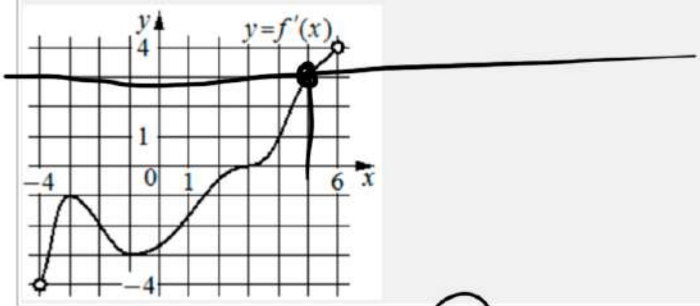
$2 \cdot \log_2 7 \cdot \log_7 2$

$2 \cdot \cancel{\log_2 7} \cdot \frac{1}{\cancel{\log_2 7}}$

Ответ: 2

7

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4;\, 6)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x$ или совпадает с ней.



345AAE

$K_{\text{прямой } y=3x} = 3$

$K_{\text{касательной}} = \boxed{3 = f'(x)}$

Решим графически.

Ответ: 5

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

ВЗАИМНОЕ РАСП. ДВУХ ПРЯМЫХ

$y = k_1x + b_1$
$y = k_2x + b_2$

Если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, то прямые совпадают

ПРИМЕР:
$y = 2x + 7$ и $y = 2x + 7$

Если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые параллельны

ПРИМЕР:
$y = 2x + 7$ и $y = 2x - 5$

Если $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются

ПРИМЕР:
$y = 2x + 7$ и $y = 3x + 7$

8

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 6{,}4 \cdot 10^6$ Па · м^5, где p — давление в газе (в Па), V — объём газа (в м^3), $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объём V (в м^3) будет занимать газ при давлении p, равном $2 \cdot 10^5$ Па.

$2 \cdot 10^5 \cdot V^{\frac{5}{3}} = 6{,}4 \cdot 10^6$

$V^{\frac{5}{3}} = \frac{6{,}4 \cdot \cancel{10^6}\, 10}{2 \cdot \cancel{10^5}}$

$V^{\frac{5}{3}} = 32$

$V^{\frac{5}{3}} = 2^5 \quad \Big|\, {}^{\wedge}\frac{1}{5}$

$V^{\frac{1}{3}} = 2^1 \quad \Big|\, {}^{\wedge}3$

$V = 8$

Ответ: 8

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2019

9

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 187 км. На следующий день он отправился обратно в А со скоростью на 6 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 6 часов. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.

936503

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна 2019
Основная волна 2013

A — B

$\vartheta = x-6$
$t = \frac{187}{x-6}$
$S = 187$

$\vartheta = x$
$t = \frac{187}{x}$
$S = 187$

$t_{медл} - t_{быстр} = 6$

$\frac{187^{(x}}{x-6} - \frac{187^{(x-6}}{x} = 6$

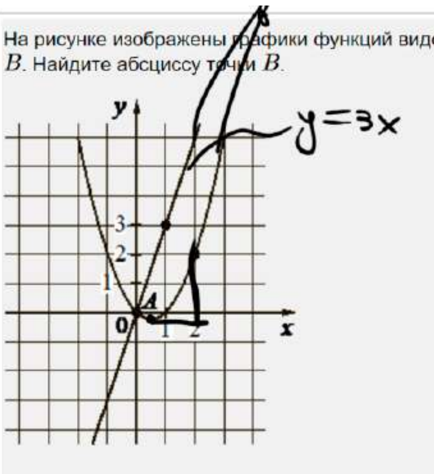
$\frac{\cancel{187}x - \cancel{187}x + 187\cdot\cancel{6}}{x^2-6x} = \cancel{6}\ 1$

$x^2 - 6x = 187$
$x^2 - 6x - 187 = 0$
$x = 17$ $\quad x = -11$

Ответ: 17

10

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



3D9010

Источники:
FIPI (старый банк)

$a = 1$
$c = 0$
$x_0 = 0{,}5 = \frac{-b}{2a}$ $\quad 0{,}5 = \frac{-b}{2}$ $\quad b = -1$

$y = x^2 - x$ $\quad y = 3x$

$x^2 - x = 3x$
$x^2 - 4x = 0$
$x\cdot(x-4) = 0$ $\quad x_A = 0$ $\quad x_B = 4$

Ответ: 4

11 Найдите точку максимума функции $y=(x-4)^2(x+5)+8$.

67E406

Источники:
FIPI (старый банк)

① $y=(x^2-8x+16)(x+5)+8$

$= x^3-8x^2+16x+5x^2-40x+80+8$

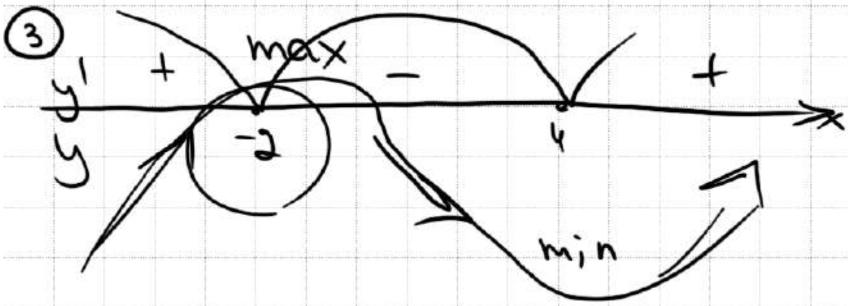
$x^3-3x^2-24x+88$

② $y'=3x^2-6x-24=0 \quad |:3$

$x^2-2x-8=0$

$x=4 \qquad x=-2$

③



Ответ: −2

12 а) Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2019
Ященко 2018 (10 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018

а) $\sin 2x=\cos x$

$2\sin x\cdot\cos x-\cos x=0$

$\cos x\cdot(2\sin x-1)=0$

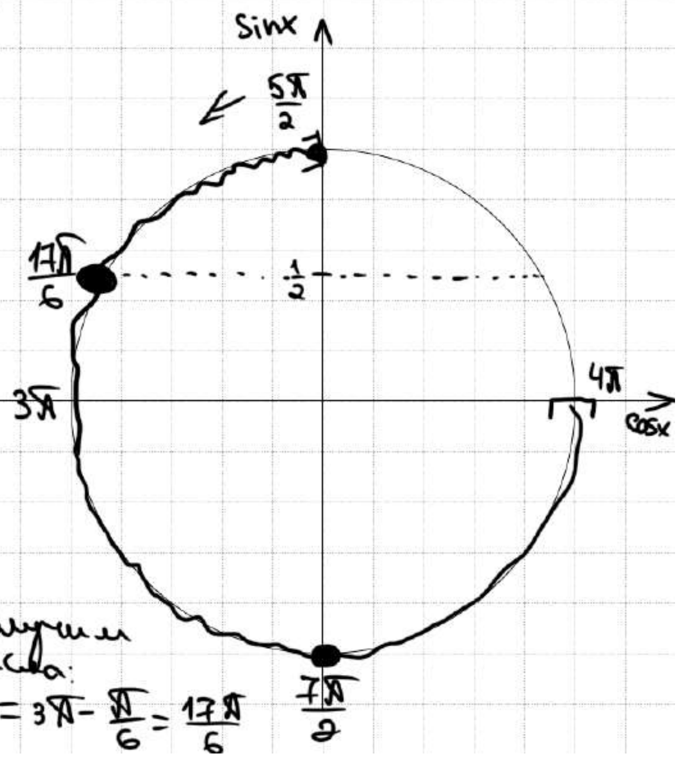
$\cos x=0 \qquad \sin x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \qquad x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$

$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n; n\in Z$
б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$

б) Отберём корни с помощью окр-ти:



Получим числа:

$x=3\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{17\pi}{6}$

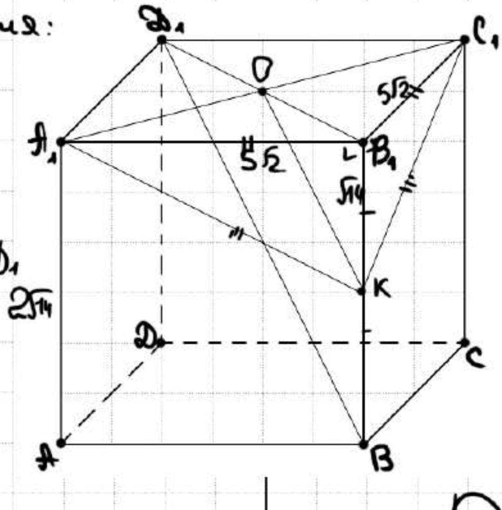
13 Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $5\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{14}$. Точка K – середина ребра BB_1. Через точки K и C_1 проведена плоскость α параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

Источники:
Досрочная волна (Резерв) 2015

а) ① Построение сечения:
① построим C_1K
② Пусть $CK \parallel BD_1$ и $O \in (A_1B_1C_1)$
OK – ср. линия
O – точка пересеч. A_1C_1 и B_1D_1
③ C_1O построим
④ C_1A_1
⑤ A_1K
A_1C_1K – сечение



② $\triangle A_1B_1K = \triangle B_1C_1K$ по СУС
($A_1B_1 = B_1C_1$, т.к. это стороны квадрата
B_1K – общая 90°)

⇒ $A_1K = C_1K$
⇒ $\triangle A_1C_1K$ – р/б ■

б) $P_{A_1C_1K}$ – ?

$A_1C_1 = \sqrt{(5\sqrt2)^2 + (5\sqrt2)^2} = 10$
$A_1K = \sqrt{(5\sqrt2)^2 + \sqrt{14}^2} = 8 = C_1K$

$P = 8 + 8 + 10 = 26$

ОТВЕТ: 26

14 Решите неравенство
$(5x-13)\cdot\log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geq 0.$

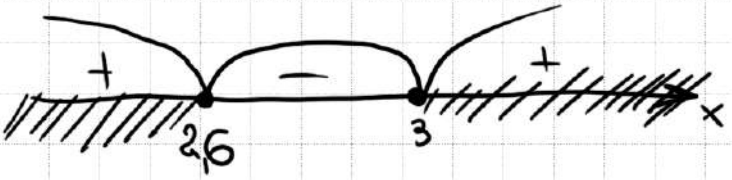
Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2018
Досрочная волна 2016

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ	
БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

$(5x-13)\cdot(\log_{2x-5}(x^2-6x+10) - \log_{2x-5}1) \geq 0$

① $(5x-13)\cdot(2x-5-1)\cdot(x^2-6x+10-1) \geq 0$
② $2x-5>0$
③ $2x-5 \neq 1$
④ $x^2-6x+10>0$

① $(5x-13)(2x-6)(x^2-6x+9) \geq 0$
$(5x-13)(2x-6)\cdot(x-3)^2 \geq 0$

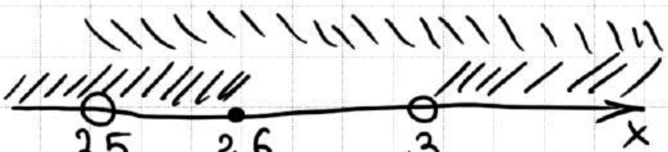


② $x > 2{,}5$

③ $x \neq 3$

④ $x^2 - 6x + 9 + 1 > 0$
$(x-3)^2 + 1 > 0$
x – любое

Найдём пересечение:



ОТВЕТ: $(2{,}5; 2{,}6] \cup (3; +\infty)$

15 В июле планируется взять кредит на сумму 1 342 000 рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Источники:
СтатГрад 28.09.2021
СтатГрад 25.01.2018
СтатГрад 18.04.2018
Ященко 2018
Семёнов 2015
Основная волна 2015

Пусть $S = 1342000$
март — месяц платежа
x — платёж (если брать кредит на 4 года)
y — платёж (если брать кредит на 2 года)
Июль 2020 — месяц отпр. кредита на 2 года

Дата	Сумма долга
и20	S
я21	$1{,}2S$
м21	$1{,}2S - y$
я22	$1{,}2^2\cdot S - 1{,}2y$
м22	① $1{,}2^2\cdot S - 1{,}2y - y = 0$

ОТВЕТ: 316800р.

Дата	Сумма долга
и20	S
я21	$1{,}2S$
м21	$1{,}2S - x$
я22	$1{,}2^2\cdot S - 1{,}2x$
м22	$1{,}2^2\cdot S - 1{,}2x - x$
я23	$1{,}2^3\cdot S - 1{,}2^2\cdot x - 1{,}2x$
м23	$1{,}2^3 S - 1{,}2^2 x - 1{,}2x - x$
я24	$1{,}2^4\cdot S - 1{,}2^3\cdot x - 1{,}2^2 x - 1{,}2x$
м24	② $1{,}2^4\cdot S - 1{,}2^3\cdot x - 1{,}2^2 x - 1{,}2x - x = 0$

$$1342000 : 55 = 24400$$
$$\begin{array}{r} 1342000 \\ -110 \\ \hline 242 \\ -220 \\ \hline 220 \\ -220 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24400 \\ \times\ 72 \\ \hline 488 \\ +1708 \\ \hline 1756800 \end{array}$$

① $1{,}44\cdot S = 2{,}2\cdot y$

$$y = \frac{144\cdot \cancel{10}}{\cancel{100}\cdot 22}S = \frac{\cancel{144}}{\cancel{220}}S = \frac{36}{55}S$$

$$2y = \frac{72}{55}\cdot S = \frac{72}{\cancel{55}}\cdot \overset{24400}{\cancel{1342000}} =$$

② $$\frac{6^4}{5^4}\cdot S = \frac{6^3}{5^3}x + \frac{6^2}{5^2}x\ ^{(5} + \frac{6}{5}x\ ^{(25} + \frac{x}{1}\ ^{(125}$$

$$\frac{6^4}{5^4}\cdot S = x\cdot\left(\frac{216+180+150+125}{125}\right)$$

$$x = \frac{6^4\cdot S\cdot \cancel{125}}{\cancel{5^4}_5\cdot 671} = \frac{6^4\cdot S}{5\cdot 671}$$

$$= \frac{6^4\cdot \overset{2000}{\cancel{1342000}}\ 400}{\cancel{5\cdot 671}} = 1296\cdot 400 = \underline{518400}$$

$4x = 4\cdot 518400$
$\underline{4x = 2073600}$

Найдём разницу в выплатах

$$\begin{array}{r} 2073600 \\ -1756800 \\ \hline 316800 \end{array}$$

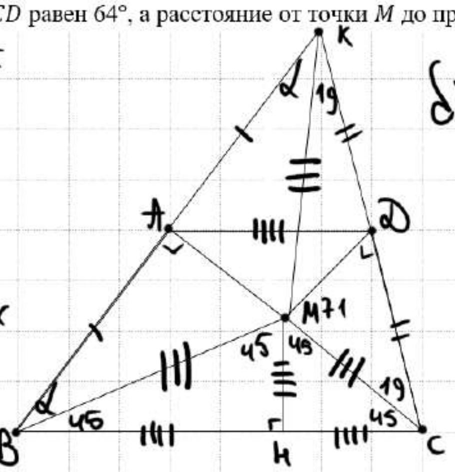
16 В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза меньше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы BAM и CDM прямые.

а) Докажите, что $BM = CM$.
б) Найдите угол ABC, если угол BCD равен 64°, а расстояние от точки M до прямой BC равно стороне AD.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017

а) ① $AB \cap CD = K$

② $AD \parallel BC$
$AD = \frac{1}{2} BC$
$\Rightarrow AD$ – ср. линия $\triangle BCK$
тогда A – середина BK
D – середина CK



③ $\triangle BMK$:
AM – медиана и высота
$\Rightarrow \triangle BMK$ – р/б.
$\triangle CMK$:
DM – медиана и высота
$\Rightarrow \triangle CMK$ – р/б. $BM = KM = CM$

Ответ: 71

б) ① Пусть Mh – высота $\triangle BMC$
$Mh = Bh = Ch = AD$

② $\triangle CMh$ – прям. и р/б.
$\angle MCh = 45$
$\angle DCM = 64 - 45 = 19$
$\angle CKM = 19$
($\triangle CKM$ – р/б)
$\angle MBh = 45$
(т.к. $\triangle MBh$ – прям. и р/б)
Пусть $\angle ABM = \alpha = \angle BKM$

③ Получаем $\triangle BKC$:
$\alpha + 45 + \alpha + 19 + 64 = 180$
$2\alpha = 52$
$\alpha = 26$
$\angle ABC = 26 + 45 = 71$

17 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 + 2ax - a^2 \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

Источники:
Основная волна (резерв) 2020

$$\begin{cases} x^2 + \cancel{y^2} = 4 + 2ax - a^2 \\ y = \pm x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0 \\ y = \pm x \end{cases}$$

Чтобы получить 4 решения системы нужно, чтобы квадратное ур-е давало 2 разл. реш (D>0) и среди корней не было бы нуля

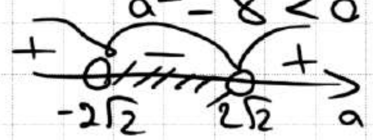
$$\begin{cases} D > 0 \\ 2 \cdot a^2 - 2 \cdot a \cdot 0 + a^2 - 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ① \; (-2a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^2 - 4) > 0 \\ ② \; a \neq \pm 2 \end{cases}$$

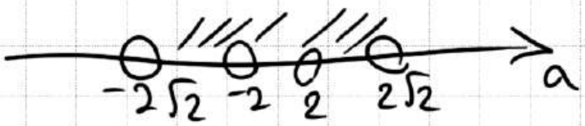
① $4a^2 - 8a^2 + 32 > 0$

$4a^2 < 32$

$a^2 - 8 < 0$



Найдём пересечение:



ОТВЕТ: $(-2\sqrt{2}; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 2\sqrt{2})$

18

а) Представьте число $\frac{33}{100}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых – единица, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

б) Представьте число $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых – единица, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

в) Найдите все возможные пары натуральных чисел m и n, для которых $m \le n$ и $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{14}$.

Источники:
Основная волна 2018
Основная волна (Резерв) 2018

а) ① Разложим 100 на простые мн-ли:

$$\begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$\frac{1}{2}=\frac{50}{100}$ $\qquad \frac{1}{20}=\frac{5}{100}$

$\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$ $\qquad \frac{1}{25}=\frac{4}{100}$

$\frac{1}{5}=\frac{20}{100}$ $\qquad \frac{1}{50}=\frac{2}{100}$

$\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$ $\qquad \frac{1}{100}$

Ответ:	а)
	б)
	в)

$\frac{25}{100}+\frac{5}{100}+\frac{2}{100}+\frac{1}{100}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{50}+\frac{1}{100}$

Или

$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{50}+\frac{1}{100}$

Ответ: а) представим

б) $\frac{15}{91}=\frac{13}{91}+\frac{1}{91}+\frac{1^{\cdot 6}}{91_{\cdot 6}}$

$\frac{15}{91}=\frac{13}{91}+\frac{1}{91}+\frac{1}{546}+\frac{2}{546}+\frac{3}{546}$

$\frac{15}{91}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}+\frac{1}{546}+\frac{1}{273}+\frac{1}{182}$

Ответ: б) представим

18

а) Представьте число $\frac{33}{100}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых – единица, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

б) Представьте число $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых – единица, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

в) Найдите все возможные пары натуральных чисел m и n, для которых $m \le n$ и $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{14}$.

$\frac{1^{\backslash n}}{m}+\frac{1^{\backslash m}}{n}=\frac{1}{14}$

$\frac{n+m}{m\cdot n}=\frac{1}{14} \quad \Big| \cdot 14mn$

$14n+14m=mn$

$14n+14m-nm=0$

$n\cdot(14-m)+14m=0 \quad \Big| -196$

$n\cdot(14-m)+14m-196=-196$

$n\cdot(14-m)-14\cdot(14-m)=-196$

$(14-m)(n-14)=-196$

$(m-14)(n-14)=196$

Произведение каких нат. чисел даст 196?

① $14\cdot 14=196$

② $7\cdot 28=196$

③ $4\cdot 49=196$

④ $2\cdot 98=196$

⑤ $1\cdot 196=196$

Ответ: в) $(28;28)$ $(21;42)$ $(18;63)$ $(16;112)$ $(15;210)$