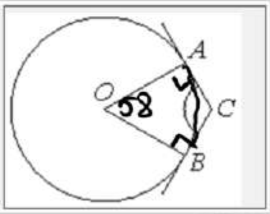
1

Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Меньшая дуга AB равна 58°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



0EB251

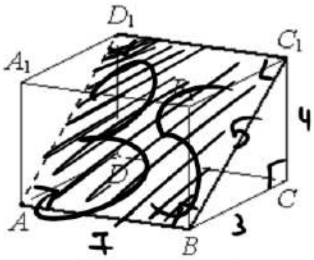
Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

$360 - 2 \cdot 90 - 58 = 122$

Ответ: 122

2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 7$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.



Источники:
FIPI (новый банк)

Ответ: 35

3

В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Эстонии, 7 из Латвии, 7 из Литвы и 10 из Польши. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Литвы.

2002D0

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2021
Основная волна 2019
Основная волна 2018
Основная волна 2017
Основная волна 2013

$$P=\frac{\cancel{7}}{\cancel{28}}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

Ответ: 0,25

4

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

346547

Источники:

FIPI (старый банк)

I автомат	II автомат	
ост	ост	0,83
ост	зак	0,07
зак	ост	0,07
зак	зак	0,03

$0{,}07 + 0{,}03 = 0{,}1$

$0{,}83 + 0{,}07 + 0{,}07 + 0{,}03 = 1$

Ответ: 0,83

5 Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-3}=4$. $\mid {}^{\wedge}3$

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2021
Основная волна 2018
Основная волна 2017
Досрочная волна 2014

0102A1

$$x-3=64$$
$$x=64+3$$
$$x=67$$

ОТВЕТ: 6 7

6 Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{51}}{10}$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

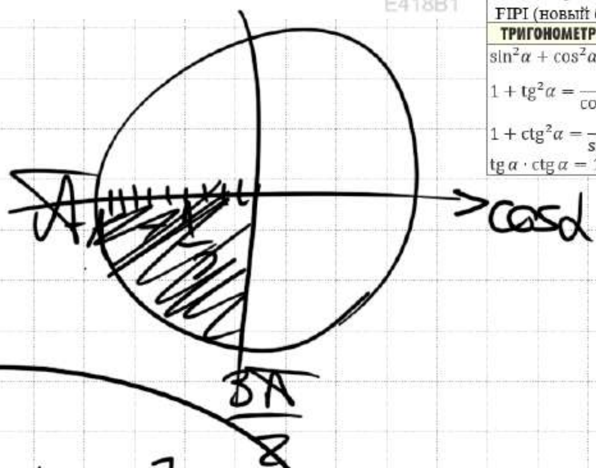
$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$

E418B1

$$\left(-\frac{\sqrt{51}}{10}\right)^2+\cos^2\alpha=1$$
$$\frac{51}{100}+\cos^2\alpha=1$$
$$\cos^2\alpha=\frac{49}{100}$$
$$\cos\alpha=\frac{7}{10}$$

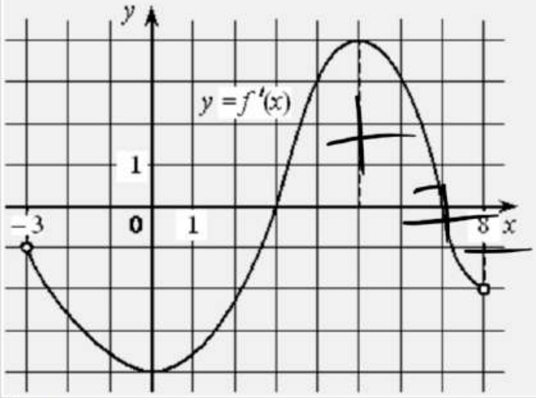


$$\cos\alpha=-\frac{7}{10}$$

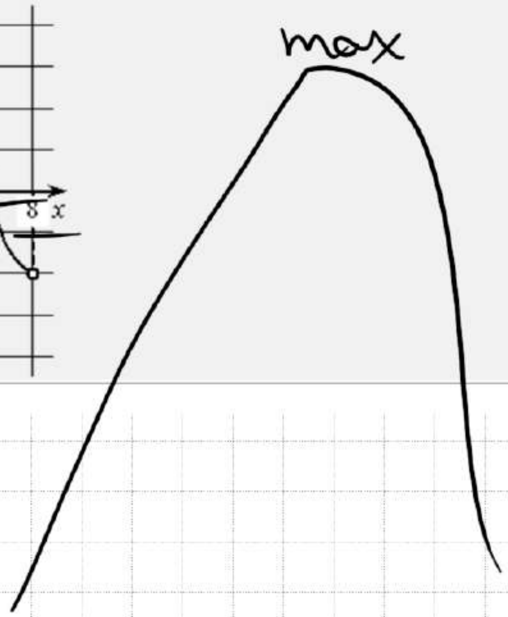
ОТВЕТ: −0,7

7

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



FFD023



Источники:
FIPI (старый банк)

Ответ: 7

8

Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 60$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 18$ км/ч^2. Расстояние (в км) от мотоциклиста до города вычисляется по формуле $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где t – время в часах, прошедшее после выезда из города. Определите время, прошедшее после выезда мотоциклиста из города, если известно, что за это время он удалился от города на 21 км. Ответ дайте в минутах.

Источники:
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Досрочная волна 2014

$$21 = 60 \cdot t + \frac{\cancel{18}^{9} \cdot t^2}{\cancel{2}} \quad \Big| : 3$$

$$3t^2 + 20t - 7 = 0$$

$$D = 400 + 84 = 22^2$$

$$t = \frac{-20 \pm 22}{6}$$

$$t = \frac{1}{3} ч \cdot 60 мин = 20 \text{ мин}$$

Ответ: 20

9 В сосуд, содержащий 10 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

5FDF16

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
СХЕМА ЗАДАЧ НА СПЛАВЫ И СМЕСИ
$Доля_1 \cdot m_1 + Доля_2 \cdot m_2 = Доля_3 \cdot m_3$

$0{,}24 \cdot 10 + 0 \cdot 5 = x \cdot 15$

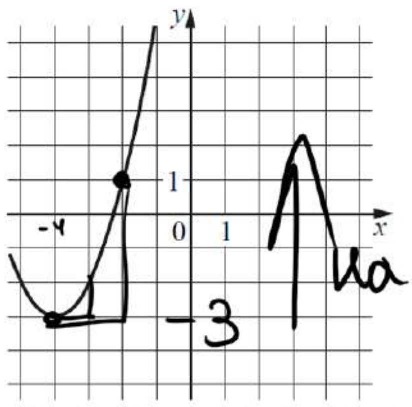
$2{,}4 = 15 \cdot x$

$x = \frac{\cancel{24}\ \cancel{8}\ 4}{\cancel{10} \cdot \cancel{15}\ 5} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$

Ответ: 16

10 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение $f(-12)$.

Источники:
Демо 2022



на 64 вверх

① $a = 1$

② $x_0 = -\frac{b}{2a} = -4 \qquad -\frac{b}{2} = -4 \qquad b = 8$

③ $(-2; 1)$

$1 = 1 \cdot (-2)^2 - 16 + c \qquad c = 13$

$y = x^2 + 8x + 13$

④ $f(-12) = 61$

Ответ: 61

11 Найдите наименьшее значение функции

$y = 3x^2 - 10x + 4\ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{10}{11}; \frac{12}{11}\right]$.

Источники:
Досрочная волна (Резерв) 2018
Пробный ЕГЭ 2015

ПРОИЗВОДНЫЕ

$C' = 0$
$x' = 1$
$(Cx)' = C$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\text{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

① $y' = 3 \cdot 2x - 10 + 4 \cdot \frac{1}{x} = 0$

$$\frac{6x^2 - 10x + 4}{x} = 0$$

$3x^2 - 5x + 2 = 0$

$D = 25 - 24 = 1$

$x = \frac{5 \pm 1}{6}$

$x = 1$ $\quad \cancel{x = \frac{2}{3}}$

② $y(1) = 3 - 10 + 4 \cdot 0 + 11 = 4$

Ответ: 4

12 а) Решите уравнение

$8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2;\ \log_5 20]$.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2017

EE74FD

а) $8^x - 18 \cdot 2^x + \frac{32}{2^x} = 0$

$$\frac{16^x - 18 \cdot 4^x + 32}{2^x} = 0$$

$16^x - 18 \cdot 4^x + 32 = 0$

Пусть $4^x = t$

$t^2 - 18 \cdot t + 32 = 0$

$t = 2$ $\qquad t = 16$

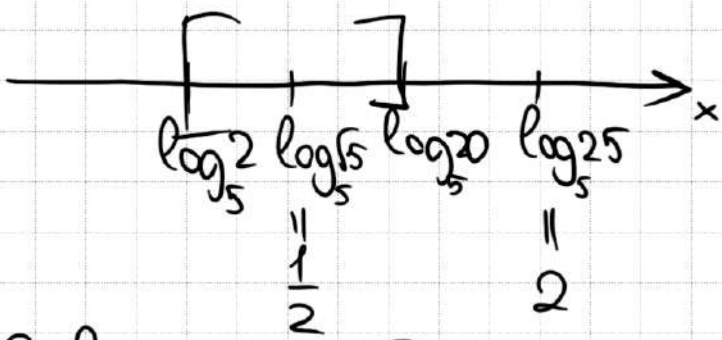
$4^x = 2$ $\qquad 4^x = 16$

$2^{2x} = 2^1$ $\qquad x = 2$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

б)



Сравним 2 и $\sqrt{5}$

$\sqrt{4} < \sqrt{5}$

$\Rightarrow 2 \notin [\ ]$

$\frac{1}{2} \in [\ ]$

Ответ: а) $\frac{1}{2}; 2$

б) $\frac{1}{2}$.

13

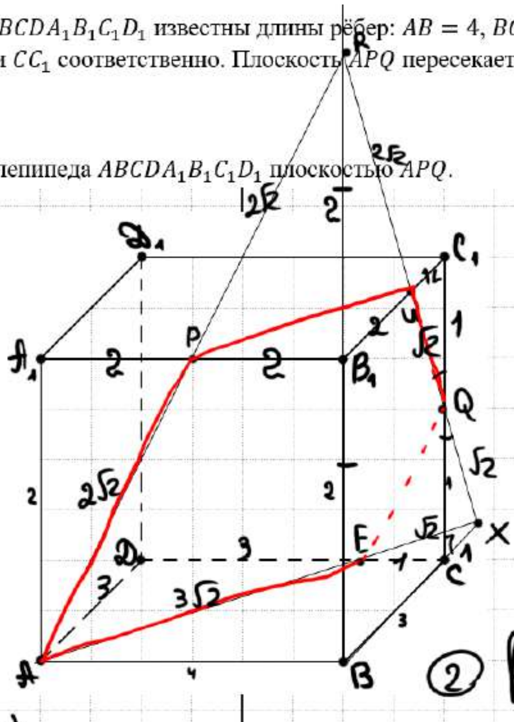
В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке U.

а) Докажите, что $B_1U : UC_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью APQ.

Источники:
Сергеев 2018
Основная волна 2016

а) ① Построение сечения:
Строим AP
$AP \cap BB_1 = R$
$RQ \cap B_1C_1 = U$
$RQ \cap BC = X$
$XA \cap CD = E$
APUQE — сечение



(90° и вертикальные)

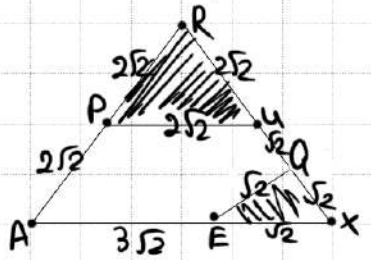
$$\frac{B_1R}{C_1Q} = \frac{2}{1} = \frac{B_1U}{UC_1}$$

② $PB_1 = 2$
(т.к. P — середина A_1B_1)
PB_1 — средняя линия $\triangle ABR$
$\Rightarrow B_1$ — середина BR
$B_1R = 2$

③ $\triangle B_1UR \sim \triangle C_1UQ$ по 2 углам

б) ① $\triangle C_1UQ = \triangle CQX$ по УСУ

② Рассмотрим $\triangle ARX$ — равност.



Ответ: $5{,}5\sqrt{3}$

$$S_{сеч} = S_{ARX} - S_{PRU} - S_{EQX} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}\cdot(4\sqrt{2})^2}{4} - \frac{\sqrt{3}\cdot(2\sqrt{2})^2}{4} - \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}^2}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}\cdot 22}{4} = \frac{11}{2}\sqrt{3}$$

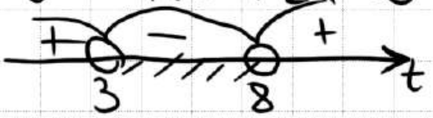
14 Решите неравенство
$(\log_2^2 x - 2\log_2 x)^2 < 11\log_2^2 x - 22\log_2 x - 24.$

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Семёнов 2018
Основная волна (Резерв) 2015

$(\log_2^2 x - 2\log_2 x)^2 - 11\cdot(\log_2^2 x - 2\log_2 x) + 24 < 0$

Пусть $\log_2^2 x - 2\log_2 x = t$

$t^2 - 11t + 24 < 0$

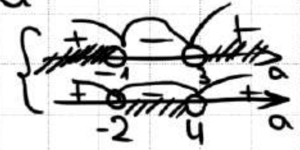


$3 < t < 8$

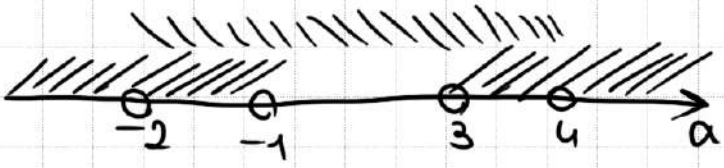
$\begin{cases} t > 3 \\ t < 8 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 > 0 \\ \log_2^2 x - 2\log_2 x - 8 < 0 \end{cases}$

Пусть $\log_2 x = a$

$\begin{cases} a^2 - 2a - 3 > 0 \\ a^2 - 2a - 8 < 0 \end{cases}$



Найдём пересечение:



$-2 < a < -1$ $3 < a < 4$

$\log_2 \frac{1}{4} < \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}$ $\log_2 8 < \log_2 x < \log_2 16$

$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$ $8 < x < 16$

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup (8; 16)$

15 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

$\cdot 1{,}02$

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
– к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Источники:
Основная волна 2021
Основная волна 2018
Основная волна (Резерв) 2018

Первые 20 выплат ар. прогр.
Воспользуемся ф-лой:
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Пусть 7 число - день платежа ...
x – сумма, на которую уменьшается долг в первые 20 месяцев

Дата		Сумма долга
15 дек		300 тыс
1 мес	1	$300 \cdot 1{,}02 = 306$
	7	⇒ была выплата $6 + x$
	15	$300 - x$
2 мес	1	$306 - 1{,}02x$
	7	⇒ Е.В. $6 + 0{,}98x$
	15	$300 - 2x$
3 мес	1	$306 - 2{,}04x$
	7	⇒ Е.В. $6 + 0{,}96x$
	15	$300 - 3x$
...		
19 мес	15	$300 - 19x$
20 мес	1	$306 - 19{,}38x$
	7	⇒ Е.В. $6 + 0{,}62x$
	15	$\boxed{300 - 20x = 100}$
21 мес	1	102
	7	⇒ Е.В. 102
	15	0

$x = 10$

Ответ: 384 тыс.

$$О.С.В. = \frac{6 + x + 6 + 0{,}62x}{\cancel{2}} \cdot \cancel{20}^{10} + 102 =$$

$$= 120 + 16{,}2x + 102 =$$

$$= 222 + 16{,}2 \cdot 10 = 222 + 162 = 384 \text{ тыс.}$$

16

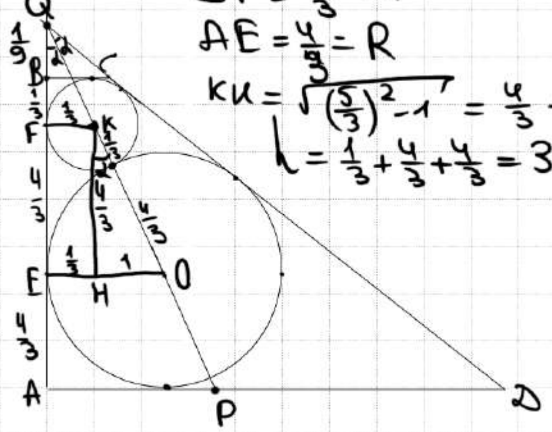
В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон
и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

999FC4

а) Требуется доказать, что $\frac{AP}{PD} = \frac{AQ}{DQ}$



PQ — биссектриса по св-ву касательных пров. из одной точки

$\Rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{AQ}{DQ}$ по т. о биссектрисе

Ответ:

б) ① Найдём высоту трапеции

$BF = \frac{1}{3} = r$

$AE = \frac{4}{3} = R$

$KH = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1} = \frac{4}{3} = FE$

$h = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 3$

② $\triangle QFK \sim \triangle KOH$

$\frac{QF}{KH} = \frac{FK}{OH}$ $\quad \frac{QB + \frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{1}$

$\frac{4}{9} = QB + \frac{1}{3}$

$QB = \frac{1}{9}$

$AQ = 3 + \frac{1}{9} = \frac{28}{9}$

③ $\triangle KHO$: $tg\alpha = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$

$\sin\alpha = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25}$

$tg 2\alpha = \frac{24}{7}$

④ $tg 2\alpha = \frac{24}{7} = \frac{BC}{\frac{1}{9}}$ $\quad BC = \frac{24}{9\cdot 7}$

$= \frac{24}{7} = \frac{AD}{\frac{28}{9}}$ $\quad AD = \frac{24\cdot 28}{9\cdot 7}$

$h = 3$

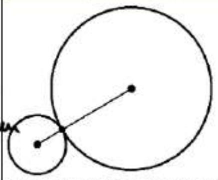
$S = \frac{\frac{24}{9\cdot 7} + \frac{24\cdot 28}{9\cdot 7}}{2}\cdot 3 =$

$= \frac{29\cdot \cancel{24}\,\cancel{12}\,4}{\cancel{63}\cdot\cancel{2}\ \cancel{21}\ 7}\cdot\cancel{3} = \frac{116}{7}$

Источники:

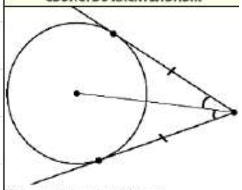
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018
Основная волна 2015

КАСАЮЩИЕСЯ ОКРУЖНОСТИ



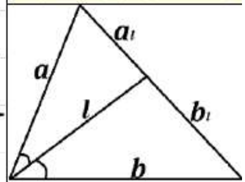
Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку касания

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ



Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

ТЕОРЕМА О БИССЕКТРИСЕ



$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$

17

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - a}$$

имеет единственный корень.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2022
Основная волна 2016

C65FE2

Пусть $2^x = t$ $\quad t>0$

$x = \log_2 t$

$t - a = \sqrt{t^2 - a}$

Данное уравнение должно иметь один положительный корень t

$$\begin{cases} t - a \geq 0 \\ t^2 - a = (t-a)^2 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq a \\ t > 0 \\ \cancel{t^2} - a = \cancel{t^2} - 2at + a^2 \end{cases}$$

это линейное уравнение т.е. оно имеет единств. реш. (только если $a \neq 0$)

Если $a = 0$, то $-0 = -2\cdot 0 \cdot t + 0^2$

$0 \cdot t = 0$

t – любое

=> решений x бесконечно много

=> $a \neq 0$

Если $a \neq 0$, то

$$\begin{cases} t = \frac{a^2 + a}{2a} = \frac{\cancel{a}\cdot(a+1)}{2\cancel{a}} = \frac{a+1}{2} \\ t \geq a \\ t > 0 \end{cases}$$

для $t = \frac{a+1}{2}$

$$\begin{cases} ① \ \frac{a+1}{2} \geq a \quad | \cdot 2 \\ ② \ \frac{a+1}{2} > 0 \\ ③ \ a \neq 0 \end{cases}$$

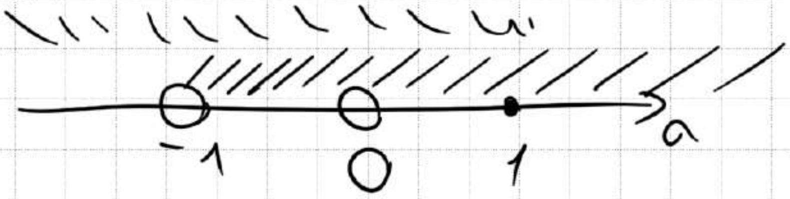
Ответ: $(-1;0) \cup (0;1]$

① $a + 1 \geq 2a$

$a \leq 1$

② $a > -1$

③ $a \neq 0$



18 В школьном живом уголке 4 ученика кормят кроликов. Каждый ученик насыпает нескольким кроликам (хотя бы одному, но не всем) порцию корма. При этом первый ученик даёт порции по 100 г, второй – по 200 г, третий – по 300 г, четвёртый – по 400 г, а какие-то кролики могут остаться без корма.

Источники:
Досрочная волна 2018

а) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили одинаковое количество корма?
б) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все кролики получили разное количество корма?
в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если известно, что каждый ученик засыпал корм ровно четырём кроликам и все кролики получили разное количество корма?

Пусть Андрей → по 100г
Борис → по 200г
Виктор → по 300 г
Гриша → по 400 г

а)

Кр1	Кр2	Кр3	Кр4	Кр5	Кр6	Кр7	Кр8	Кр9	Кр10	Кр11	Кр12	Кр13	Кр14	Кр15
200	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
300	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400

Ответ: а) да

Ответ:	а)
	б)
	в)

б) Сколько различных порций корма может быть у кроликов?

0г – если не покормили
100г – если покормил А
200г – Б
300г – В
400г – Г
500г – А + Г например
600г – Б + Г
700г – В + Г
800г – А + В + Г
900г – Б + В + Г
1000г – А + Б + В + Г

⇒ не более 11 кроликов могут получить разное кол-во корма
⇒ 15 не могут
Ответ: б) нет.

18 В школьном живом уголке 4 ученика кормят кроликов. Каждый ученик насыпает нескольким кроликам (хотя бы одному, но не всем) порцию корма. При этом первый ученик даёт порции по 100 г, второй – по 200 г, третий – по 300 г, четвёртый – по 400 г, а какие-то кролики могут остаться без корма.

а) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили одинаковое количество корма?
б) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все кролики получили разное количество корма?
в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если известно, что каждый ученик засыпал корм ровно четырём кроликам и все кролики получили разное количество корма?

в) ① Андрей насыпал 4×100
Борис 4×200
Виктор 4×300
Гриша 4×400
} 4000 граммов нужно распределить

② Пусть k – искомое число кроликов
$k \leq 11$ (см п.б)

③ 11 кроликов могут получить разное кол-во корма, только если у нас есть хотя бы 5500г, но у нас только 4000г

⇒ $k \leq 10$
10 кроликов могут получить разное кол-во корма, только если у нас есть хотя бы 4500г, но у нас только 4000г

⇒ $k \leq 9$

④ Покажем, что $k = 9$ может быть

Кр1	Кр2	Кр3	Кр4	Кр5	Кр6	Кр7	Кр8	Кр9
0	100	200	300	400	200	200	300	100
					300	400	400	200
						100	100	300
								400