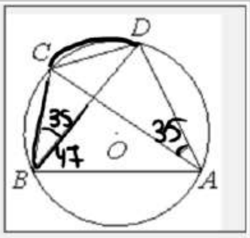
1

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность.
Угол ABC равен 82°, угол ABD равен 47°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.



F62324

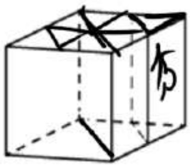
Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2019
Пробный ЕГЭ 2018
Основная волна 2017

Ответ: 35

2

Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 1,5. Найдите объём куба.

Источники:
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2021



$1{,}5 \cdot 8 = 12$

Ответ: 12

3

В сборнике билетов по географии всего 40 билетов, в 14 из них встречается вопрос по теме «Страны Африки». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос по теме «Страны Африки».

0812F6

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2022
Основная волна 2021
Основная волна 2019
Основная волна 2013

$$P = \frac{26}{40} = \frac{13 \cdot 5}{20 \cdot 5} = 0{,}65$$

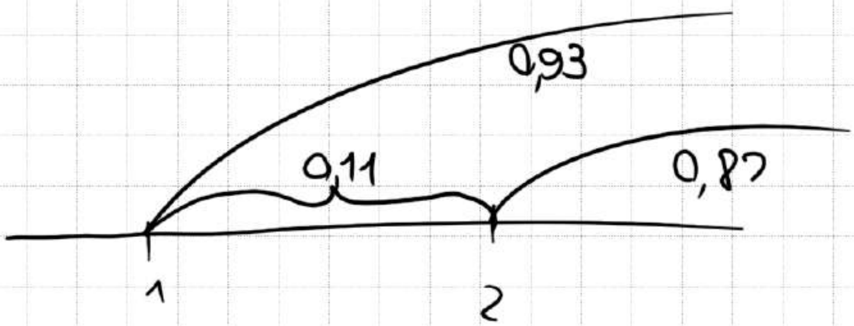
Ответ: 0,65

4

Вероятность того, что новый тостер прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,82. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

CA9F71

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2022
Демо 2021
Досрочная волна 2016



Ответ: 0,11

5 Найдите корень уравнения $(x+12)^2 = 48x$.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

$$x^2 + 24x + 144 = 48x$$
$$x^2 - 24x + 144 = 0$$
$$(x-12)^2 = 0$$
$$x - 12 = 0$$
$$x = 12$$

Ответ: 12

6 Найдите значение выражения $\sqrt{754^2 - 304^2}$.

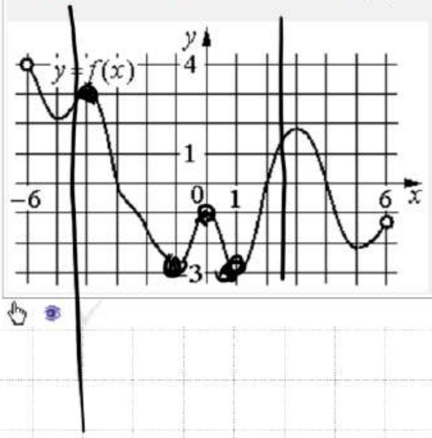
Источники:
Досрочная волна (Резерв) 2019

$$\sqrt{(754-304)(754+304)} = \sqrt{450 \cdot 1058} =$$
$$= \sqrt{2 \cdot 225 \cdot 529 \cdot 2}$$
$$= \sqrt{4 \cdot 225 \cdot 529}$$
$$= 2 \cdot 15 \cdot 23$$
$$= 690$$

Ответ: 690

7

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6;6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-4{,}5;2{,}5]$.



9933A1

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2018

Ответ: 4

8

Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{пок} - \frac{r_{пок} - r_{экс}}{(K+1)^m}$, где $m = \frac{0{,}02K}{r_{пок} + 0{,}1}$, $r_{пок}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{экс}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 24, их средняя оценка равна 0,86, а оценка экспертов равна 0,51.

1B9D7A

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2014

$$m = \frac{0{,}02 \cdot 24}{0{,}86 + 0{,}1} = \frac{0{,}48}{0{,}96} = \frac{1}{2}$$

$$R = 0{,}86 - \frac{0{,}86 - 0{,}51}{(24+1)^{\frac{1}{2}}} = 0{,}86 - \frac{0{,}35}{5}$$

$$0{,}86 - 0{,}07$$

$$= 0{,}79$$

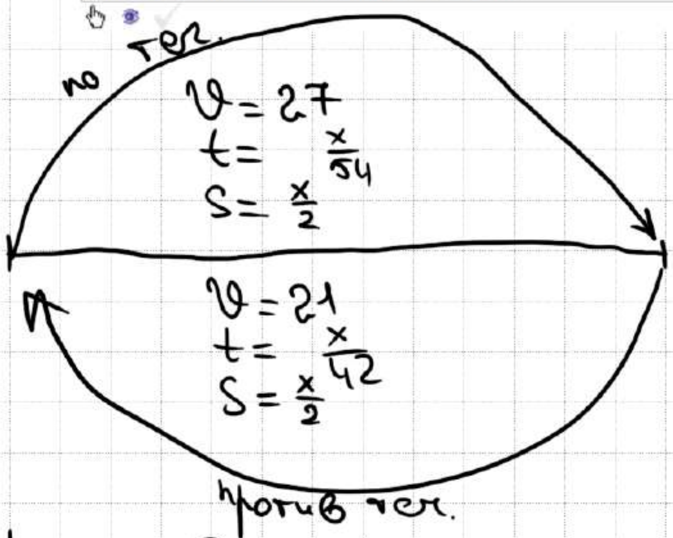
Ответ: 0,79

9

Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 24 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 34 часа после отправления из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

FE9990

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017



$t_{\rightarrow} + 2 + t_{\leftarrow} = 34$

$\frac{x}{54}^{\backslash 42} + \frac{x}{42}^{\backslash 54} = 32$

$\frac{\cancel{96}x}{54 \cdot 42} = \cancel{32} \quad \Big| : 32$

$\cancel{3}x = 54 \cdot \cancel{42}^{14}$

$x = 756$

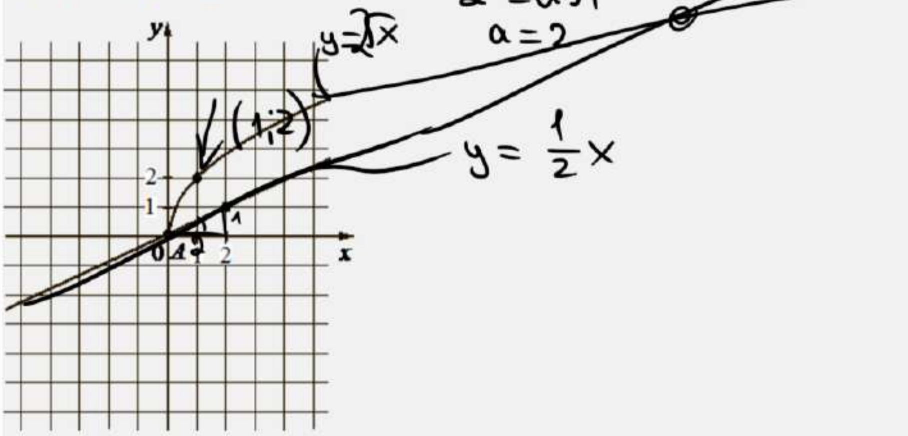
Ответ: 756

10

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.

$2 = a \cdot \sqrt{1}$

$a = 2$



448E90

Источники:
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2022

$\frac{1}{2}x = 2\sqrt{x} \quad \Big| \cdot 2$

$x - 4\sqrt{x} = 0$

Пусть $\sqrt{x} = t$

$t^2 - 4t = 0$

$t \cdot (t - 4) = 0$

$t = 0 \qquad t = 4$

$\sqrt{x} = 0 \qquad \sqrt{x} = 4$

$x = 0 \qquad x = 16$

Ответ: 16

11 Найдите точку максимума функции
$y = \ln(x+3)^7 - 7x - 9.$

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2021
Демо 2019
Демо 2018
Основная волна 2017
Демо 2017
Демо 2016
Демо 2015
Основная волна 2014

① $y = 7 \cdot \ln(x+3) - 7x - 9$

② $y' = 7 \cdot \frac{1}{x+3} - 7 = 0$

$$\frac{\cancel{7}\,1}{x+3} = \cancel{7}\,1$$

$$x+3 = 1$$
$$x = -2$$

Ответ: -2

12 а) Решите уравнение

$$2x\cos x - 8\cos x + x - 4 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Источники:
Основная волна (Резерв) 2017

а) $2\cos x\cdot(x-4)+(x-4)=0$

$(x-4)\cdot(2\cos x+1)=0$

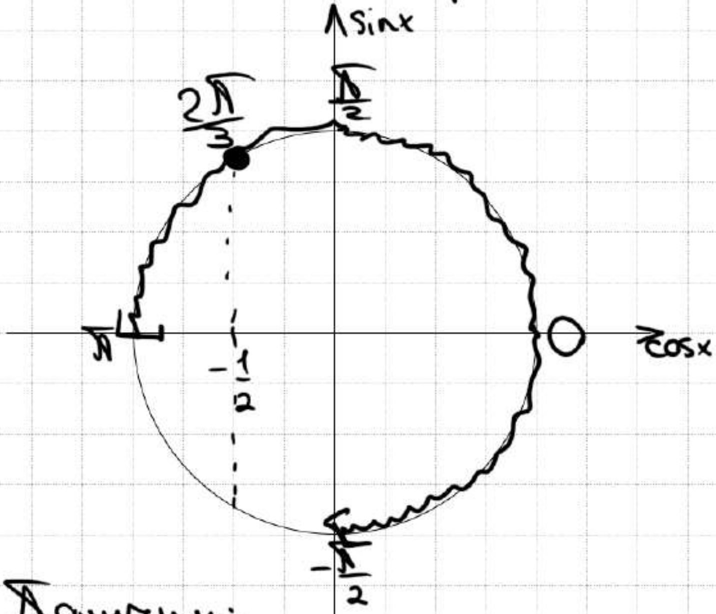
$x=4$ $\qquad$ $\cos x=-\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

б) $4>\pi$

$\Rightarrow 4\notin\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$

Отберём корни для $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ с помощью окр-ти



Получим:
$x=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

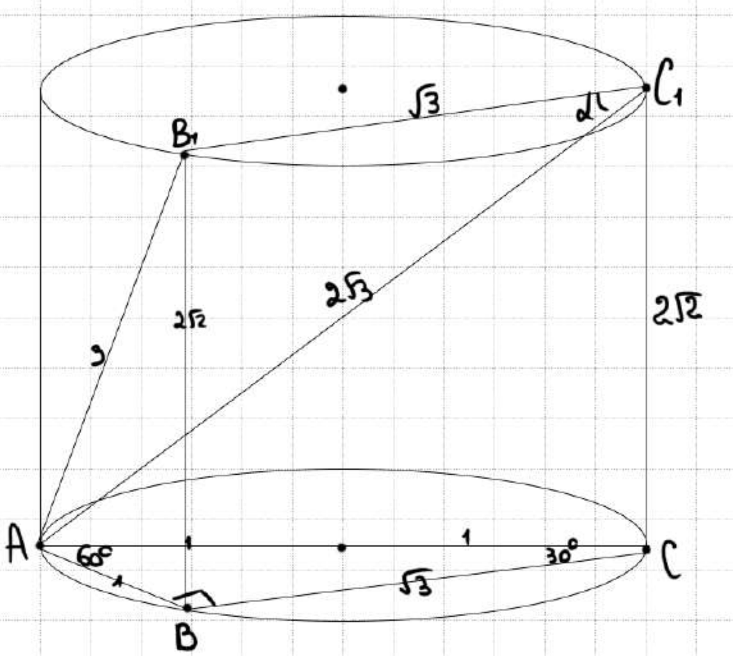
Ответ: а) 4, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n; n\in Z$
б) $\frac{2\pi}{3}$

13 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30°$, $AB = 1$, $CC_1 = 2\sqrt{2}$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен $60°$.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)



$\angle ABC = 90°$, т.к. опир. на диаметр.

а) ① $AC = 2 \cdot AB = 2 \cdot 1 = 2$
(т.к. против угла 30° лежит катет, равн. пол. гип.)

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3}$

$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = 2\sqrt{3}$

$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = 3$

$B_1C_1 = BC = \sqrt{3}$

② $\triangle AB_1C_1$
по т. cos:

$$\cos\angle AC_1B_1 = \frac{3 + 12 - 9}{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} \; \frac{1}{2}$$

$\alpha = 60°$ ■

б) $S_{бок} = 2\pi R h = 2\pi \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$

Ответ: $4\sqrt{2}\pi$.

14 Решите неравенство
$\log_2((x-1)(x^2+2)) \le 1 + \log_2(x^2+3x-4) - \log_2 x$.

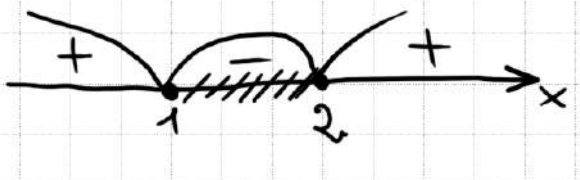
Источники:
Основная волна (Резерв) 2019

$\log_2((x-1)(x^2+2)) + \log_2 x \le \log_2 2 + \log_2 (x-1)(x+4)$

$$\begin{cases} ① \; (x-1)(x^2+2)\cdot x \le 2\cdot(x-1)(x+4) \\ ② \; (x-1)(x^2+2) > 0 \\ ③ \; x > 0 \\ ④ \; (x-1)(x+4) > 0 \end{cases}$$

① $(x-1)(x^3+2x) - 2\cdot(x-1)(x+4) \le 0$

$(x-1)\cdot(x^3 + \cancel{2x} - \cancel{2x} - 8) \le 0$

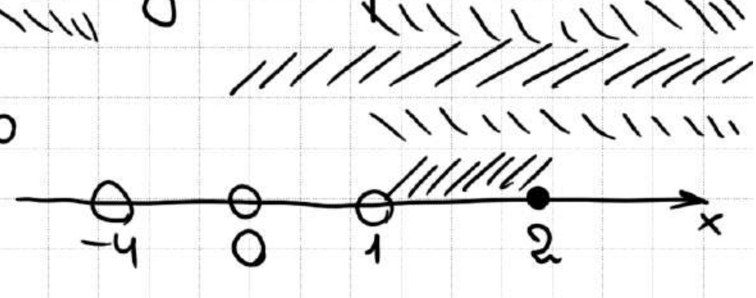


② $x > 1$

③ $x > 0$

④

Найдём пересечение:



Ответ: $(1;2]$

15

15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:

$\cdot 1{,}01$

– 1-го числа k –го месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число k –го месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа k –го месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит?

Источники:
Основная волна (резерв) 2022
Основная волна 2017
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)

Пусть S – сумма долга
7 число – день платежа
n – кол-во месяцев

Дата	Сумма долга
15 янв	S
1 мес: 1ч	$1{,}01 \cdot S$
7	$\Rightarrow$ была выплата $0{,}01S + \frac{S}{n}$
15	$S - \frac{S}{n}$
2 мес: 1	$1{,}01S - \frac{1{,}01S}{n}$
7	$\Rightarrow$ б.в. $0{,}01S + 0{,}99\frac{S}{n}$
15	$S - \frac{2S}{n}$
3 мес: 1	$1{,}01S - \frac{2{,}02S}{n}$
7	$\Rightarrow$ б.в. $0{,}01S + 0{,}98\frac{S}{n}$
15	$S - \frac{3S}{n}$
Ответ:	39

k мес: 15ч — $\frac{S}{n}$; 1ч — $\frac{1{,}01S}{n}$; 7ч — $1{,}01\frac{S}{n}$; 15ч — 0

Выплаты образуют арифм. прогр. Воспользуемся ф-лой суммы арифм. прогр.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{О.С.В.} = 1{,}2 \cdot S$$

$$\frac{\left(0{,}01S + \frac{S}{n} + 1{,}01\frac{S}{n}\right)}{2} \cdot n = 1{,}2S$$

$$\frac{0{,}01\cancel{S}n + 2{,}01 \cdot \cancel{S}}{2} = 1{,}2\cancel{S} \quad | \cdot 2$$

$0{,}01n + 2{,}01 = 2{,}4$
$0{,}01n = 0{,}39$
$n = 39$

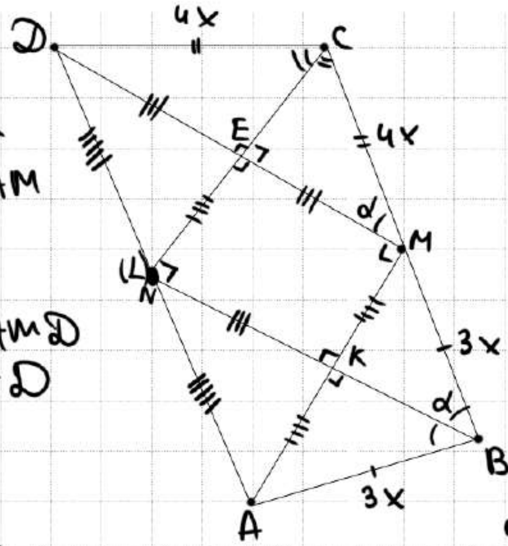
16

Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM : MC = 3 : 4$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 24.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2018
Основная волна (Резерв) 2015



а) ① $\triangle CDM$ – р/б:
CE – бис, мед. и высота
$EL \parallel AM$ (т.к. EL и AM перп. DM)
E – середина DM
=> EL – ср. линия $\triangle AMD$
=> L – середина AD

② $\triangle AMB$ – р/б
BK – бис, мед. и выс.
$KN \parallel DM$ (т.к. KN и DM перп AM)
K – середина AM
=> KN – ср. линия $\triangle ADM$
=> N – середина AD
т.е. L и N совпадают ■

Ответ: 98

б) ① EMKN – прямоуг.
Пусть $\angle KBM = \alpha = \angle CME$

② $\triangle ECM$:
$\cos\alpha = \frac{EM}{4x}$ $\quad EM = 4x\cdot\cos\alpha$

$\triangle BKM$:
$\sin\alpha = \frac{MK}{3x}$ $\quad MK = 3x\cdot\sin\alpha$

$EM\cdot MK = 24 = 12x^2\cdot\sin\alpha\cos\alpha$
$x^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2$
$x^2\cdot\sin 2\alpha = 4$

③ $S_{ABCD} = S_{CDM} + S_{ABM} + S_{ADM}$

$S_{CDM} = \frac{1}{2}\cdot 8x\cdot\cos\alpha\cdot 4x\cdot\sin\alpha$

$S_{ABM} = \frac{1}{2}\cdot 6x\cdot\sin\alpha\cdot 3x\cdot\sin(90-\alpha)$

$S_{ADM} = \frac{8x\cdot\cos\alpha\cdot 6x\cdot\sin\alpha}{2}$

$S_{ABCD} = 16x^2\sin\alpha\cos\alpha + 9x^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 24x^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 49x^2\cdot\sin\alpha\cos\alpha$
$= 49\cdot 2 = 98$

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5-7x}\cdot\ln(9x^2-a^2)=\sqrt{5-7x}\cdot\ln(3x+a)$$

имеет ровно один корень.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017

$\sqrt{5-7x}\cdot\ln(9x^2-a^2)-\sqrt{5-7x}\cdot\ln(3x+a)=0$

$\sqrt{5-7x}\cdot\left(\ln(9x^2-a^2)-\ln(3x+a)\right)=0$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{5-7x}=0\\ \ln(9x^2-a^2)-\ln(3x+a)=0\end{array}\right.\\ 5-7x\geq 0\\ 9x^2-a^2>0\\ 3x+a>0\end{cases}$$

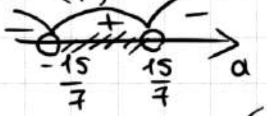
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{7}\\ (3x-a)(3x+a)-(3x+a)=0\end{array}\right.\\ x\leq\frac{5}{7}\\ 9x^2-a^2>0\\ 3x+a>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{7}\\ x=-\frac{a}{3}\\ x=\frac{a+1}{3}\end{array}\right.\\ x\leq\frac{5}{7}\\ 9x^2-a^2>0\\ 3x+a>0\end{cases}$$

$x=\frac{5}{7}$ яв-ся корнем ур-я при a, удовл. $\begin{cases}9x^2-a^2>0\\ 3x+a>0\end{cases}$

$\begin{cases}① \; 9\cdot\frac{25}{49}-a^2>0\\ ② \; \frac{15}{7}+a>0\end{cases}$

① $\left(\frac{15}{7}\right)^2-a^2>0$ ② $a>-\frac{15}{7}$



$\Rightarrow$ при $a\in\left(-\frac{15}{7};\frac{15}{7}\right)$ $x=\frac{5}{7}$ явл. корн. ур

$x=-\frac{a}{3}$ явл. корн. ур-я при a удовл.

$$\begin{cases}x\leq\frac{5}{7}\\ 9x^2-a^2>0\\ 3x+a>0\end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(-\frac{15}{7};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{8}{7};\frac{15}{7}\right)$

$\begin{cases}-\frac{a}{3}\leq\frac{5}{7}\\ a>0\\ 0>0 \text{ нет реш.}\end{cases}\Rightarrow X=-\frac{a}{3}$ не явл. корнем ур-я

$X=\frac{a+1}{3}$ явл. корнем ур. при a, удовл. $\begin{cases}① \; \frac{a+1}{3}\leq\frac{5}{7} \quad |\cdot 21\\ ② \; (a+1)^2-a^2>0\\ ③ \; 2a+1>0\end{cases}$

① $7a+7\leq 15$
$7a\leq 8$
$a\leq\frac{8}{7}$

② $2a+1>0$
$a>-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ при $a\in\left(-\frac{1}{2};\frac{8}{7}\right]$ $x=\frac{a+1}{3}$ явл. корнем ур. я

$X=\frac{5}{7}$ совпадает с $x=\frac{a+1}{3}$ если $\frac{5}{7}=\frac{a+1}{3}$

при $a=\frac{8}{7}$ они совпадут

$x=\frac{5}{7}$ $x=\frac{5}{7}$ $x=\frac{5}{7}$, $x=\frac{a+1}{3}$ $x=\frac{5}{7}$, $x=\frac{a+1}{3}$ $x=\frac{5}{7}$

0к 0к 1к 1к 2к 1 совп. корень 1к 0к 0к

$-\frac{15}{7}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{8}{7}$ $\frac{15}{7}$ a

$a<-\frac{15}{7}$ $a=-\frac{15}{7}$ $-\frac{15}{7}<a<-\frac{1}{2}$ $a=-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}<a<\frac{8}{7}$ $a=\frac{8}{7}$ $\frac{8}{7}<a<\frac{15}{7}$ $a=\frac{15}{7}$ $a>\frac{15}{7}$

18 Шесть различных натуральных чисел таковы, что никакие два из них не имеют общего делителя, большего 1.

Источники:
Основная волна 2019
Пробный ЕГЭ 2017

а) Может ли сумма этих чисел быть равной 39?
б) Может ли сумма этих чисел быть равной 34?
в) Какова их минимальная сумма?

а) Да, например

$1 + 2 + \cancel{3} + 5 + 7 + 11 + 13 = 39$

$1 + 2 + 3 + 5 + 11 + \cancel{} + 17 = 39$

б) ① Среди данных чисел не может быть 2 и более чётных, т.к. у них есть общий делитель 2

② Одно чётное быть не может, т.к. ч + н + н + н + н + н = нечётное, а не 34,

$\Rightarrow$ все 6 чисел были нечётные

③ Найдём сумму шести нат. чисел.

$S \geq 1 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13$

$S \geq 40$

$\Rightarrow S \neq 34$, т.к. даже взяв шесть наим. неч. слагаемых, удовл. усл., сумма будет больше 34

Ответ: б) нет.

ОТВЕТ:	а)
	б)
	в)

в) ① Сумма первых пяти нечётн. $= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

Шестым числом можно взять следующ. неч. 11 или одно чётное число

Берём 2 — самое маленькое нат. чётное число

Тогда $S \geq 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9$

$S \geq 27$

② Но 3 и 9 имеют общий делитель 3 $\Rightarrow S \neq 27$, $S \geq 28$

③ Может ли S быть $\underline{28}$?

Если чётных 0 (но тогда сумма первых шести нечётных превысит 28) или две или четыре или шесть штук чётных (тогда нарушается условие про общ. дел. >1)

$\Rightarrow S \neq 28$

$S \geq 29$

④ Покажем, что $S = 29$ может быть:

$1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 = 29$

Ответ: в) 29.