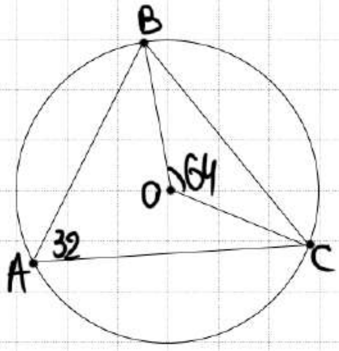
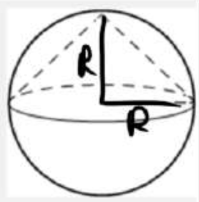
1 Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Угол BAC равен 32°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.

Источники:
Демо 2021
Демо 2020
Демо 2019
Демо 2018
Демо 2017
Демо 2016
Демо 2015



Ответ: 64

2 Конус вписан в шар (см. рисунок). Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 47. Найдите объём шара.



857802

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2021
Досрочная волна 2016

① $V_к = 47 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot R$

$\pi R^3 = 47 \cdot 3$

② $V_ш = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot 47 \cdot \cancel{3} = 188$

Ответ: 188

3

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 21 пассажира, равна 0,93. Вероятность того, что окажется меньше 12 пассажиров, равна 0,49. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 12 до 20.

Источники:
FIPI (старый банк)

...
10
11 — 0,49
12
13
14
15
16 — x
17
18
19
20 — 0,93
21
22
23

Ответ: 0,44

4

В городе 48% взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Источники:
Демо 2022

$$\left.\begin{array}{l}480 - \text{мужчины}\\ 520 - \text{женщины}\end{array}\right\}1000\ \text{чел.}$$

126 – пенсионеры

$0{,}15 \cdot 520 = 78$ – ж-п

$126 - 78 = 48$ – м-п

$$P = \frac{48}{480} = 0{,}1$$

Ответ: 0,1

5

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-6} = 81.$

3A5683

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2019
Основная волна 2019
Основная волна 2017
Пробный ЕГЭ 2015
Основная волна 2014

$$\left(3^{-1}\right)^{5x-6} = 3^4$$

$$3^{-5x+6} = 3^4$$

$$-5x+6 = 4$$

$$2 = 5x$$

$$x = 0{,}4$$

Ответ: 0 , 4

6

Найдите значение выражения $20^{-3,9} \cdot 5^{2,9} : 4^{-4,9}$.

8DCF62

Источники:

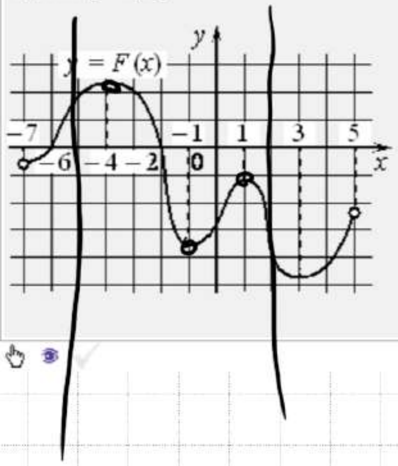
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

$$\frac{5^{-3,9} \cdot 4^{-3,9} \cdot 5^{2,9}}{4^{-4,9}} = 5^{-1} \cdot 4^{1} = \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Ответ: 0 , 8

7

На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;\ 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5;\ 2]$.



1E2DFC

Источники:

FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2013
Пробный ЕГЭ 2013

Ответ: 3

8

Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли.

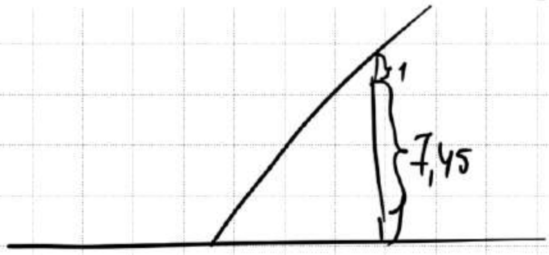
Максимальная высота полёта мячика H (в м) вычисляется по формуле $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos\alpha)$, где

$v_0 = 26$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2).
При каком наименьшем значении угла α мячик пролетит
над стеной высотой 7,45 м на расстоянии 1 м? Ответ дайте в градусах.

B3C046

Источники:

FIPI (старый банк)



$$8{,}45 = \frac{26^2}{4 \cdot 10} \cdot (1 - \cos\alpha)$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{8{,}45 \cdot 4}{26 \cdot 26} = \frac{\cancel{169} \cdot \cancel{4}}{2 \cdot \cancel{13} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{13} \cdot \cancel{2}}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

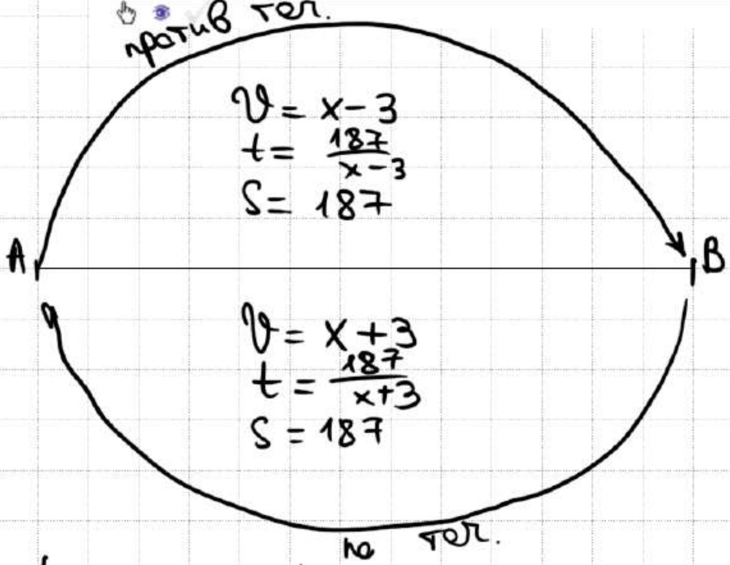
$$\alpha = 60^\circ$$

Ответ: 60

9 Моторная лодка прошла против течения реки 187 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

5CD026

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)



$t_{медл} - t_{быстр} = 6$

$\frac{187^{(x+3}}{x-3} - \frac{187^{(x-3}}{x+3} = 6$

$\frac{\cancel{187x} + 187\cdot 3 - \cancel{187x} + 187\cdot 3}{x^2-9} = 6$

$\frac{187\cdot \cancel{6}}{x^2-9} = \cancel{6}\ 1$

$x^2 - 9 = 187$

$x^2 = 196$

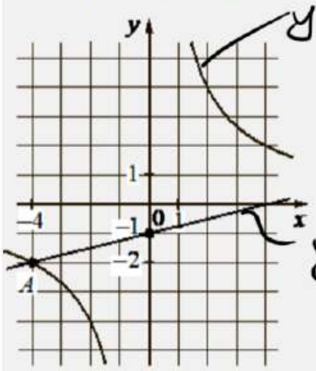
$x = \pm 14$

Ответ: 14

10 На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.

Источники:
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2022

$y = \frac{8}{x}$



$y = \frac{1}{4}x - 1$

CA314B

$\frac{8}{x} = \frac{1}{4}x - 1 \quad \Big| \cdot x$

$\frac{1}{4}x^2 - x - 8 = 0 \quad \Big| \cdot 4$

$x^2 - 4x - 32 = 0$

$x_B = 8 \qquad x_A = -4$

Ответ: 8

11

Найдите наибольшее значение функции

$y = 20\operatorname{tg} x - 20x + 5\pi - 6$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

53E7C1

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2021

ПРОИЗВОДНЫЕ

$C' = 0$
$x' = 1$
$(Cx)' = C$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

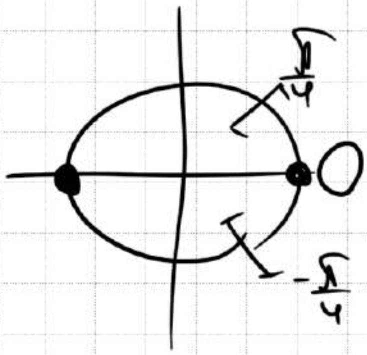
① $y' = 20 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 20 = 0$

$\frac{20}{\cos^2 x} = 20$

$\cos^2 x = 1$

$\cos x = \pm 1$

$x = 0$



② $y(0) = \ldots$

$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \ldots$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 20 \cdot 1 \cancel{- 20 \cdot \frac{\pi}{4} + 5\pi} - 6 = 14$

Ответ: 1 4

12

а) Решите уравнение

$$4 \cdot 16^{\cos x} - 9 \cdot 4^{\cos x} + 2 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Досрочная волна 2022
Основная волна 2017

а) Пусть $4^{\cos x} = t$

$4t^2 - 9t + 2 = 0$

$D = 81 - 32 = 49$

$t = \frac{9 \pm 7}{8}$

$t_1 = 2$

$4^{\cos x} = 2$

$2^{2\cos x} = 2^1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

$t_2 = \frac{1}{4}$

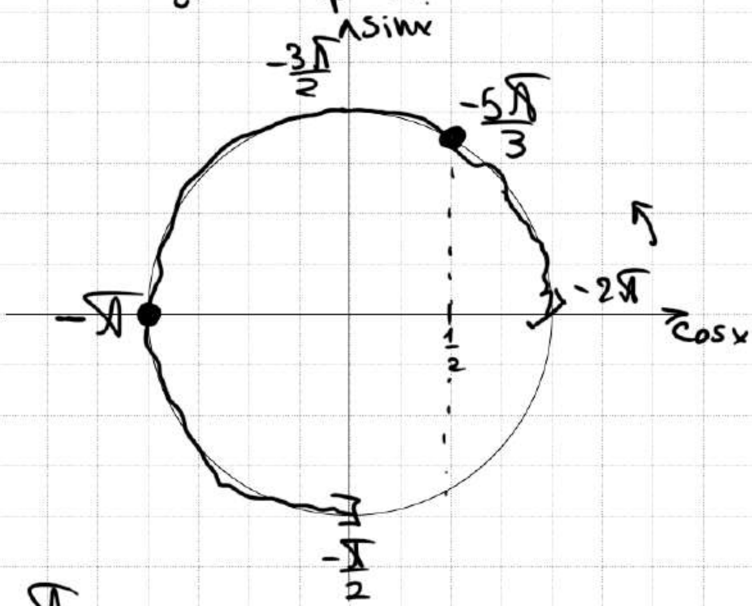
$4^{\cos x} = \frac{1}{4}$

$4^{\cos x} = 4^{-1}$

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2\pi n; n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окр-ти:



Получим числа

$x = -\pi$

$x = -2\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \pi + 2\pi n; n \in Z$
б) $-\pi; -\frac{5\pi}{3}$

13

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона AB основания равна 12, а высота пирамиды равна 1. На рёбрах AB, AC и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = AN = 3$ и $AK = \frac{7}{4}$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

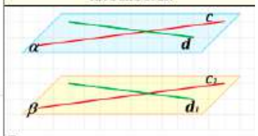
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

0E2FD2

Источники:

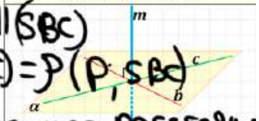
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016

ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ



Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости

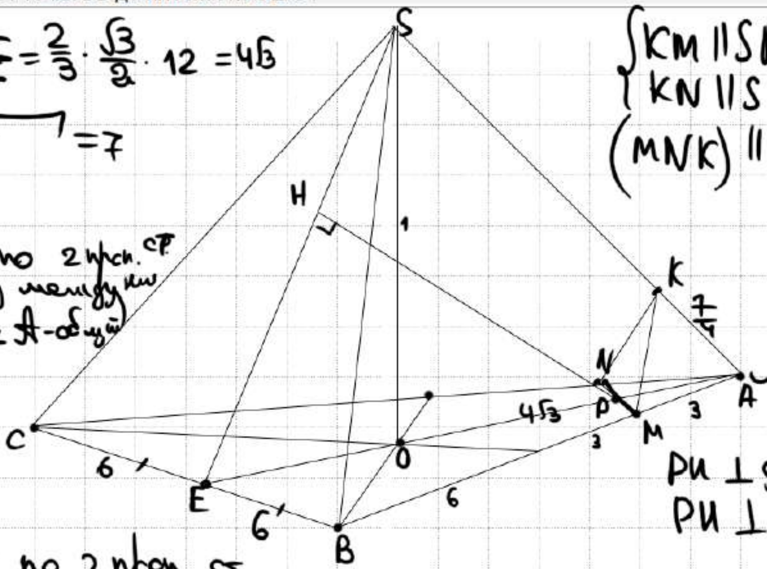
ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

а) ① $AO = \frac{2}{3} \cdot AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 4\sqrt{3}$

$AS = \sqrt{1^2 + (4\sqrt{3})^2} = 7$



$\begin{cases} KM \parallel SB \\ KN \parallel SC \end{cases}$

$(MNK) \parallel (SBC)$

② $\triangle AKM \sim \triangle ASB$ по 2 проп. ст. и углу между ним

$\left(\frac{3}{12} = \frac{\frac{7}{4}}{7} = \frac{1}{4} = k \text{ и } \angle A \text{ - общий}\right)$

$KM \parallel SB$

③ $\triangle ANK \sim \triangle ABC$ по 2 проп. ст. и углу между ними

$\left(\frac{3}{12} = \frac{\frac{7}{4}}{7} = \frac{1}{4} = k \text{ и } \angle A \text{ - общий}\right)$

$KN \parallel SC$

б) ① $MN \parallel (SBC)$

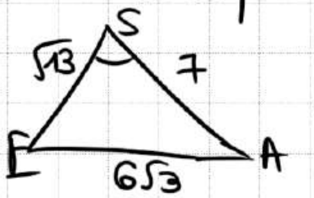
$\rho(M; SBC) = \rho(P; SBC)$

PH – искомое расстояние

$PH \perp SE$ по постр.

$PH \perp BC$ по ТТП

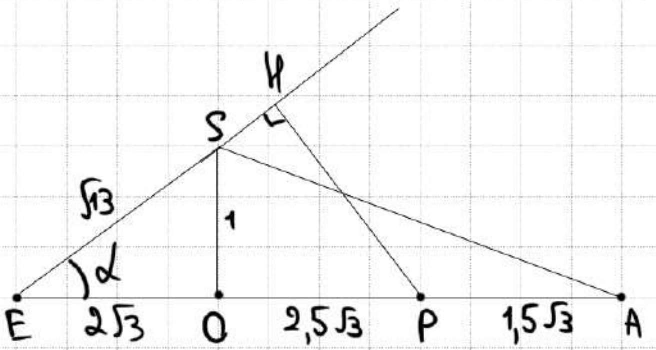
② Рассмотрим $\triangle ASE$:



$\cos \angle ESA = \frac{13+49-108}{\dots} < 0$

$\Rightarrow \triangle ASE$ – тупоуг.

Ответ: $\frac{9}{26}\sqrt{39}$



$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{PH}{4{,}5\sqrt{3}}$

$PH = \frac{4{,}5\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{3}\sqrt{13}}{2 \cdot 13} = \frac{9}{26}\sqrt{39}$

14 Решите неравенство
$2^{x+1} + 0{,}5^{x-3} \geq 17.$

Источники: Основная волна (Резерв) 2018

$2 \cdot 2^x + \left(2^{-1}\right)^{x-3} - 17 \geq 0$

$2 \cdot 2^x + 2^{3-x} - 17 \geq 0$

$2 \cdot 2^x + \frac{8}{2^x} - 17 \geq 0 \quad \Big| \cdot 2^x$

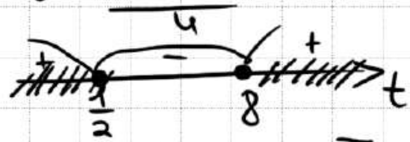
$2 \cdot 4^x - 17 \cdot 2^x + 8 \geq 0$

Пусть $2^x = t$

$2t^2 - 17t + 8 \geq 0$

$D = 15^2$

$t = \frac{17 \pm 15}{4}$



$\left[\begin{array}{l} t \leq \frac{1}{2} \\ t \geq 8 \end{array}\right.$

$2^x \leq 2^{-1}$ $\qquad$ $2^x \geq 2^3$

$x \leq -1$ $\qquad$ $x \geq 3$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

15

Планируется выдать льготный кредит на **целое** число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей.

1F03D1

Источники:

- FIPI (старый банк)
- Ященко 2022 (50 вар)
- Ященко 2022 (36 вар)
- Ященко 2022 (14 вар)
- Ященко 2021 (36 вар)
- Ященко 2020 (14 вар)
- Ященко 2020 (36 вар)
- Ященко 2020 (36 вар)
- Ященко 2020 (50 вар)
- Ященко 2019 (36 вар)
- СтатГрад 07.02.2018
- СтатГрад 20.12.2016

Пусть S – сумма долга
июнь – месяц начисл. %
Дек – месяц платежа
x – выплата в 4-й и 5-й года
янв 21 – месяц начала кредита

Дата	Сумма долга
я 21	S
и	1,2·S
д	⇒ была выплата 0,2S
я 22	S
и	1,2S
д	⇒ б.в. 0,2S
я 23	S
и	1,2S
д	⇒ б.в. 0,2S

я 24	S
и	1,2S
д	б.в. x
я	1,2S − x
и 25	$1,2^2 \cdot S - 1,2x$
д	б.в. x

я 26
$$\begin{cases} 1,2^2 \cdot S - 1,2x - x = 0 \\ О.С.В. < 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,44 \cdot S = 2,2 \cdot x \\ 0,6S + 2x < 7 \end{cases}$$

Выразим x

$$x = \frac{1,44 S \cdot 10}{22} = \frac{144 S}{220}$$

$$x = \frac{36S}{55}$$

$$0,6S + \frac{72S}{55} < 7$$

$$\frac{3S}{5}^{(11} + \frac{72S}{55} < 7$$

$$\frac{105 \cdot S}{55} < 7$$

$$\frac{\cancel{21}\,3}{11} \cdot S < \cancel{7}$$

$$S < \frac{11}{3}$$

$$S < 3\frac{2}{3}$$

$$S_{\text{наиб. цел.}} = 3$$

Ответ: 3 млн

16 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. На боковой стороне AB и большем основании AD взяты соответственно точки F и E так, что FE параллельно CD, а $FC = ED$.

Источники: Досрочная волна 2022

а) Докажите, что $\angle BCF = \angle AFE$.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $ED = 5BF$, $FE = 8$ и площадь трапеции $FCDE$ равна $27\sqrt{11}$.

а) ① Пусть $\angle A = \alpha = \angle D$

$\angle D = \alpha = \angle DCF$

(т.к. $EFCD$ – р/б трап.)

$\angle BCD = 180 - \angle D = 180 - \alpha$

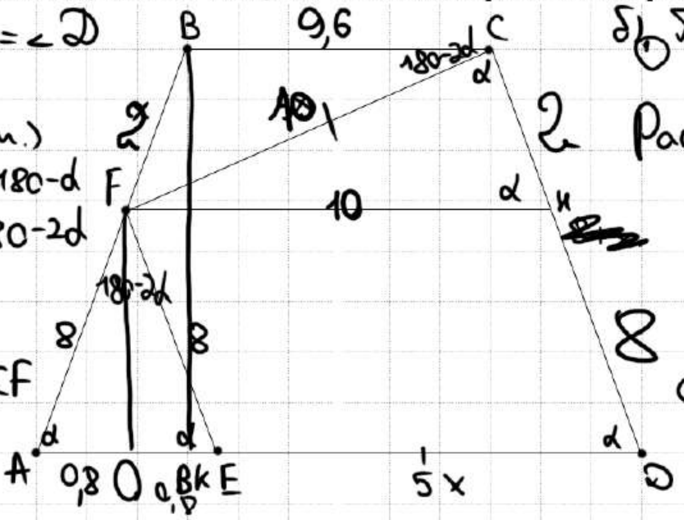
$\angle BCF = 180 - \alpha - \alpha = 180 - 2\alpha$

$\angle AEF = \alpha = \angle D$

(соотв.)

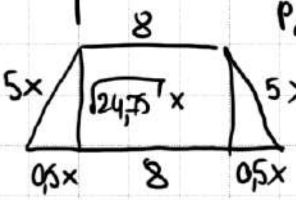
$\angle AFE = 180 - 2\alpha = \angle BCF$

■



б) ① Пусть $BF = x$

② Рассмотрим $FCDE$ – р/б трап.



$S_{FCDE} = \frac{8+8+x}{2}\cdot\sqrt{24{,}75}\cdot x$

$= 27\sqrt{11}$

$\left(\frac{16+x}{2}\right)\cdot\frac{\cancel{\sqrt{99}}^{\,3}}{2}\cdot x = \cancel{27}^{\,9}\cdot\cancel{\sqrt{11}}$

$\frac{(16+x)\cdot x}{4} = 9$

$x^2 + 16x - 36 = 0$

$\cancel{x = -18}$ $x = 2$

Ответ:

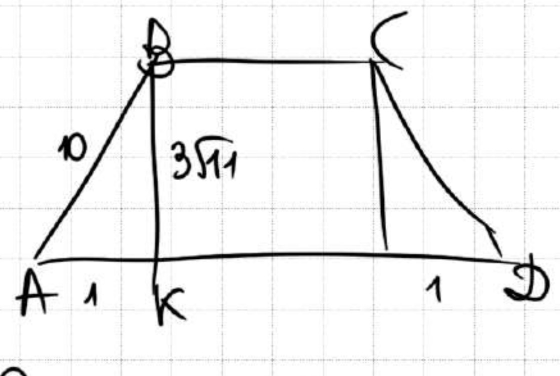
② Построим FK такую, что $FK \parallel ED$

$\triangle FCK \sim \triangle AFE$ по 2 углам

$AE = \frac{8}{10}\cdot 2 = 1{,}6$

$FO = \sqrt{64 - \frac{64}{100}} = \sqrt{\frac{6400-64}{100}} = \sqrt{\frac{64\cdot 99}{100}} = \frac{24}{10}\sqrt{11}$

$BK = \frac{5}{4}\cdot\frac{24}{10}\sqrt{11} = 3\sqrt{11}$



$S_{ABCD} = \frac{9{,}6 + 11{,}6}{2}\cdot 3\sqrt{11} = \frac{21{,}2}{2}\cdot 3\sqrt{11} = 31{,}8\sqrt{11}.$

17

Задание с развернутым ответом

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2+ay^2+2ax+(a+2)y+1=0,\\ xy+1=x+y\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

i Номер: 5180

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)

Упростим второе ур-е системы:

$$xy+1-x-y=0$$
$$x\cdot(y-1)-(y-1)=0$$
$$(y-1)(x-1)=0$$
$$\left[\begin{array}{l} x=1\\ y=1\end{array}\right.$$

Получаем $\begin{cases} ax^2+ay^2+2ax+(a+2)\cdot y+1=0\\ \left[\begin{array}{l} x=1\\ y=1\end{array}\right.\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1\\ ① \; a+ay^2+2a+(a+2)\cdot y+1=0\end{cases}\\ \begin{cases} y=1\\ ② \; ax^2+a+2ax+(a+2)+1=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{\sqrt{11}};-0{,}6\right)\cup(-0{,}6;0)$

Если $a=0$, то $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1\\ 2y+1=0\end{cases}\\ \begin{cases} y=1\\ 3=0\end{cases}\end{array}\right.$ $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ единств. реш. системы

нет реш.

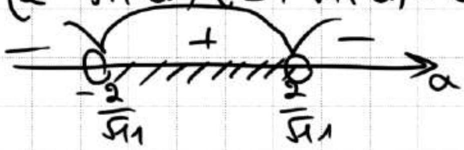
$\Rightarrow a\neq0$

Если $a\neq0$, то уравнение ① и ② должно иметь по 2 реш. каждое и $(1;1)$ не должно являться решением системы

$$\begin{cases} D_① >0\\ D_② >0\\ ③ \; a\cdot1+a\cdot1+2a\cdot1+(a+2)\cdot1+1\neq0\end{cases}$$

$D_① >0$

$$(a+2)^2-4\cdot a\cdot(3a+1)>0$$
$$a^2+\cancel{4a}+4-12a^2-\cancel{4a}>0$$
$$4-11a^2>0$$
$$(2-\sqrt{11}\cdot a)(2+\sqrt{11}a)>0$$



$\approx$

$D_② >0$

$$(2a)^2-4\cdot a\cdot(2a+3)>0$$
$$4a^2-8a^2-12a>0$$
$$-4a^2-12a>0 \quad |:(-4)$$
$$a^2+3a<0$$

③ $5a\neq-3$

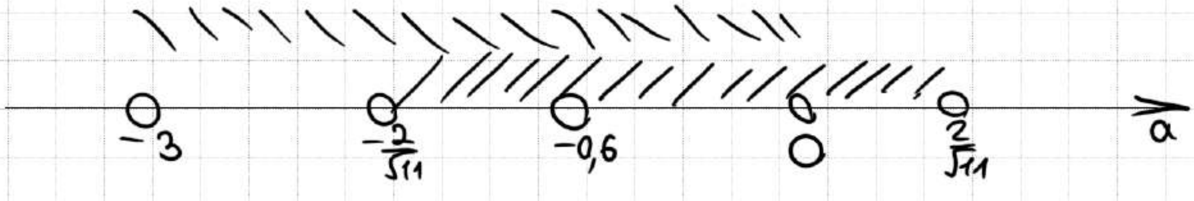
$a\neq-0{,}6$

Сравним

$$-\frac{2}{\sqrt{11}} < -\frac{3}{5}$$

$$-\sqrt{\frac{4^{\backslash 25}}{11}} < -\sqrt{\frac{9^{\backslash 11}}{25}}$$

$$-\sqrt{\frac{100}{275}} < -\sqrt{\frac{99}{275}}$$



18 С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

Источники: Основная волна (Резерв) 2017

а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.
б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?
в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трёхзначного числа?

а) 2 10 8 12 4 11 7

Ответ: а) 2847

б) 3 7 4 9 4
не подходит

4 94 1
не подходит

4 941 2
не подходит

4 9412 8
не подходит

Не может, т.к. на месте третьей цифры нет подходящего числа.

в) ① 9 18 9 18 9 н:27 ч:18 1о9

② 9 18 9 17 8 н:26 ч:17 9 на

⇒ при уменьшении посл. цифры разность чётных и нечётных не меняется, т.е. 990–999 не подходят

9 17 8 17 9 н:26 ч:16 10

При уменьш. посл. цифры разность остается 10 т.е. 980–999 не подходят

9 16 7 16 9 н:25 ч:14

9167169 – наиб. кратное 11 число, получ. из трёхзначного

ОТВЕТ:	а) 2847
	б) нет
	в) 9167169