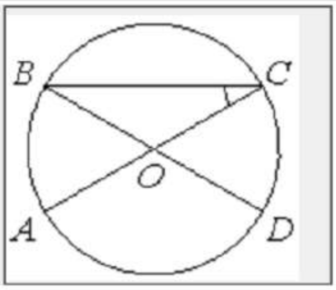
ЗАДАНИЯ 1

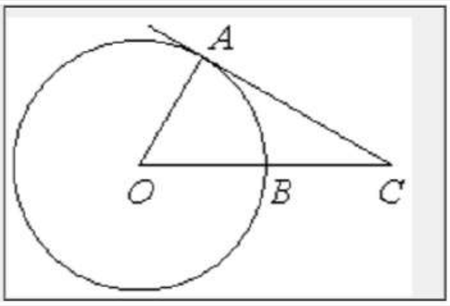
Окружность

Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O. Угол AOD равен 114°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.



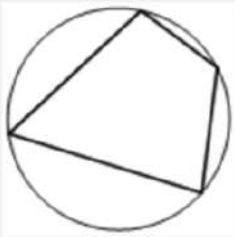
29D9FB

Угол ACO равен 27°, где O — центр окружности. Его сторона CA касается окружности. Сторона CO пересекает окружность в точке B (см. рис.). Найдите величину меньшей дуги AB окружности. Ответ дайте в градусах.



A6532B

Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 56° и 77°. Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



C3174D

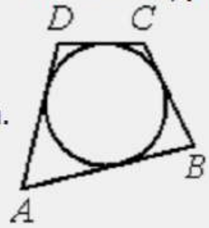
Введите ответ в поле ввода

Найдите центральный угол, если он на 28° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.

Введите ответ

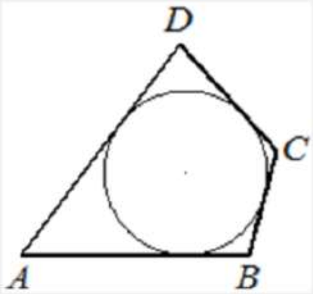
Номер: 5149 Статус задания: НЕ РЕШЕНО ОТВЕТИТЬ

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 13$, $BC = 7$ и $AD = 11$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



31765C

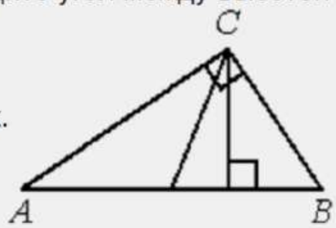
В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 22$, $CD = 17$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



CB8C97

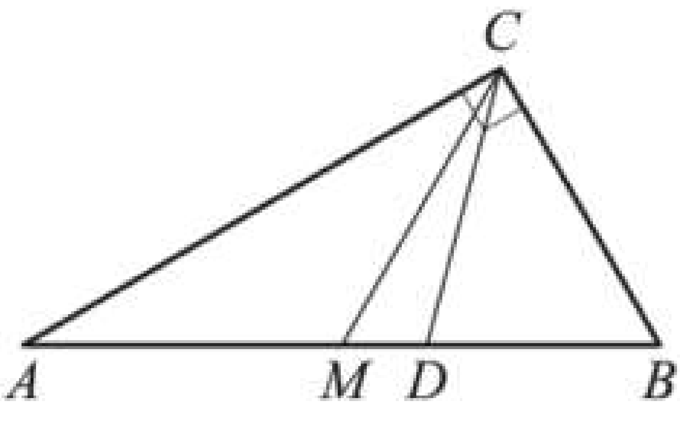
Прямоугольный треугольник

Острые углы прямоугольного треугольника равны 84° и 6°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

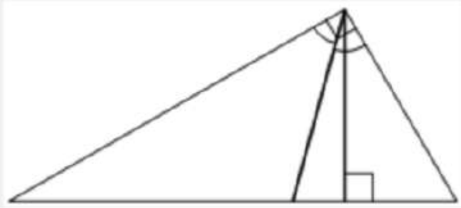


F1150D

Острый угол B прямоугольного треугольника равен 66°. Найдите угол между биссектрисой CD и медианой CM, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



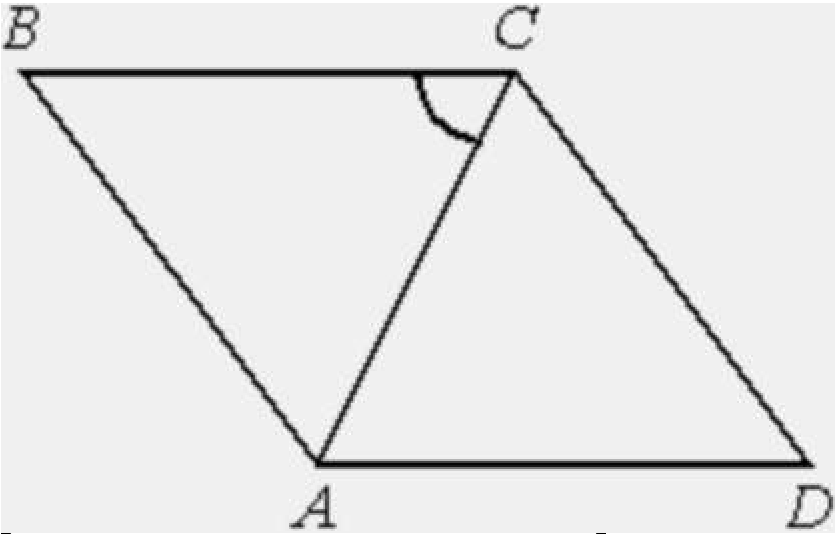
В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными
из вершины прямого угла, равен 14°. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.



70BEF2

Ромб

Угол между стороной и диагональю ромба равен 54°. Найдите острый угол ромба.



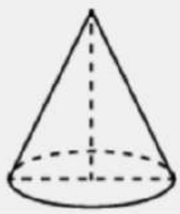
ЗАДАНИЯ 2

Конус

Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличить в 8 раз, а высоту оставить прежней?

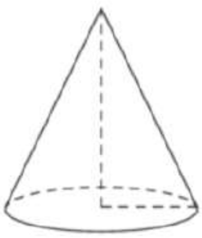
F9E66F

Диаметр основания конуса равен 40, а длина образующей – 25. Найдите высоту конуса.



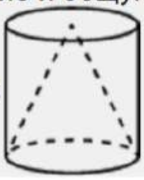
50FCF3

Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?



Конус и цилиндр

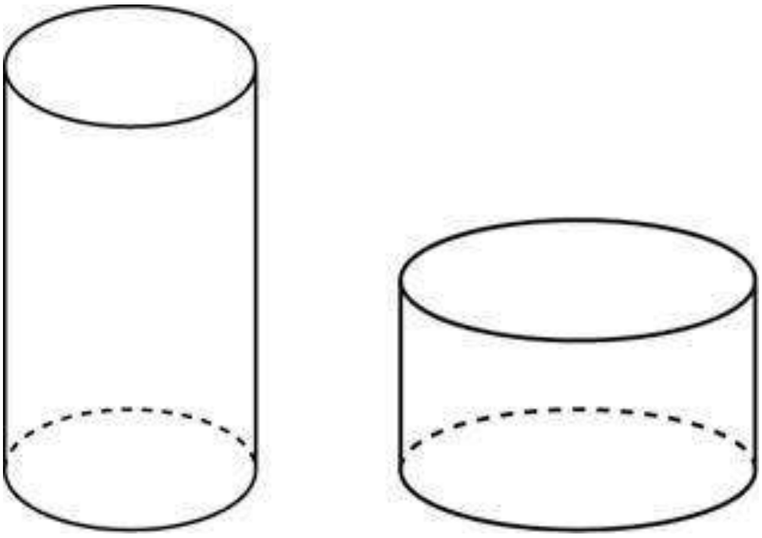
Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 57.



267D7F

Цилиндр

Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 12. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания в два раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.



Цилиндр и шар

Шар вписан в цилиндр.

Площадь поверхности шара равна 48. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

AFD872

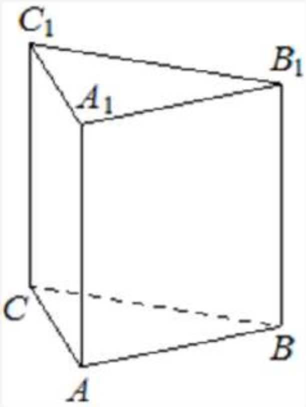
Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 50.

Найдите объём цилиндра.

FCCBC9

Пирамида

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 4. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, A_1, B_1, C_1.

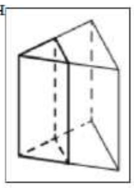


FBF62F

Призма

Введите ответ в поле ввода

Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 48, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.



Введите ответ

i **Номер: 4374** Статус задания: **НЕ РЕШЕНО** ОТВЕТИТЬ

ЗАДАНИЯ 3

Классические

В соревнованиях по толканию ядра участвуют 3 спортсмена из Дании, 6 из Швеции, 4 из Норвегии и 7 из Финляндии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Норвегии.

F805D7

В среднем из 900 садовых насосов, поступивших в продажу, 27 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

FE2ADA

В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос про Александра Второго. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос про Александра Второго.

89584F

В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 16 из них встречается вопрос по логарифмам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по логарифмам.

E31481

В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

4c1895

На конференцию приехали 2 учёных из Дании, 7 из Польши и 3 из Венгрии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвёртым окажется доклад учёного из Венгрии.

60E929

В чемпионате по гимнастике участвуют 70 спортсменок: 25 из США,
17 из Мексики, остальные из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.

2EBA48

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 4 прыгуна из Италии и 6 прыгунов из Мексики. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двадцать четвёртым будет выступать прыгун из Италии.

266249

ЗАДАНИЯ 4

Только ФИПИшные

Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,8. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа **не перегорит**.

0ECDD4

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того,
что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того,
что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,06. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

91D905

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень
и не попадёт в три последние.

F3F0DF

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

346547

В коробке 11 синих, 6 красных и 8 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

27C71D

Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпало
ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма
очков равна 8».

97B50F

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,82. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.

66F056

Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,5 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не меньше 0,7?

30D3F2

ЗАДАНИЯ 5

Показательные

Найдите корень уравнения $7^{-6-x} = 343$.

7377CE

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} = 8^x$.

C36F5E

Найдите корень уравнения $3^{2x-16} = \dfrac{1}{81}$.

A1ADF2

Иррациональные

Найдите корень уравнения $\sqrt{28-2x} = 2$.

D6D480

Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+3} = 5$.

0DAFF4

Уравнения с нечётными степенями

Найдите корень уравнения $(x+3)^9 = 512$.

F1A1A3

ЗАДАНИЯ 6

Тригонометрия

Введите ответ в поле ввода

Найдите значение выражения $\dfrac{7\sin 154^\circ}{\cos 77^\circ \cdot \cos 13^\circ}$.

Введите ответ

i **Номер: 5057** Статус задания: **НЕ РЕШЕНО** ОТВЕТИТЬ

Найдите значение выражения $\dfrac{16\sin 98^\circ \cdot \cos 98^\circ}{\sin 196^\circ}$.

F6B664

Найдите значение выражения $7\sqrt{2}\sin\frac{15\pi}{8}\cdot\cos\frac{15\pi}{8}$.

7C4023

Найдите значение выражения $\sqrt{2}-2\sqrt{2}\sin^2\frac{15\pi}{8}$.

0DC0A0

Найдите значение выражения $\sqrt{108}\cos^2\frac{\pi}{12}-\sqrt{27}$.

D78270

Найдите значение выражения $3\sqrt{2}\cos^2\frac{9\pi}{8}-3\sqrt{2}\sin^2\frac{9\pi}{8}$.

A68E99

Найдите значение выражения $\frac{21\left(\sin^2 66^\circ-\cos^2 66^\circ\right)}{\cos 132^\circ}$.

4F534A

Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{4\sqrt{41}}{41}$ и $\alpha\in\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

BEF0CB

Логарифмы

Найдите значение выражения $\log_2 240-\log_2 3{,}75$.

F6A353

Степени

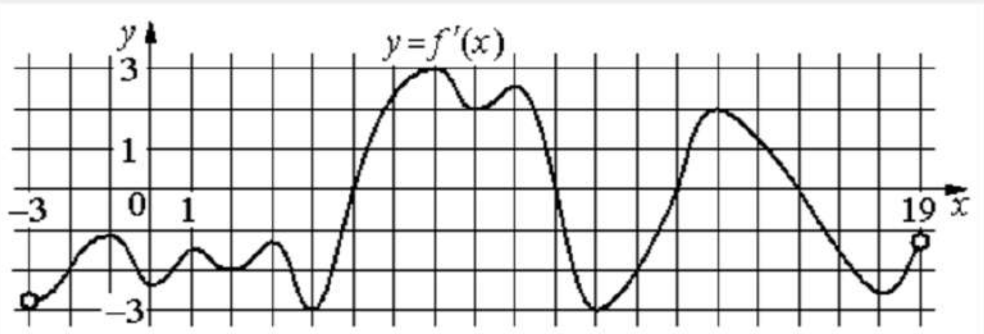
Найдите значение выражения $\left(5^4\right)^6:5^{22}$.

4EF06F

ЗАДАНИЯ 7

Дан график производной

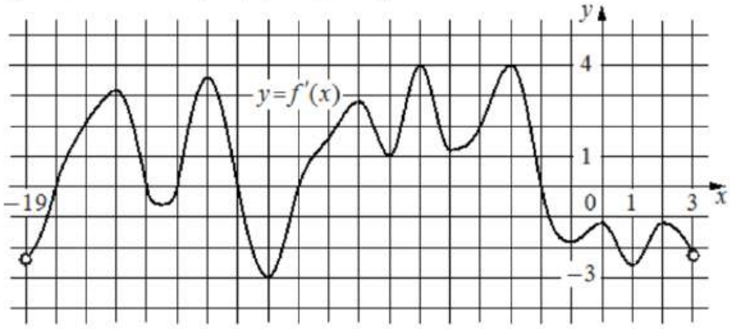
На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;\ 19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2;\ 15]$.



25CE62

Введите ответ в поле ввода

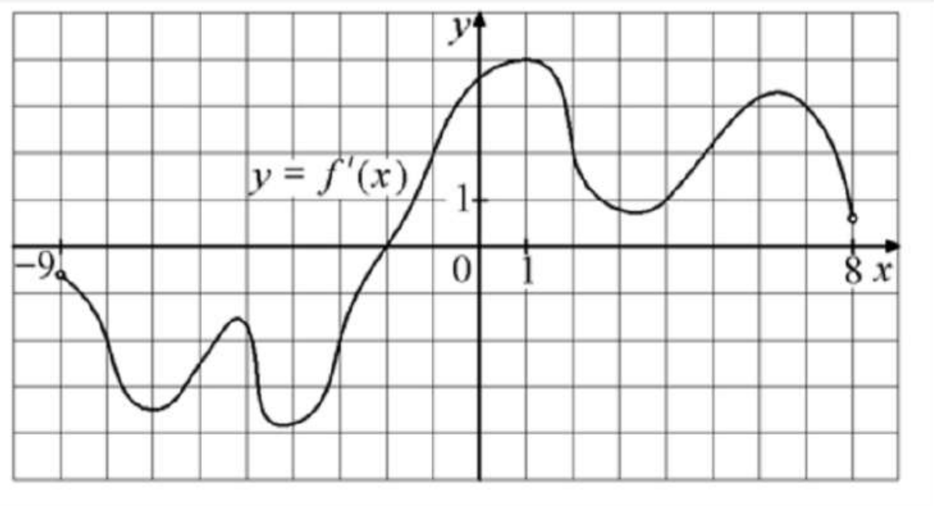
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-19;\ 3)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-17;\ -4]$.



Введите ответ

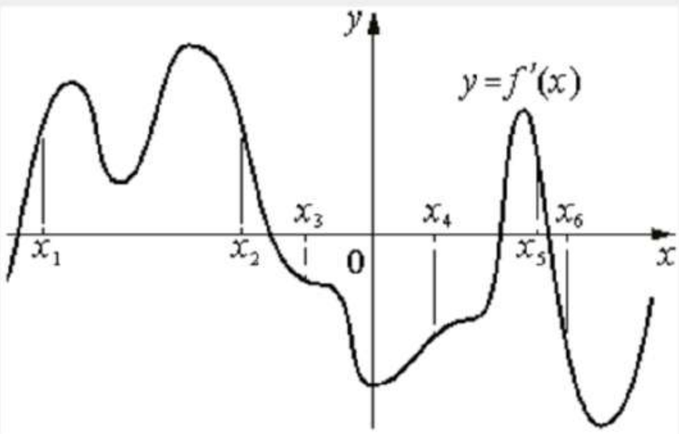
Номер: 5150 Статус задания: **НЕ РЕШЕНО** ОТВЕТИТЬ

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9;\ 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-3;\ 3]$.



720371

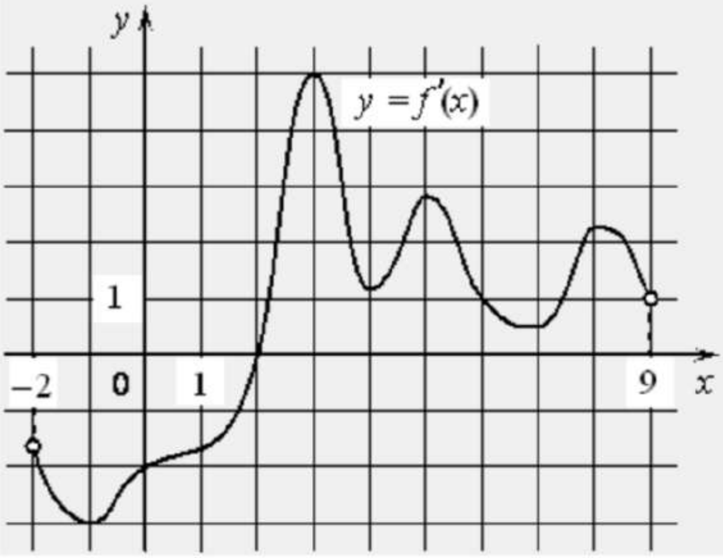
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$.
На оси абсцисс отмечены шесть точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.
Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



A9FB0A

Эскиз обычной функции

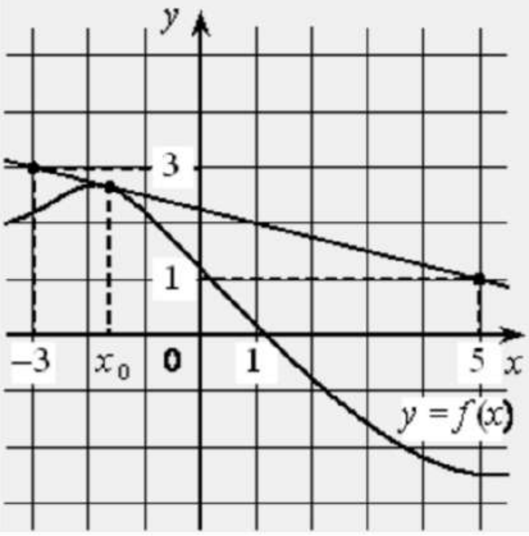
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[2; 8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



12659F

Геометрический смысл производной

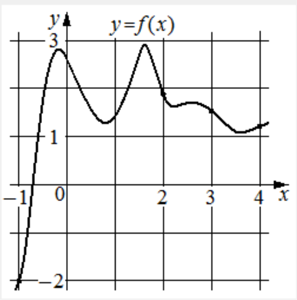
На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



E0C82C

Сравнение значений тангенсов

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -1, 2, 3, 4. В какой из этих точек значение производной наибольшее?
В ответе укажите эту точку.



56EA1A

ЗАДАНИЯ 8

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км$/$ч^2). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 1,1 км, приобрести скорость 110 км/ч. Ответ дайте в км$/$ч^2.

55D7D9

При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 170$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 12$ м/с и $v = 6$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 180 Гц?

9685F7

Водолазный колокол, содержащий $v = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}75$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha v T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 13{,}3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}$ — постоянная, $T = 300\ \text{K}$ — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 15 960 Дж.

AF6375

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 96 мг. Период его полураспада составляет 3 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 3 мг.

76777E

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 217 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \cdot \frac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с. Ответ выразите в МГц.

E44604

Сила тока в цепи I (в А) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в В), R — сопротивление электроприбора (в Ом). В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 2,5 А. Определите, какое наименьшее сопротивление может быть у электроприбора, подключаемого к сети в 220 В, чтобы сеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.

06534C

ЗАДАНИЯ 9

Движение по воде

Введите ответ в поле ввода

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 775 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 28 км/ч, стоянка длится
5 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 61 час. Ответ дайте в км/ч.

Введите ответ

i **Номер: 5059** Статус задания: **НЕ РЕШЕНО** ОТВЕТИТЬ

Расстояние между пристанями A и B равно 192 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через 3 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот проплыл 92 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

4BA055

Байдарка в $10:00$ вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась
в пункт A в $16:00$ того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

5FA179

Движение по прямой

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 187 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 6 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 6 часов. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.

936503

Введите ответ в поле ввода

Два велосипедиста одновременно отправились в 140-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Введите ответ

i **Номер: 5154** Статус задания: **НЕ РЕШЕНО** ОТВЕТИТЬ

Производительность

На изготовление 540 деталей первый рабочий затрачивает на 12 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

5A6244

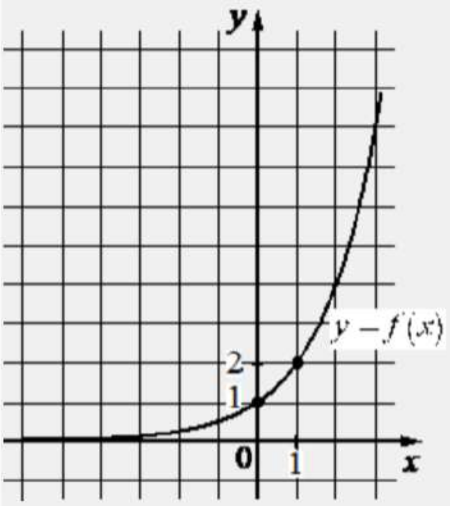
На изготовление 60 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 80 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

662145

ЗАДАНИЯ 10

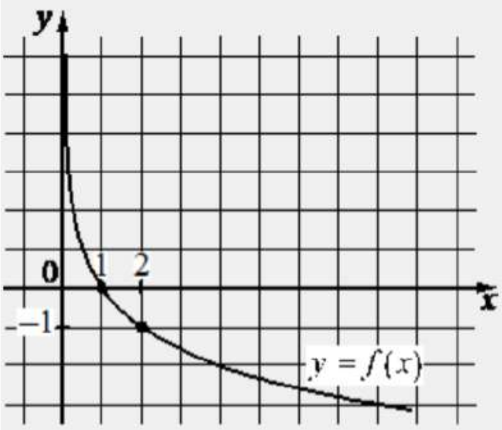
Только ФИПИшные

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(3)$.



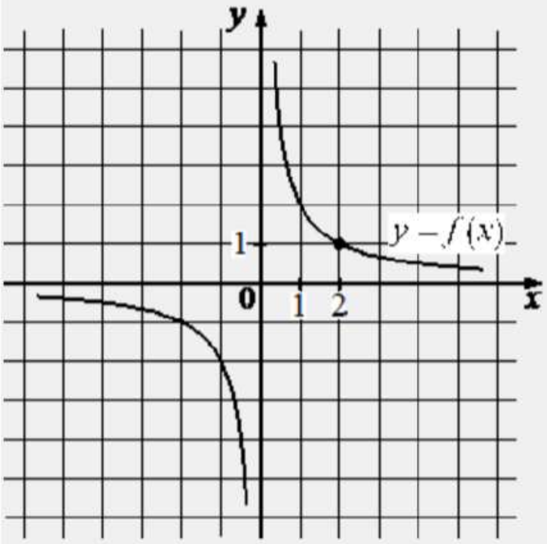
EC397F

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(8)$.



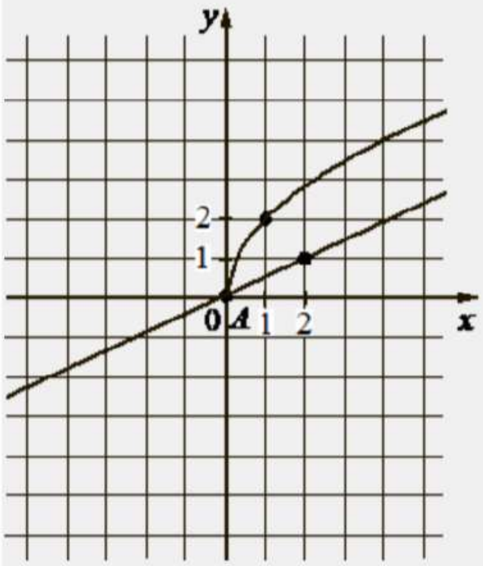
DA4F4F

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



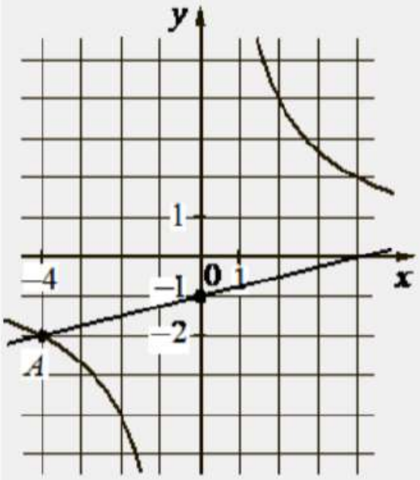
08C3D9

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



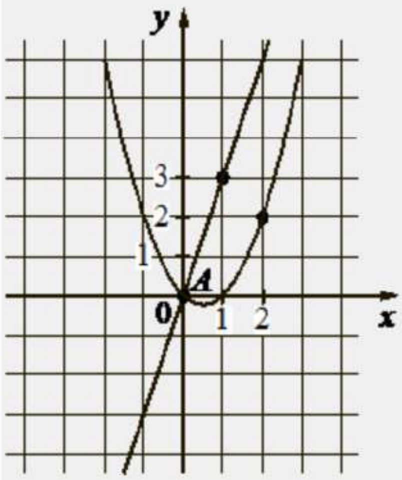
448E90

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



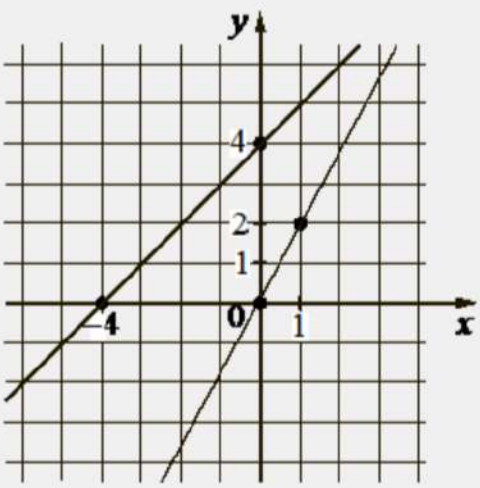
CA314B

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



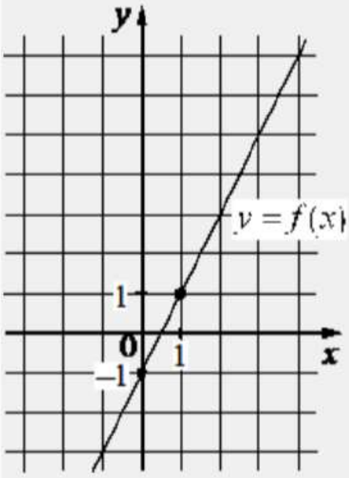
3D9010

На рисунке изображены графики двух линейных функций, пересекающиеся в точке A. Найдите абсциссу точки A.



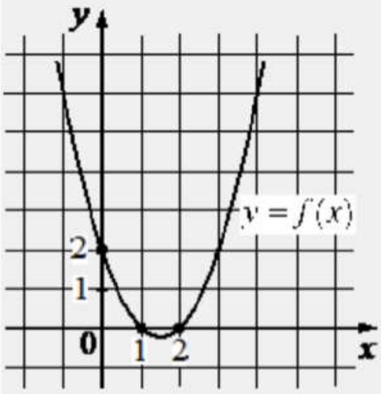
1DC3CC

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(7)$.



9CC815

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-2)$.



BC2802

ЗАДАНИЯ 11

Логарифмические

Найдите точку минимума функции $y = 1{,}5x^2 - 30x + 48 \cdot \ln x + 4$.

77454B

Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+3)^7 - 7x - 9$.

285552

Найдите точку минимума функции $y = 9x - 9 \cdot \ln(x+3) + 4$.

88E991

Введите ответ в поле ввода

Найдите наибольшее значение функции

$$y = \ln(8x) - 8x + 7$$

на отрезке $\left[\frac{1}{16}; \frac{5}{16}\right]$.

Введите ответ

Номер: 5117 Статус задания: **НЕ РЕШЕНО** ОТВЕТИТЬ

Степенные

Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

F07542

Найдите точку максимума функции

$y = 17 + 15x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 6x - 5$$

на отрезке $[9\,;\ 36]$.

2F96EF

Ешки

Введите ответ в поле ввода

Найдите наименьшее значение функции $y = (2x + 15) \cdot e^{2x + 16}$ на отрезке $[-12\,;\ -2]$.

Введите ответ

Номер: 4547 Статус задания: **НЕ РЕШЕНО** ОТВЕТИТЬ

Найдите точку максимума функции $y = (x + 5)^2 \cdot e^{2 - x}$.

B744FF

ЗАДАНИЯ 12

Тригонометрическое (вынос общего)

12.2 а) Решите уравнение

$$2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}\sin x=0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

ТЕМА: "Вынос общего"
12.1 - 12.7

Источники:
Основная волна 2020
Ященко 2018
Ященко 2018
СтатГрад 06.02.2019

а) $2\sin^2x+\sqrt{3}\sin x=0$

$\sin x\cdot(2\sin x+\sqrt{3})=0$

$\sin x=0$

$x=\pi n,\ n\in Z$

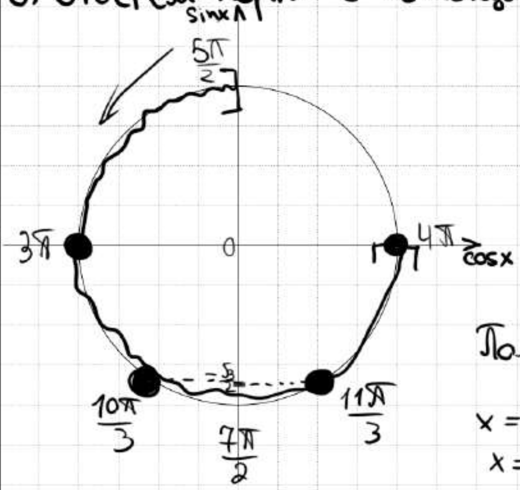
$2\sin x+\sqrt{3}=0$

$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$

$x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности:



Получим числа:

$x=3\pi$

$x=3\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$

$x=4\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{11\pi}{3}$

$x=4\pi$

ОТВЕТ: а) $\pi n,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ n\in Z$
б) $3\pi;\ \frac{10\pi}{3};\ \frac{11\pi}{3};\ 4\pi$

Тригонометрическое (полное квадратное)

12.10 а) Решите уравнение

$$2\cos 2x+4\sqrt{3}\cos x-7=0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

ТЕМА: "Полное квадратное"
12.10 - 12.15

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна 2019
Ященко 2022 (50 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2015

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

а) $2(2\cos^2x-1)+4\sqrt{3}\cos x-7=0$

$4\cos^2x-2+4\sqrt{3}\cos x-7=0$

$4\cos^2x+4\sqrt{3}\cos x-9=0$

Пусть $\cos x=t$

$4t^2+4\sqrt{3}t-9=0$

$D=48+144=192=64\cdot 3=(8\sqrt{3})^2$

$t=\frac{-4\sqrt{3}\pm 8\sqrt{3}}{8}$

$t_1=\frac{-4\sqrt{3}+8\sqrt{3}}{8}=\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$t_2=\frac{-4\sqrt{3}-8\sqrt{3}}{8}=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

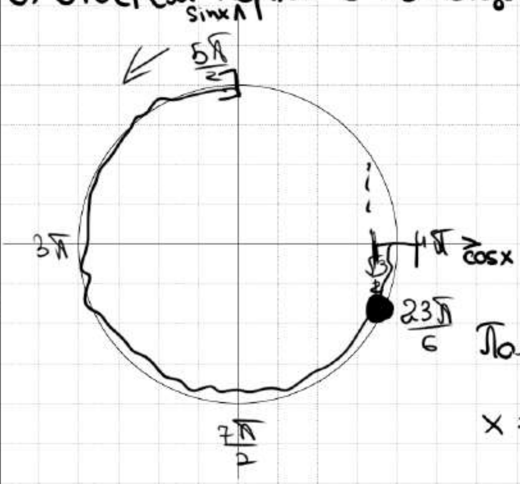
$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$

$\cos x=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

Нет решений

б) Отберём корни с помощью окружности:



Получим числа:

$x=4\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{23\pi}{6}$

ОТВЕТ: а) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z$
б) $\frac{23\pi}{6}$

Тригонометрическое (неполное квадратное)

12.8 а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}25.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

ТЕМА: "Неполное квадратное" 12.8 - 12.9

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2019
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2012

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

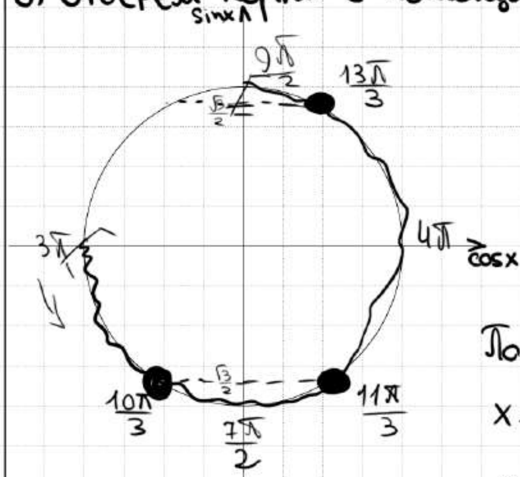
а) $1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x = 0{,}25$

$\frac{3}{4} = \sin^2 x$

$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности:



Получим числа:

$x = \frac{4\pi}{1}^{(3} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{3}$

$x = \frac{4\pi}{1}^{(3} - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}$

$x = \frac{3\pi}{1}^{(3} + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$

ОТВЕТ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$
б) $\frac{10\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$

Тригонометрическое (группировка)

12.17 а) Решите уравнение

$\sin 2x = \sin x - 2\cos x + 1.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

04C26A

ТЕМА: "Группировка" 12.16 - 12.21

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2019
Досрочная волна 2015

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

а) $(2\sin x\cos x - \sin x) + (2\cos x - 1) = 0$

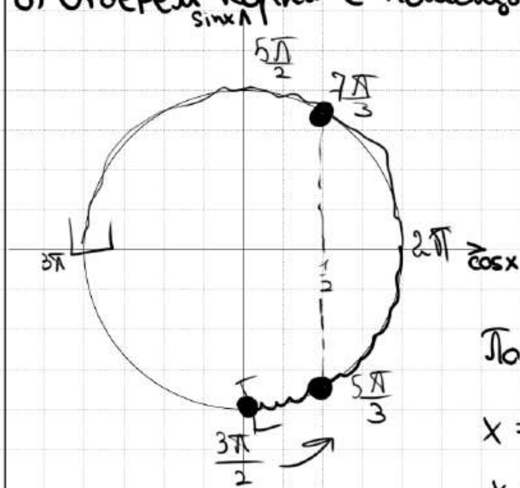
$\sin x \cdot (2\cos x - 1) + (2\cos x - 1) = 0$

$(2\cos x - 1) \cdot (\sin x + 1) = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin x = -1$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ $\qquad$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

б) Отберём корни с помощью окружности:



Получим числа:

$x = \frac{3\pi}{2}$

$x = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$

$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

ОТВЕТ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$
б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$

Тригонометрическое (синус суммы)

12.22 Задание с развернутым ответом

а) Решите уравнение

$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

i Номер: 5193

ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

ТЕМА: "Синус суммы" 12.22 - 12.23

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Основная волна (Резерв) 2018
Ященко 2019 (36 вар)

а) $2\sin^2 x + \sqrt{2}\cdot\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) - \cos x = 0$

$2\sin^2 x + \cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\cdot\sin x + \cancel{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x} - \cancel{\cos x} = 0$

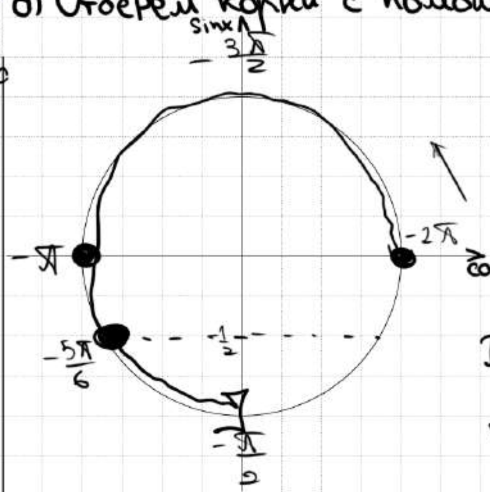
$\sin x\cdot(2\sin x + 1) = 0$

$\sin x = 0$ $\qquad$ $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \pi n,\ n\in Z$ $\qquad$ $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

б) Отберём корни с помощью окружности:



Получим числа:

$x = -2\pi$

$x = -\pi$

$x = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$

Ответ: а)
б)

Тригонометрическое (однородное)

12.24 а) Решите уравнение

$$2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

ТЕМА: "Однородные" 12.24 - 12.26

Источники:
Основная волна 2019

а) $2\cos^2 x + 4\sin x\cdot\cos x = 3\cdot 1$

$2\cos^2 x + 4\sin x\cdot\cos x = 3\cdot\sin^2 x + 3\cdot\cos^2 x$

$-\cos^2 x + 4\sin x\cos x - 3\sin^2 x = 0 \quad \mid : \cos^2 x$

$-1 + \frac{4\sin x\cdot\cancel{\cos x}}{\cos^2 x} - \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$

$-3\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x - 1 = 0$

Пусть $\operatorname{tg} x = t$

$-3t^2 + 4t - 1 = 0$

$D = 16 - 12 = 4$

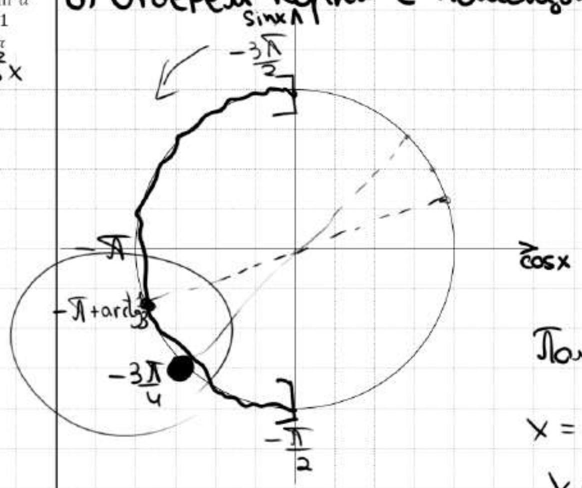
$t = \frac{-4\pm 2}{-6}$

$t = 1$ $\qquad$ $t = \frac{1}{3}$

$\operatorname{tg} x = 1$ $\qquad$ $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ $\qquad$ $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$ $\qquad$ $, n\in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности:



Получим числа:

$x = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$

$x = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

Ответ: а)
б)

ЗАДАНИЯ 13

Дана четырёхугольная пирамида или треугольная пирамида, или куб, или прямоугольный параллелепипед

а) Докажите, что отрезки равны

а) Докажите, что плоскость делит отрезок в отношении …:…

а) Докажите, что сечение – равнобедренная трапеция или квадрат, или прямоугольник

а) Докажите, что прямые перпендикулярны

б) Найдите объём или площадь, или периметр

б) Найдите расстояние между прямыми

б) Найдите угол между плоскостями

б) Найдите расстояние от точки до плоскости

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC.

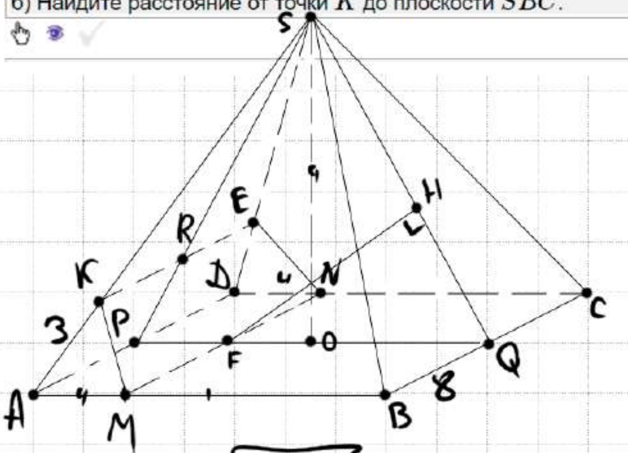
859A67

Источники:

FIPI
osfipi
Ященко 2018 (12)
Гордин #14 2019
Основная волна 2016

Метод объёмов

$V_{MSBC} = \frac{1}{3} \cdot S_{MBC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot S_{SBC} \cdot h$



а) $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$

$AO = 8\sqrt{2}$

$\triangle AOS$: $AS = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + 4^2} = 12$

KENM - сечение пирамиды пл. MNK

$MN \parallel BC$ (т.к. BCNM - прямоугольник)

$\triangle AKM \sim \triangle ABS$ по 2 признаку

$k = \frac{1}{4}$ и $\angle A$ - общий

$\Rightarrow KM \parallel BS$

$\Rightarrow (MNK) \parallel (SBC)$ по признаку

б) $\rho(K; SBC) = \rho(F; SBC)$

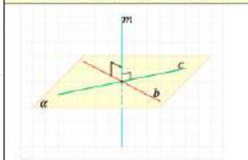
$FH \perp SQ$

$FH \perp BC$ (по ТТП)

$\Rightarrow FH \perp (SBC)$ по

$\Rightarrow FH$ - иск. расстояние

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

Если $\begin{cases} m \perp b \\ m \perp c, \\ b \cap c \end{cases}$ то $m \perp \alpha$

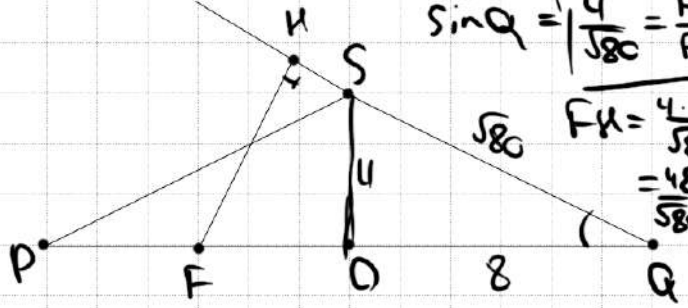
Определим вид SPQ.

$\cos S = \dfrac{\sqrt{80}^2 + \sqrt{80}^2 - 16^2}{2\sqrt{80} \cdot \sqrt{80}} < 0$

$\Rightarrow \triangle PSQ$ – тупоугольный

$\sin Q = \frac{4}{\sqrt{80}} = \frac{FH}{FQ}$

$FH = \frac{4 \cdot 12}{\sqrt{80}} = \frac{48}{\sqrt{80}} =$



$= \frac{48}{4\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5} = 2{,}4\sqrt{5}$

Ответ: $2{,}4\sqrt{5}$.

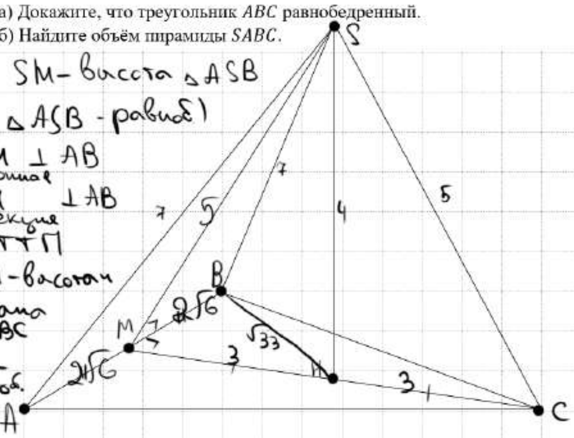
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

13.13 В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 7$, $SC = 5$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC. Эта высота равна 4.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

ТЕМА: "Треугольная пирамида" 13.8 - 13.14

а) ① SM – высота $\triangle ASB$ (т.к. $\triangle ASB$ – равнобед.)
$\Rightarrow SM \perp AB$ (наклонная)
$\Rightarrow MH \perp AB$ (проекция) по ТТП
$\Rightarrow$ CM – высота, медиана $\triangle ABC$
$\Rightarrow \triangle ABC$ – равнобед. ■



б) ① $\triangle SCH$: $CH = \sqrt{5^2-4^2} = 3$
$CM = 3 \cdot 2 = 6$
$SM = SC$ (т.к. $\triangle SMH = \triangle SCH$)

② $\triangle ASM$: $AM = \sqrt{7^2-5^2} = 2\sqrt{6}$
$AB = 2 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

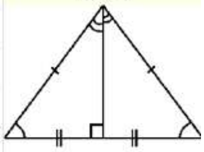
③ $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} 4\sqrt{6} \cdot 6 \cdot 4 = 16\sqrt{6}$

ОТВЕТ: $16\sqrt{6}$.

Источники:

Основная волна 2017

СВОЙСТВО

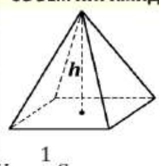


Биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию, равны

ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

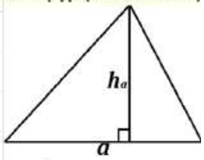
Прямая, проведённая в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной

ОБЪЁМ ПИРАМИДЫ



$V = \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot h$

ПЛОЩАДЬ (ЧЕРЕЗ ВЫСОТУ)



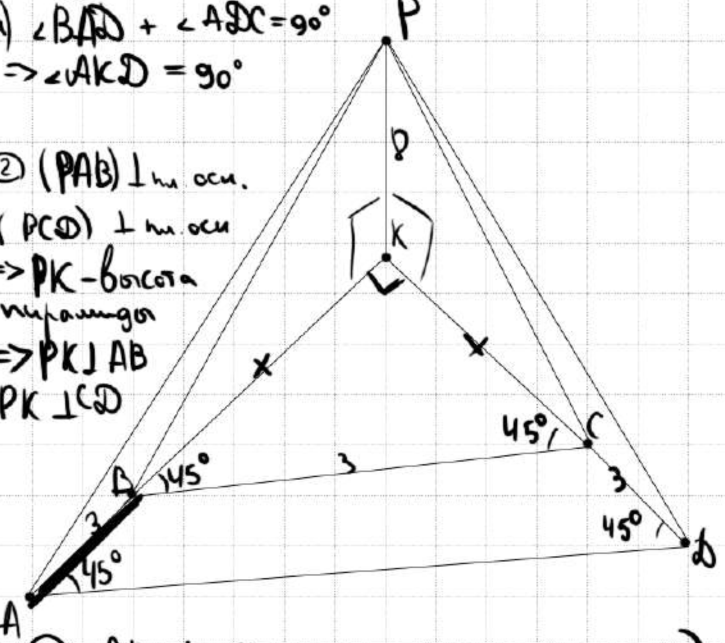
$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

13 Основание пирамиды $PABCD$ – трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K.

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
б) Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды равна 8.

а) ① $\angle BAD + \angle ADC = 90°$
$\Rightarrow \angle AKD = 90°$

② $(PAB) \perp$ пл. осн.
$(PCD) \perp$ пл. осн.
$\Rightarrow$ PK – высота пирамиды
$\Rightarrow PK \perp AB$
$PK \perp CD$



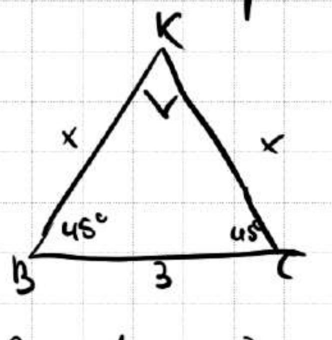
③ $AB \perp DK$ (т.к. $\angle BAD + \angle ADC = 90°$)
$AB \perp PK$ (т.к. PK - выс. пир.)
$\Rightarrow (PAB) \perp (PCD)$ ■

ОТВЕТ: 6

б) ① Пусть $BK = x = CK$ (т.к. $\triangle BCK$ – р/б)

② $\angle KBC = 45° = \angle KCB$

③ Рассмотрим $\triangle BKC$



по т. Пиф.
$3^2 = x^2 + x^2$
$9 = 2x^2$
$x^2 = \frac{9}{2}$
$x = \frac{3}{\sqrt{2}}$

④ $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} \cdot 8 = 3 \cdot 2 = 6$

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Гордин #14 2019
Основная волна 2017

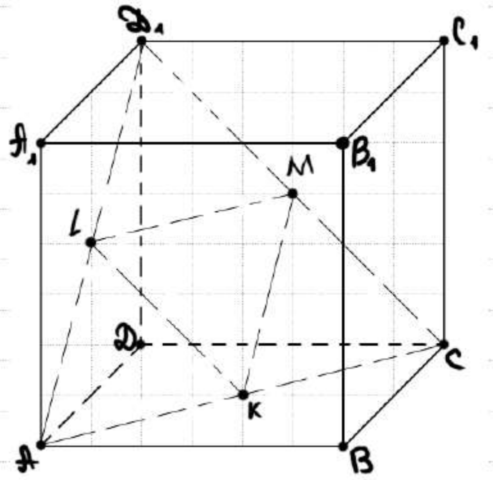
ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Плоскости перпендикулярны, если одна из плоскостей содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости

14 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Точки K, L и M — центры граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D соответственно.

а) Докажите, что B_1KLM — правильная пирамида.
б) Найдите объём B_1KLM.

Источники:
Основная волна 2017



а) ① $\triangle ACD_1$ — равност. (т.к. $AD_1 = CD_1 = AC$ как диагонали равн. квадратов)

$\triangle LKM$ - равност. (т.к. LM, LK и MK - ср. линии, равные половинам сторон $\triangle ACD_1$)

② Рассмотрим B_1ACD_1 - правильная пирамида

B_1L, B_1M и B_1K — апофемы в правильн. пир.

$\Rightarrow \begin{cases} B_1L = B_1M = B_1K \\ LM = LK = MK \end{cases} \Rightarrow B_1KLM$ - правильная пирамида ■

б) ① $V_{куба} = 6^3 = 216$

② $V_{ACDD_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot 6 = 36$

$V_{ABCB_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{66}{2} \cdot 6 = 36$

$V_{CC_1D_1B_1} = 36$

$V_{AA_1B_1D_1} = 36$

③ $V_{B_1ACD_1} = 216 - 4 \cdot 36 = 72$

④ $V_{B_1KLM} = \frac{1}{4} V_{B_1ACD_1} = \frac{1}{4} \cdot 72 = 18$ (т.к. $S_{KLM} = \frac{1}{4} S_{ACD_1}$)

Ответ: 18

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ЗАДАНИЯ 14

Логарифмическое (как в 2018, 2019 годах)

14.3 Решите неравенство
$\log_{\frac{1}{3}}(18-9x) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+5) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$.

ТЕМА: "Логарифмические (разные)" 14.1 - 14.4

Источники:
Основная волна 2019
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ
$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

$$\begin{cases} 18-9x>0 \\ (x-1)(x-5)>0 \\ x+2>0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(18-9x) < \log_{\frac{1}{3}}(x-1)(x-5)(x+2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ① \ 18-9x>0 \\ ② \ (x-1)(x-5)>0 \\ ③ \ x+2>0 \\ ④ \ 18-9x > (x-1)(x-5)(x+2) \end{cases}$$

① $18>9x$
$x<2$

$2>x$
$-x>-2 \quad |\cdot(-1)$
$x<2$

② $+ \quad 1 \quad - \quad 5 \quad +$ x

③ $x>-2$

④ $9\cdot(2-x) - (x-1)(x-5)(x+2) > 0$
$18-9x > (x^2-6x+5)\cdot(x+2)$
$18-9x > x^3-6x^2+5x+2x^2-12x+10$
$x^3-4x^2+2x-8<0$
$x^2\cdot(x-4)+2\cdot(x-4)<0$
$(x-4)(x^2+2)<0$

$- \quad 4 \quad +$ x

Найдём пересечение.

$-2 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad x$

Ответ: $(-2;1)$

Логарифмическое (замена сразу)

14.24 Решите неравенство $1+\frac{10}{\log_2 x - 5} + \frac{16}{\log_2^2 x - \log_2(32x^{10}) + 30} \geq 0$.

ТЕМА: "Логарифмические (замена сразу)" 14.21 - 14.28

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017

Пусть $\log_2 x = t$

$$1^{(t^2-10t+25} + \frac{10^{(t-5}}{t-5} + \frac{16^{(1}}{t^2-(5+10t)+30} \geq 0$$
$t^2-10t+25$

$$\frac{t^2-\cancel{10t}+25+\cancel{10t}-50+16}{(t-5)^2} \geq 0$$

$$\frac{t^2-9}{(t-5)^2} \geq 0$$

$+ \quad -3 \quad - \quad 3 \quad + \quad 5 \quad + \quad t$

$$\left[\begin{array}{l} t\leq -3 \\ 3<t<5 \\ t>5 \end{array}\right.$$

$\log_2 32 + \log_2 x^{10}$

$\log_2 x \leq \log_2 \frac{1}{8} \qquad \log_2 8 < \log_2 x < \log_2 32 \qquad \log_2 x > \log_2 32$

$0<x\leq \frac{1}{8} \qquad 8 < x < 32 \qquad x>32$

$0 \quad \frac{1}{8} \quad 8 \quad 32 \quad x$

Ответ: $(0; \frac{1}{8}] \cup [8;32) \cup (32;+\infty)$

Показательное (замена сразу)

14.17 Решите неравенство

$$\frac{9^x-3^{x+1}-19}{3^x-6}+\frac{9^{x+1}-3^{x+4}+2}{3^x-9}\le 10\cdot 3^x+3.$$

ТЕМА: "Показательные (замена сразу)"
14.13 - 14.20

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016
Пробный ЕГЭ 29.02.2020

Пусть $3^x=t$

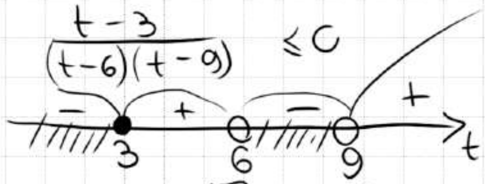
$$\frac{t^2-3t-18}{t-6}-\frac{1}{t-6}+\frac{9t^2-81t}{t-9}+\frac{2}{t-9}-10t-3\le 0$$

$$\cancel{t+3}-\frac{1}{t-6}+\cancel{9t}+\frac{2}{t-9}\cancel{-10t-3}\le 0$$

$$\frac{2}{t-9}^{(t-6}-\frac{1}{t-6}^{(t-9}\le 0$$

$$\frac{2t-12-t+9}{(t-6)(t-9)}\le 0$$

$$\frac{t-3}{(t-6)(t-9)}\le 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t\le 3\\ 6<t<9\end{array}\right.$$

$3^x\le 3^1$

$x\le 1$

$3^{\log_3 6}<3^x<3^2$

$\log_3 6<x<2$

Ответ: $(-\infty;1]\cup(\log_3 6;2)$

ЗАДАНИЯ 15

Новая задача про кредиты с разными платежами

15.14 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 8 лет. Условия его возврата таковы:

ТЕМА: "Диф. платежи с доп. усл." 15.12 - 15.15

Источники: Основная волна 2021; Ященко 2022 (36 вар)

$\cdot 1{,}2$

– в январе 2026, 2027, 2028 и 2029 годов долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

$1{,}18$

– в январе 2030, 2031, 2032 и 2033 годов долг возрастает на 18% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

– к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1125 тысяч рублей?

Пусть S – сумма кредита
март – месяц платежа

Дата	Сумма долга
и25	S
я 26	$1{,}2S$
м 26	$\Rightarrow$ была выплата $\frac{1{,}2S}{1}-\frac{7S}{8}=\frac{2{,}6S}{8}$
и 26	$S-\frac{S}{8}=\frac{7}{8}S$
я 27	$\frac{8{,}4S}{8}$
м 27	$\Rightarrow$ б.в. $\frac{2{,}4S}{8}$
и 27	$\frac{6}{8}S$
ОТВЕТ:	600 тыс

я 28: $\frac{7{,}2S}{8}$; м 28 $\Rightarrow$ б.в. $\frac{2{,}2S}{8}$; и 28: $\frac{5}{8}S$

я 29: $\frac{6S}{8}$; м 29 $\Rightarrow$ б.в. $\frac{2S}{8}$; и 29: $\frac{4}{8}S$

я 30: $\frac{4{,}72}{8}S$; м 30 $\Rightarrow$ б.в. $\frac{1{,}72S}{8}$; и 30: $\frac{3}{8}S$

я 31: $\frac{3{,}54}{8}S$; м 31 $\Rightarrow$ б.в. $\frac{1{,}54S}{8}$; и 31: $\frac{2}{8}S$

я 32: $\frac{2{,}36}{8}S$; м 32 $\Rightarrow$ б.в. $\frac{1{,}36S}{8}$; и 32: $\frac{1}{8}S$

я 33: $\frac{1{,}18S}{8}$; м 33 $\Rightarrow$ б.в. $\frac{1{,}18S}{8}$; и 33: 0

1 способ

О.С.В. = 1125

$$\frac{9{,}2S}{8}+\frac{5{,}8S}{8}=1125$$

$$\frac{15}{8}\cdot S=1125$$

$$S=\frac{1125\cdot 8}{15}=600$$

2 способ

Первые 4 выплаты
Последние 4 выплаты
обр. ариф. прогр.
Восп. ф-лой

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

$$\frac{\frac{2{,}6S}{8}+\frac{2S}{8}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}^{2}+\frac{\frac{1{,}72S}{8}+\frac{1{,}18S}{8}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}^{2}=1125$$

$$\frac{4{,}6S}{4}+\frac{2{,}9S}{4}=1125$$

$$\frac{7{,}5}{4}S=1125$$

$$S=\frac{\overset{75}{1125}\cdot 2\cdot 4}{15}=600.$$

15	В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

Источники:
Основная волна 2022

– каждый январь долг будет возрастать на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– платежи в 2027 и 2028 годах должны быть по 300 тыс. рублей;
– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Пусть март – месяц платежа
S – сумма долга

Какую сумму планируется взять в кредит, если известно, что платёж в 2029 году равен 860,6 тыс. рублей?

Дата	Сумма долга
и 26	S
я 27	$1,3\cdot S$
м 27	платёж 300
и 27	$1,3S - 300$
я 28	$1,3^2S - 300\cdot 1,3$
м 28	платёж 300
и 28	$1,3^2S - 300\cdot 1,3 - 300$
я 29	$1,3^3S - 300\cdot 1,3^2 - 300\cdot 1,3$
м 29	платёж $= 1,3^3S - 300\cdot 1,3^2 - 300\cdot 1,3 = 860,6$
и 29	0

$$1,3^3\cdot S = 860,6 + 300\cdot 1,69 + 300\cdot 1,3$$
$$S\cdot 2,197 = 860,6 + 2,99\cdot 300$$
$$S\cdot 2,197 = 860,6 + 897$$
$$S\cdot 2,197 = 1757,6$$
$$S = 800 \text{ тыс}$$

$$1757600 : 2197 = 800$$
17576

ОТВЕТ: 800 тыс

Классическая задача про кредиты с разными платежами

15.6	В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере *S* тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

ТЕМА: "Разные платежи"
15.4 - 15.7

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна 2020
Основная волна 2016

$\cdot 1,2$

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
–в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остаётся равным *S* тыс. рублей;
– выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс. рублей;
– к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

Пусть март – месяц платежа

Дата	Сумма долга
и 16	S
я 17	$1,2S$
м 17	$\Rightarrow$ была выплата $0,2S$
и 17	S
я 18	$1,2S$
м 18	$\Rightarrow$ б.в. $0,2S$
и 18	S
я 19	$1,2S$
м 19	$\Rightarrow$ б.в. $0,2S$
и 19	S

я 20	$1,2S$
м 20	б.в. 360
и 20	$1,2S - 360$
я 21	$1,2^2S - 360\cdot 1,2$
м 21	б.в. 360
и 21	$1,2^2\cdot S - 360\cdot 1,2 - 360 = 0$

$$1,44\cdot S = 2,2\cdot 360$$
$$S = \frac{360\cdot 22\cdot 100}{10\cdot 144} = \frac{30\cdot 22}{12} = 550$$

$$\text{О.С.В.} = 3\cdot 0,2\cdot 550 + 2\cdot 360$$
$$= \frac{3}{5}\cdot 550 + 720 = 1050 \text{ тыс}$$

ОТВЕТ: 1050 тыс.

15.7 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 000 рублей. Условия его возврата таковы:

$\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)$

– каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 160 000 рублей, а во второй год – 240 000 рублей.

ТЕМА: "Разные платежи" 15.4 - 15.7

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Семёнов 2015
Основная волна 2020
Основная волна 2017
Основная волна 2015

Пусть март – месяц платежа

$\left(1+\frac{r}{100}\right)=b$

Дата	Сумма долга
И20	300 тыс
Я21	$300\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)=300b$
М21	$300b-160$
Я22	$300b^2-160b$
М22	$300b^2-160b-240=0$

$300b^2-160b-240=0 \quad |:20$

$15b^2-8b-12=0$

$D=64+720=28^2$

$b=\frac{8\pm 28}{30}$

$b=\frac{36}{30}=1{,}2=1+\frac{r}{100}$

$r=20\%$

Ответ: 20

Равные платежи

15.1

Задание с развернутым ответом

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и банку будет выплачено 311 040 рублей?

Номер: 5065

ТЕМА: "Равные платежи" 15.1 - 15.3

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2018

Пусть S – сумма долга
март – месяц платежа
x – ежегодный платёж

Дата	Сумма долга
июль 20	S
я 21	$1{,}2S$
м 21	$1{,}2S - x$
я 22	$1{,}2\cdot(1{,}2S - x) = 1{,}2^2S - 1{,}2x$
м 22	$1{,}2^2S - 1{,}2x - x$
я 23	$1{,}2^3S - 1{,}2^2x - 1{,}2x$
м 23	$1{,}2^3S - 1{,}2^2x - 1{,}2x - x$
я 24	$1{,}2^4S - 1{,}2^3x - 1{,}2^2x - 1{,}2x$
м 24	$\boxed{1{,}2^4S - 1{,}2^3x - 1{,}2^2x - 1{,}2x - x = 0}$
Ответ:	201300 р

① Общая сумма выплат $= 311040 = 4x$

$$311040 = 4x$$

$x = 311040 : 4 = 77760$ р.

② $1{,}2^4\cdot S = 1{,}2^3\cdot x + 1{,}2^2x + 1{,}2x + 1\cdot x$

$1{,}2^4\cdot S = x\cdot(1{,}2^3 + 1{,}2^2 + 1{,}2 + 1)$

$1{,}2 = 1\frac{2}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

$1{,}44 \cdot 1{,}2 = 1{,}728$

1 способ

$2{,}0736\cdot S = x\cdot(1{,}728 + 1{,}44 + 1{,}2 + 1)$

$2{,}0736\cdot S = x\cdot 5{,}368$ (671)

$$S = \frac{\cancel{77760}\cdot \cancel{5368}\cdot \cancel{10000}}{\cancel{1000}\cdot\cancel{20736}} = 201300 \text{ р}$$

(30, 1342, 10, 5184, 2592)

$77760 : 2592 = 30$

$5368 : 4 = 1342$

2 способ

$\frac{6^4}{5^4}\cdot S = x\cdot\left(\frac{6^3}{5^3} + \frac{6^2}{5^2} + \frac{6}{5} + \frac{1}{1}\right)$

$\frac{6^4}{5^4}\cdot S = x\cdot\frac{216 + 180 + 150 + 125}{5^3}$

$\frac{6^4}{5^4}\cdot S = x\cdot\frac{671}{5^3}$

$$S = \frac{\cancel{77760}\cdot 671\cdot\cancel{5^4}}{\cancel{5^3}\cdot\cancel{6^4}} = 201300$$

(60, 5)

$77760 : 1296 = 60$

Диф. платежи

15.10 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ $\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму (на $\frac{S}{19}$) меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

4738D8

ТЕМА: "Диф. платежи" 15.8 - 15.11

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (50 вар)
Ященко 2021 (10 вар)
Ященко 2020 (10 вар)
Ященко 2020 (14 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2019 (50 вар)
Ященко 2019 (14 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (20 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018
Основная волна 2019
Основная волна 2017
Основная волна 2015

Пусть S – сумма долга
$\left(1+\frac{r}{100}\right)=b$
7 число – день платежа

Дата	Сумма долга
15 я	S
1 мес. 1	Sb
7 ф	$\Rightarrow$ была выплата $Sb-\frac{18}{19}S$
15	$S-\frac{S}{19}=\frac{18}{19}S$
2 мес. 1	$\frac{18}{19}Sb$
7 м	$\Rightarrow$ В. $\frac{18}{19}Sb-\frac{17}{19}S$
15	$\frac{17}{19}S$
3 мес. 1	$\frac{17}{19}Sb$
7 а	$\Rightarrow$ В. $\frac{17}{19}Sb-\frac{16}{19}S$
15	$\frac{16}{19}S$
Ответ:	3 %

18 мес. 15 ч	$\frac{S}{19}$
19 мес. 1 ч	$\frac{1}{19}Sb$
7 ч	$\Rightarrow$ В. $\frac{1}{19}Sb$
15 ч	0

Выплаты образуют арифм. прогр.
Воспользуемся ф-лой суммы арифм. прогр.
$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

$$О.С.В.=1{,}3\cdot S$$

$$\frac{Sb-\frac{18}{19}S+\frac{1}{19}Sb}{2}\cdot 19=1{,}3S \quad \Big|\cdot 2$$

$$\left(\frac{20}{19}Sb-\frac{18}{19}S\right)\cdot 19=2{,}6S$$

$$20\cancel{S}b-18\cancel{S}=2{,}6\cancel{S}$$

$$20b=20{,}6$$

$$b=1{,}03$$

$$1+\frac{r}{100}=1{,}03$$

$$r=3$$

Диф. платежи с доп. условием 2018 года

15.12 15-го марта планируется взять кредит в банке на 26 месяцев. Условия его возврата таковы:

$\cdot 1{,}03$

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 25-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15-му числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1924 тысячи рублей?

ТЕМА: "Диф. платежи с доп. усл." 15.12 - 15.15

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)

Пусть $S_{тыс}$ – сумма долга
7 число – день платежа

Дата	Сумма долга
15 м	S тыс
1 мес: 1	$1{,}03S$
7 а	$\Rightarrow$ была выплата $0{,}03S+40$
15	$S-40$
2 мес: 1	$1{,}03S-41{,}2$
7 М	$\Rightarrow$ в.в. $0{,}03S+38{,}8$
15	$S-80$
3 мес: 1	$1{,}03S-82{,}4$
7 И	$\Rightarrow$ в.в. $0{,}03S+37{,}6$
15	$S-3\cdot40=S-120$
ОТВЕТ:	1300 тыс

24 мес, 15ч: $S-24\cdot40=S-960$

25 мес, 1ч: $1{,}03S-988{,}8$
7ч: $\Rightarrow$ в.в. $0{,}03S+11{,}2$
15ч: $S-25\cdot40=S-1000$

26 мес, 1ч: $1{,}03S-1030$
7ч: $\Rightarrow$ в.в. $\boxed{1{,}03S-1030}$
15ч: 0

Первые 25 выплат обр. арифм. прогр.
Восп. ф-лой $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

О.С.В. = 1924 тыс.

$$\frac{0{,}03S+40+0{,}03S+11{,}2}{2}\cdot25+1{,}03S-1030=1924$$

$$\frac{0{,}06S+51{,}2}{2}\cdot25+1{,}03S=2954$$

$$(0{,}03S+25{,}6)\cdot25+1{,}03S=2954$$

$$0{,}75S+640+1{,}03S=2954$$

$$1{,}78\cdot S=2314$$

$$S=\frac{2314\cdot100}{178}=1300$$

2314 : 178 = 13
178
534
534

ЗАДАНИЯ 16

Дана трапеция или прямоугольный треугольник, или произвольный треугольник, или 2 окружности

а) Докажите, что отрезки равны
а) Докажите, что углы равны
а) Докажите, что прямые параллельны
а) Докажите, что прямые перпендикулярны
а) Докажите, что треугольники подобны
б) Найдите отрезок
б) Найдите площадь
б) Найдите отношение отрезков
б) Найдите отношение площадей
б) Найдите радиус описанной около треугольника окружности

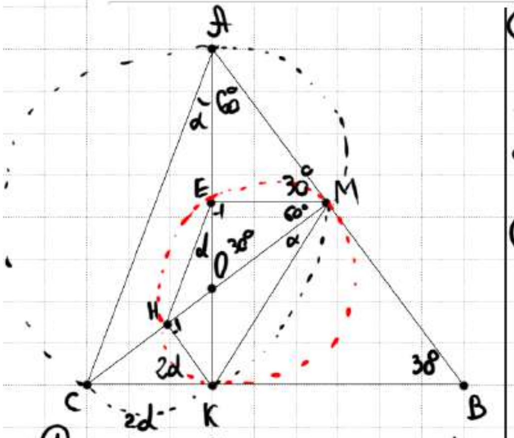
16

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение EH к AC, если $\angle ABC = 30^\circ$.

Источники:
FIPI
osfipi
Ященко 2018
Основная волна 2016



а) ① $\angle AMC = 90^\circ$ — эти углы опираются
$\angle AKC = 90$ на отрезок AC
=> Можно описать около $AMKC$ окр-ть с диаметром AC

② $\angle MEK = 90^\circ$ — эти углы опираются
$\angle MHK = 90^\circ$ на отрезок MK
=> Можно описать около $EMKH$ окр-ть с диаметром MK

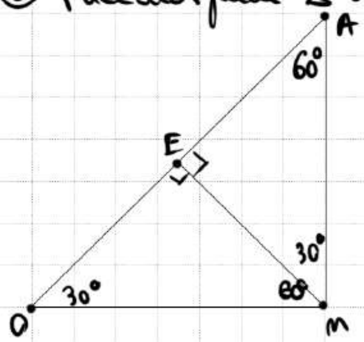
③ Пусть $\angle CAK = \alpha$
Тогда $\smile CK = 2\alpha$ по теореме о впис. угле
$\angle CMK = \alpha$
$\smile HK = 2\alpha$
$\angle HEK = \alpha$
=> $\angle CAK = \angle HEK$ - соответств.
=> $EH \parallel AC$ ■

б) ① $\triangle ABK$: $\angle BAK = 180-90-30 = 60$
$\triangle AOM$: $\angle AOM = 180-90-60 = 30$
$\triangle AEM$: $\angle AME = 180-90-60 = 30$
$\triangle EOM$: $\angle EMO = 180-90-30 = 60$

② $\triangle EOH \sim \triangle AOC$ по 2 углам ($\angle EOH$ - общий, $\angle CAK = \angle HEK$)

$$\frac{EH}{AC} = \cancel{\frac{OH}{OC}} = \frac{EO}{AO}$$

③ Рассмотрим $\triangle AOM$



Выразим EO через OM
$\triangle EOM$: $\cos\angle EOM = \frac{EO}{OM}$
$\frac{\sqrt3}{2} = \frac{EO}{OM}$
$EO = \frac{\sqrt3 OM}{2}$

Выразим AO через OM
$\triangle AOM$: $\cos\angle AOM = \frac{OM}{AO}$
$\frac{\sqrt3}{2} = \frac{OM}{AO}$
$AO = \frac{2 OM}{\sqrt3}$

④ $$\frac{EO}{AO} = \frac{\frac{\sqrt3 \cdot OM}{2}}{\frac{2 \cdot OM}{\sqrt3}} = \frac{\sqrt3}{2} : \frac{2}{\sqrt3} = \frac{3}{4}$$

=> $\frac{EH}{AC} = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

16

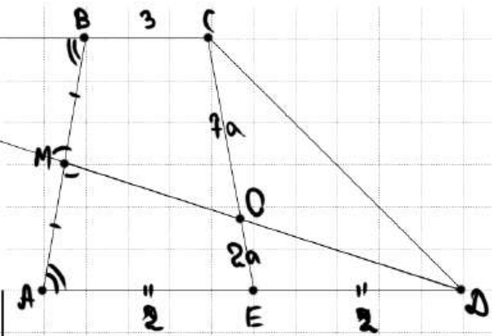
В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD, точка M — середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O.

а) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны. $S_{\triangle COD}$

б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если $BC = 3$, $AD = 4$.

C5C4F4

Источники:
FIPI
osfipi
Ященко 2018
Ященко 2018
Основная волна 2016



а) ① Докажем, что $S_{\triangle CED} = S_{\triangle ADM}$

② Пусть h - высота трапеции. Тогда $\frac{h}{2}$ - высота $\triangle ADM$. Пусть $AE = x = DE$

③ $S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h$

$S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{2}x \cdot \frac{h}{\cancel{2}}$

$\Rightarrow S_{\triangle ADM} = S_{\triangle CED}$

$S_{AMOE} + \cancel{S_{\triangle OED}} = S_{\triangle COD} + \cancel{S_{\triangle OED}}$ ■

б) ① $\frac{S_{\triangle COD}}{S_{трап}}$ — ?

② Пусть $BC \cap DM = P$

③ $\triangle PBM = \triangle ADM$ по 2 признаку
$\Rightarrow PB = AD = 4$

④ $\triangle PCO \sim \triangle DOE$ по 2 углам

$\frac{PC}{DE} = \frac{7}{2} = \frac{CO}{OE}$

Пусть $CO = 7a$
$OE = 2a$
$\Rightarrow \frac{2}{9}h$ - высота $\triangle DOE$

⑤ $S_{\triangle COD} = S_{\triangle CED} - S_{\triangle OED}$

$S_{\triangle CED} = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2} \cdot h$

$S_{\triangle OED} = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{2}{9}h$

$\Rightarrow S_{\triangle COD} = h - \frac{2}{9}h = \frac{7}{9}h$

⑥ $S_{трап} = \frac{3+4}{2} \cdot h = \frac{7}{2}h$

⑦ $\frac{S_{\triangle COD}}{S_{трап}} = \frac{\frac{7}{9}h}{\frac{7}{2}h} = \frac{2}{9}$

Ответ: $\frac{2}{9}$.

16

В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы ABM и DCM прямые.

а) Докажите, что $AM = DM$.

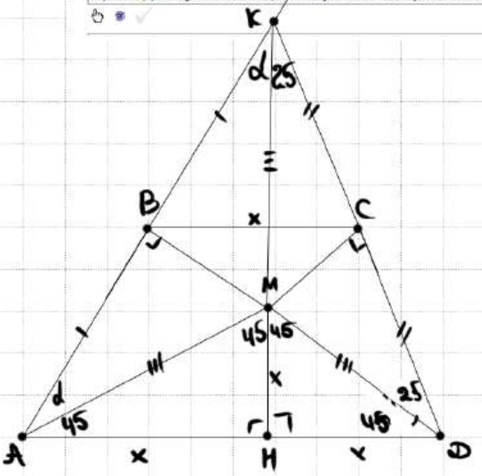
б) Найдите угол BAD, если угол ADC равен 70°, а расстояние от точки M до прямой AD равно стороне BC.

4E19FD

Источники:
FIPI
osfipi
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017

СВОЙСТВО СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в точке, являющейся центром окружности, описанной около треугольника



а) ① Пусть $AB \cap CD = K$

② $\triangle BCK \sim \triangle ADK$ по 2 углам
$k = 2$
$\Rightarrow$ B - середина AK
C - середина DK
$\Rightarrow$ M - точка пересеч. серединных перп-ров
$\Rightarrow$ M - центр описанной около $\triangle ADK$ окр-ти
$\Rightarrow AM = DM$ (радиусы) ■

б) ① Пусть $BC = x = MH$
Тогда $AD = 2x$

② $\triangle ADM$ - равноб.
$\Rightarrow MH$ - медиана
$\Rightarrow \triangle AMH$ и $\triangle DMH$ - прямоуг. и равноб.

③ $\angle KDM = 70 - 45 = 25$

④ $\triangle AKM$ - равноб.
Пусть $\angle KAM = \alpha = \angle AKM$

⑤ $\triangle DKM$ - равноб.
$\angle DKM = 25^\circ$

⑥ $\triangle ADK$:
$\alpha + 45 + \alpha + 25 + 70 = 180$
$2\alpha = 40$
$\alpha = 20$

⑦ $\angle BAD = 20 + 45 = 65$

Ответ: 65

ЗАДАНИЯ 17

Легко решить графически

17.20 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+20x+y^2-20y+75=\left|x^2+y^2-25\right|, \\ x-y=a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

249DBE

ТЕМА: "Легко решить графически" 17.12 - 17.21

Источники:

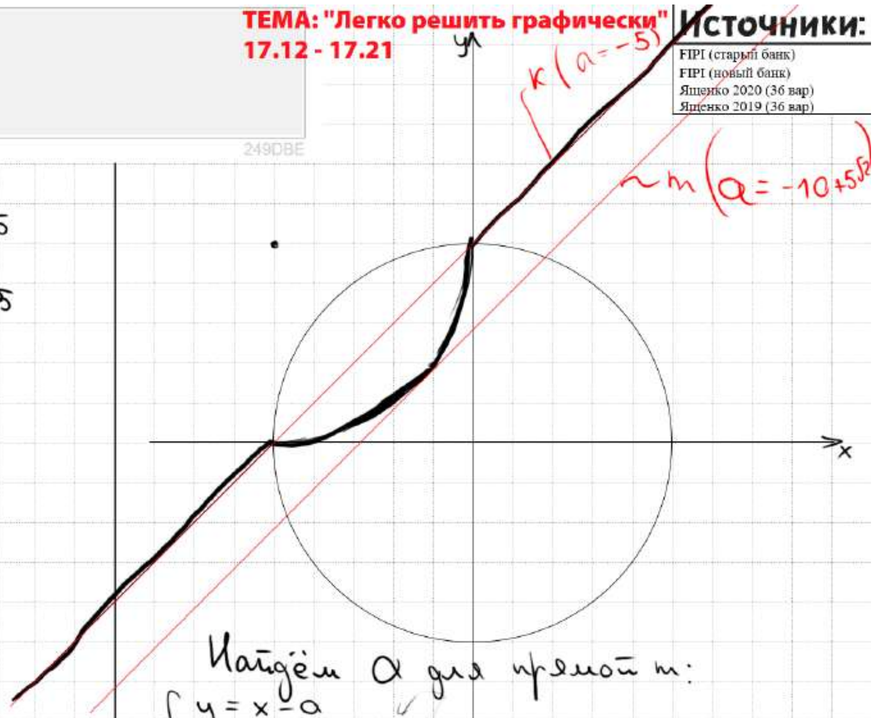
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-25\geq 0 \\ \cancel{x^2}+20x+\cancel{y^2}-20y+75=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-25 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-25<0 \\ x^2+20x+y^2-20y+75=-x^2-y^2+25 \end{cases} \end{array}\right. \\ y=x-a \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2\geq 25 \\ y=x+5 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2<25 \\ x^2+10x+25+y^2-10y+25=25 \end{cases} \end{array}\right. \\ y=x-a \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2\geq 25 \\ y=x+5 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2<25 \\ (x+5)^2+(y-5)^2=25 \end{cases} \end{array}\right. \\ y=x-a \end{array}\right.$$

Ответ: $[-5;\ -10+5\sqrt{2})$



Найдём a для прямой m:

$$\begin{cases} y=x-a \\ (x+5)^2+(y-5)^2=25 \end{cases}$$

$$x^2+10x+25+(x-a)^2-10\cdot(x-a)+\cancel{5^2}=\cancel{25}$$

$$x^2+\cancel{10x}+25+x^2-2ax+a^2-\cancel{10x}+10a=0$$

$$2x^2-2ax+a^2+10a+25=0$$

$$D=0$$

$$4a^2-4\cdot 2\cdot(a^2+10a+25)=0$$

$$-4a^2-80a-200=0$$

$$a^2+20a+50=0$$

$$D=400-200=200$$

$$a=\frac{-20\pm 10\sqrt{2}}{2}$$

$$a=-10\pm 5\sqrt{2}$$

$$a_m=-10+5\sqrt{2}$$

Дробь равна 0

17.4 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2-a^2}{x^2+8x+16-a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

83147

ТЕМА: "Дробь равна 0" 17.4 - 17.6

Источники:
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2020
Основная волна (резерв) 2013

$$\begin{cases} 9x^2-a^2=0 \\ x^2+8x+16-a^2\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-a)(3x+a)=0 \\ (x+4)^2-a^2\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x-a=0 \\ 3x+a=0 \end{array}\right. \\ (x+4-a)(x+4+a)\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{a}{3} \\ x_2=-\frac{a}{3} \end{array}\right. \\ x\neq a-4 \\ x\neq -a-4 \end{cases}$$

x_1 и x_2 должны быть различны

$\frac{a}{3}\neq-\frac{a}{3}$

$a\neq 0$

x_1 не должен быть равен $a-4$, $-a-4$

$\begin{cases} \frac{a}{3}\neq a-4 \\ \frac{a}{3}\neq -a-4 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2}{3}a\neq 4 \\ \frac{4}{3}a\neq -4 \end{cases}$ $\begin{cases} a\neq 6 \\ a\neq -3 \end{cases}$

x_2 не должен быть равен $a-4$, $-a-4$

$\begin{cases} -\frac{a}{3}\neq a-4 \\ -\frac{a}{3}\neq -a-4 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4}{3}a\neq 4 \\ \frac{2}{3}a\neq -4 \end{cases}$ $\begin{cases} a\neq 3 \\ a\neq -6 \end{cases}$

$-6 \quad -3 \quad 0 \quad 3 \quad 6 \quad a$

Ответ: $(-\infty;-6)\cup(-6;-3)\cup(-3;0)\cup(0;3)\cup(3;6)\cup(6;+\infty)$

$R\setminus\{\pm 6,\pm 3;0\}$

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2-a^2}{x^2+8x+16-a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

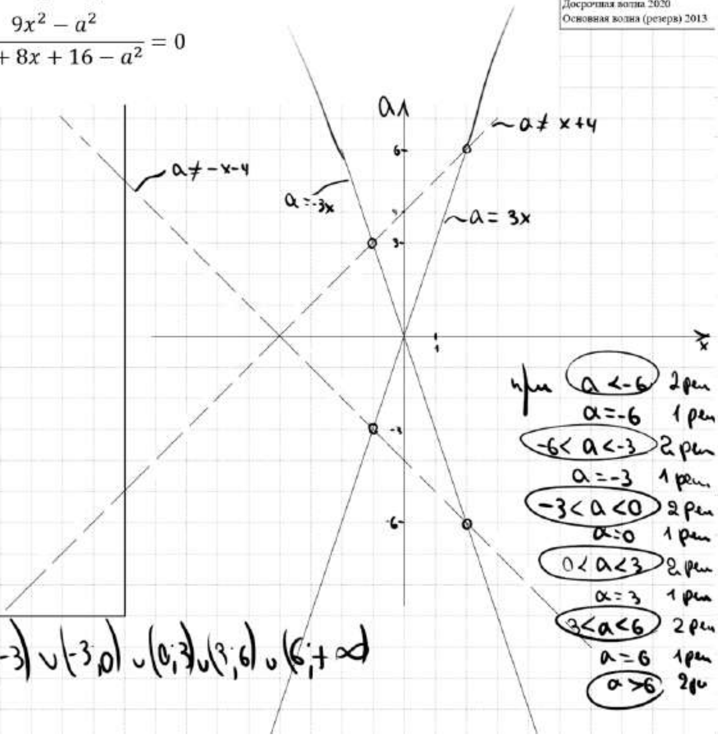
Источники:
Досрочная волна 2020
Основная волна (резерв) 2013

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2-a^2=0 \\ x^2+8x+16-a^2\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-a)(3x+a)=0 \\ (x+4)^2-a^2\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=3x \\ a=-3x \end{array}\right. \\ (x+4-a)(x+4+a)\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=3x \\ a=-3x \end{array}\right. \\ a\neq x+4 \\ a\neq -x-4 \end{cases}$$



при $a<-6$ 2 реш
$a=-6$ 1 реш
$-6<a<-3$ 2 реш
$a=-3$ 1 реш
$-3<a<0$ 2 реш
$a=0$ 1 реш
$0<a<3$ 2 реш
$a=3$ 1 реш
$3<a<6$ 2 реш
$a=6$ 1 реш
$a>6$ 2 реш

Ответ: $(-\infty;-6)\cup(-6;-3)\cup(-3;0)\cup(0;3)\cup(3;6)\cup(6;+\infty)$

Один корень на отрезке

17.1 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$(5x-2)\cdot\ln(x+a)=(5x-2)\cdot\ln(2x-a)$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

ТЕМА: "Убийца параметров" 17.1 - 17.3

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017

$(5x-2)\cdot\ln(x+a)-(5x-2)\cdot\ln(2x-a)=0$

$(5x-2)\cdot(\ln(x+a)-\ln(2x-a))=0$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}5x-2=0\\ \ln(x+a)=\ln(2x-a)\end{array}\right.\\ x+a>0\\ 2x-a>0\\ 0\le x\le 1\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0{,}4\\ x+a=2x-a\end{array}\right.\\ x+a>0\\ 2x-a>0\\ 0\le x\le 1\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0{,}4\\ x=2a\end{array}\right.\\ x+a>0\\ 2x-a>0\\ 0\le x\le 1\end{cases}$

$X=0{,}4$ является корнем ур-я при a, удовл. $\begin{cases}x+a>0\\ 2x-a>0\end{cases}$

$\begin{cases}0{,}4+a>0\\ 0{,}8-a>0\end{cases}$ $\begin{cases}a>-0{,}4\\ a<0{,}8\end{cases}$

$\Rightarrow$ при $a\in(-0{,}4;0{,}8)$ $X=0{,}4$ явл. корнем ур-я

$X=2a$ является корнем ур-я при a удовл.

$\begin{cases}x+a>0\\ 2x-a>0\\ 0\le x\le 1\end{cases}$

$\begin{cases}2a+a>0\\ 4a-a>0\\ 0\le 2a\le 1\end{cases}$ $|:2$ $\begin{cases}3a>0\\ 0\le a\le\frac{1}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow$ при $a\in(0;\frac{1}{2}]$ $X=2a$ явл. корнем ур-я

ОТВЕТ: $(-0{,}4;0]\cup\{0{,}2\}\cup(0{,}5;0{,}8)$

$X=0{,}4$ совпадает с $X=2a^{=2\cdot 0{,}2=0{,}4}$ если $0{,}4=2a$

один совпад. корень $a=0{,}2$

Нет корней | нет к. | X_1 | X_1 | X_1 X_2 | $\boxed{X_1\ X_2}$ | X_1 X_2 | X_1 X_2 | X_1 | нет к. | нет корней

$-0{,}4$ 0 $0{,}2$ $0{,}5$ $0{,}8$ a

$a<-0{,}4$ $a=-0{,}4$ $-0{,}4<a<0$ $a=0$ $0<a<0{,}2$ $a=0{,}2$ $0{,}2<a<0{,}5$ $a=0{,}5$ $0{,}5<a<0{,}8$ $a=0{,}8$ $a>0{,}8$

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$(5x-2)\cdot\ln(x+a)=(5x-2)\cdot\ln(2x-a)$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

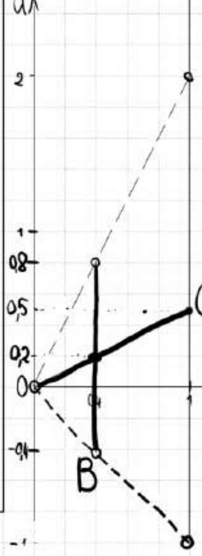
Источники:
FIPI
osfipi
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017

$(5x-2)\cdot\ln(x+a)-(5x-2)\cdot\ln(2x-a)=0$

$(5x-2)\cdot(\ln(x+a)-\ln(2x-a))=0$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}5x-2=0\\ \ln(x+a)-\ln(2x-a)=0\end{array}\right.\\ x+a>0\\ 2x-a>0\\ 0\le x\le 1\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0{,}4\\ x+a=2x-a\end{array}\right.\\ x+a>0\\ 2x-a>0\\ 0\le x\le 1\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0{,}4\\ a=\frac{1}{2}x\end{array}\right.\\ a>-x\\ a<2x\\ 0\le x\le 1\end{cases}$



Решим графически:

при $a<-0{,}4$	нет реш
$a=-0{,}4$	нет реш
$-0{,}4<a<0$	1 реш
$a=0$	1 реш
$0<a<0{,}2$	2 реш
$a=0{,}2$	1 реш
$0{,}2<a<0{,}5$	2 реш
$a=0{,}5$	2 реш
$0{,}5<a<0{,}8$	1 реш
$a=0{,}8$	нет реш
$a>0{,}8$	нет реш

Ответ: $(-0{,}4;0]\cup\{0{,}2\}\cup(0{,}5;0{,}8)$

Системы уравнений, как в 2018 году

18

Задание с развернутым ответом

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-2, \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Номер: 5161

Источники:
osfipi
Основная волна 2018
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)

Если $a=-2$, то $\begin{cases} y=-4x-4 \\ \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x \end{array}\right. \end{cases}$

будет 2 решения

$\Rightarrow$ $a \neq -2$

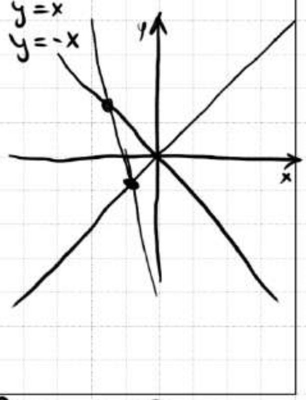


График парабола

Если $a \neq -2$, то $\begin{cases} y=(a+2)\cdot x^2+2ax+a-2 \\ \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x \end{array}\right. \end{cases}$ График - две прямые

① $x=(a+2)\cdot x^2+2ax+a-2$

② $-x=(a+2)\cdot x^2+2ax+a-2$

Квадратное уравнение может иметь максимум 2 корня

$\Rightarrow$ чтобы было 4 решения, нужно, чтобы оба квадратных уравнения сов-ти имели по 2 различных решения и не совпадали

Дискриминант уравнения ① должен быть >0

$(a+2)\cdot x^2+(2a-1)\cdot x+a-2=0$

$D_1=(2a-1)^2-4\cdot(a+2)\cdot(a-2)>0$

$4a^2-4a+1-4a^2+16>0$

$17>4a$

$a<\frac{17}{4}$

D уравнения ② д.б. >0

$(a+2)\cdot x^2+(2a+1)\cdot x+a-2=0$

$D_2=4a^2+4a+1-4a^2+16>0$

$4a>-17$

$a>-\frac{17}{4}$

Узнаем когда корни двух квадратных уравнений совпадают:

$$\cancel{(a+2)}\cdot x^2+(2a-1)\cdot x+\cancel{a-2}=\cancel{(a+2)}\cdot x^2+(2a+1)\cdot x+\cancel{a-2}$$

$$\cancel{2a}x-x=\cancel{2a}x+x$$

$$0=2x$$

$$x=0$$

$\Rightarrow$ Корни могут совпадать только если $x=0$ - один из этих корней

Узнаем при каком a одним из корней уравнения ① или ② будет являться $x=0$

Подставим $x=0$ в любое из этих уравнений:

$$(a+2)\cdot 0^2+2\cdot a\cdot 0-0+a-2=0$$

$$a=2$$

$\Rightarrow$ При $a=2$ решений будет не 4

Если $a=2$, то $4x^2+3x=0$; $x\cdot(4x+3)=0$; $x=0$, $x=-\frac{3}{4}$; $4x^2+5x=0$; $x=0$, $x=-\frac{5}{4}$

$\Rightarrow$ $a\neq 2$

Получаем $\begin{cases} a\neq -2 \\ a<\frac{17}{4} \\ a>-\frac{17}{4} \\ a\neq 2 \end{cases}$ Найдём пересечение.

Ответ: $\left(-\frac{17}{4};-2\right)\cup(-2;2)\cup\left(2;\frac{17}{4}\right)$

18

Задание с развернутым ответом

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x+ay-5)(x+ay-5a)=0,\\ x^2+y^2=16\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

i Номер: 5104

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=4^2$

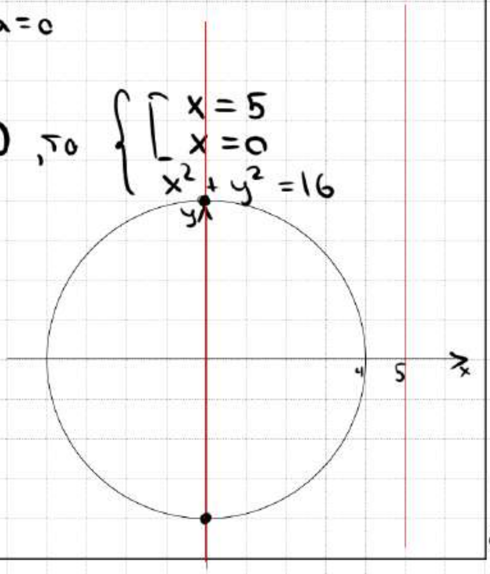
Источники:
osfipi
Основная волна 2018

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+ay-5=0\\ x+ay-5a=0\end{array}\right.\\ x^2+y^2=16\end{cases}$$

Если $a=0$, то $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5\\ x=0\end{array}\right.\\ x^2+y^2=16\end{cases}$

2 решения

$\Rightarrow a\neq 0$



Если $a\neq 0$, то $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=-\frac{x}{a}+\frac{5}{a}\\ y=-\frac{x}{a}+5\end{array}\right.\\ x^2+y^2=16\end{cases}$

Если $a=1$, то $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=-x+5\\ y=-x+5\end{array}\right.\\ x^2+y^2=16\end{cases}$ – совпадающие прямые

$\Rightarrow$ 4 решения не будет

$\Rightarrow a\neq 1$

При $a\neq 0$, $a\neq 1$, то $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=-\frac{x}{a}+\frac{5}{a} \text{ – парал.}\\ y=-\frac{x}{a}+5 \text{ – прямые}\end{array}\right.\\ x^2+y^2=16 \text{ – окр. -ть}\end{cases}$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5-ay\\ x=5a-ay\end{array}\right.\\ x^2+y^2=16\end{cases}$$

Нам нужно, чтобы окружность имела с каждой из прямых по 2 общих точки

① $(5-ay)^2+y^2=16$ $D_1>0$

② $(5a-ay)^2+y^2=16$ $D_2>0$

① $25-10ay+a^2\cdot y^2+y^2-16=0$

$(1+a^2)\cdot y^2-10a\cdot y+9=0$

$D_1>0$

$100a^2-36(1+a^2)>0$

$64a^2-36>0 \quad |:4$

$16a^2-9>0$

$(4a-3)(4a+3)>0$

$+\quad -\frac{3}{4}\quad -\quad \frac{3}{4}\quad +\quad a$

② $25a^2-10\cdot a^2\cdot y+a^2\cdot y^2+y^2-16=0$

$(1+a^2)\cdot y^2-10a^2\cdot y+25a^2-16=0$

$D_2>0$

$100a^4-4\cdot(25a^2-16+25a^4-16a^2)>0$

$\cancel{100a^4}-100a^2+64-\cancel{100a^4}+64a^2>0$

$64-36a^2>0 \quad |:4$

$16-9a^2>0$

$(4-3a)(4+3a)>0$

$-\quad -\frac{4}{3}\quad +\quad \frac{4}{3}\quad -\quad a$

Получаем $\begin{cases}a\neq 0\\ a\neq 1\\ \left[\begin{array}{l}a<-\frac{3}{4}\\ a>\frac{3}{4}\end{array}\right.\\ -\frac{4}{3}<a<\frac{4}{3}\end{cases}$

$-\frac{4}{3}\quad -\frac{3}{4}\quad 0\quad \frac{3}{4}\quad 1\quad \frac{4}{3}\quad a$

Ответ: $\left(-\frac{4}{3};-\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4};1\right)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right)$.

ЗАДАНИЯ 18

На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 3. Сумма написанных чисел равна 1062.

а) Может ли на доске быть ровно 27 чётных чисел?
б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 3?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть на доске?

Источники:
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$

а) ① Может ли быть 8 чисел, зак. на 3 и 27 чётных чисел?

Сумма восьми разл. чисел, заканч. на 3 $\geq \frac{3+73}{2} \cdot 8$

Сумма восьми чисел, заканч. на 3 ≥ 304

Сумма 27-ми разл. чётных чисел $\geq \frac{2+54}{2} \cdot 27$

Сумма 27 разл. чётных чисел ≥ 756

$\Rightarrow$ Сумма всех 35 чисел ≥ 1060 ✓

② Да, может, если взять

3 13 23 33 43 53 63 73

2 4 6 ... 50 52

56

Получаем:
Сумма $= \frac{3+73}{2} \cdot 8 + \frac{2+52}{2} \cdot 26 + 56 = 1062$

Ответ: а) да.

ОТВЕТ:	
	а) да
	б) нет
	в) 6

б) ① Может ли быть 2 числа, ок. на 3 и 33 чётных числа?

Сумма двух разл. чисел, заканч. на 3 ≥ 16

Сумма 33-х разл. чётных чисел $\geq \frac{2+66}{2} \cdot 33$

Сумма 33-х разл. чётных чисел ≥ 1122

$\Rightarrow$ Сумма всех 35-ти чисел ≥ 1138

$1138 > 1062$

Ответ: б) нет

На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 3. Сумма написанных чисел равна 1062.

а) Может ли на доске быть ровно 27 чётных чисел?
б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 3?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть на доске?

в) ① Если таких чисел < 3, то будет превышение суммы 1062 (как в п. б)

Если таких чисел 3, то
32 чётных $+ a_1 \cdot 10 + 3 + a_2 \cdot 10 + 3 + a_3 \cdot 10 + 3 =$ нечётное число
НО 1062 - чётное
$\Rightarrow$ 3 таких числа быть не может

Если таких чисел 4, то
$S \geq \frac{2+62}{2} \cdot 31 + 3 + 13 + 23 + 33$
$S \geq 1064$
$\Rightarrow$ 4 таких числа быть не может

Если таких чисел 5, то
30 чётных $+ a_1 \cdot 10 + 3 + a_2 \cdot 10 + 3 + a_3 \cdot 10 + 3 + a_4 \cdot 10 + 3 + a_5 \cdot 10 + 3 =$ нечётное число
НО 1062 - чётное
$\Rightarrow$ 5 таких чисел быть не может

Искомое кол-во чисел ≥ 6.

② Покажем, что 6 таких чисел может быть.

Сумма 6 разл. чисел, ок. на 3 $\geq \frac{3+53}{2} \cdot 6$

Сумма 6 разл. чисел, ок. на 3 ≥ 168

Сумма 29 разл. чётных чисел $\geq \frac{2+58}{2} \cdot 29$

Сумма 29 р. ч. ч. ≥ 870

$\Rightarrow$ Сумма 35-ти чисел ≥ 1038

Пример:
3 13 23 33 43 53

2 4 6 ... 54 56

82

Получаем:
Сумма $= \frac{3+53}{2} \cdot 6 + \frac{2+56}{2} \cdot 28 + 82 =$
$= 168 + 812 + 82 = 1062$

Ответ: в) 6.

19 **На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 3. Сумма написанных чисел равна 1062.**

а) Может ли на доске быть ровно 27 чётных чисел?
б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 3?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть на доске?

Решение.

а) Например, следующий набор чисел удовлетворяет условию задачи:

$$3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 2, 4, \ldots, 50, 52, 56.$$

б) Пусть на доске написано ровно два числа, оканчивающихся на 3. Тогда на доске 33 чётных числа. Их сумма не меньше, чем сумма 33 наименьших чётных чисел:

$$2+4+\ldots+66 = \frac{68 \cdot 33}{2} = 1122 > 1062.$$

Это противоречит тому, что сумма написанных чисел равна 1062.

в) Пусть на доске написано n чисел, оканчивающихся на 3, и $35-n$ чётных чисел. Тогда сумма чисел, оканчивающихся на 3, не меньше

$$3+13+\ldots+(3+10(n-1)) = \frac{(6+10(n-1)) \cdot n}{2} = 5n^2 - 2n,$$

а сумма чётных чисел не меньше

$$2+4+\ldots+2(35-n) = (35-n)(36-n) = n^2 - 71n + 1260.$$

Таким образом,

$$1062 \geq 6n^2 - 73n + 1260; \; 6n^2 - 73n + 198 \leq 0,$$

откуда, учитывая, что n — целое, получаем $n \geq 5$.

Если на доске написано пять чисел, оканчивающихся на 3, и 30 чётных чисел, то их сумма нечётна. Значит, чисел, оканчивающихся на 3, больше пяти.

Приведём пример шести чисел, оканчивающихся на 3, и 29 чётных чисел, сумма которых равна 1062:

$$3, 13, 23, 33, 43, 53, 2, 4, \ldots, 54, 56, 82.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5120.

а) Может ли оказаться, что на доске написано число 230?
б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 14?
в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

Источники:
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2017

а) $S \geqslant 230 + \frac{1+99}{2} \cdot 99$

$S \geqslant 5180$

$5180 > 5120$

$\Rightarrow$ любая сумма ста различных натуральных чисел (включающих 230) будет больше, чем 5120

$\Rightarrow$ числа 230 на доске быть не может

Ответ: а) нет.

б) $S \geqslant \frac{1+13}{2} \cdot 13 + \frac{15+101}{2} \cdot 87$

$S \geqslant 91 + 5046$

$S \geqslant 5137$

$\Rightarrow$ любая сумма ста различных натур. чисел (не включ. 14) будет больше, чем 5120.

$\Rightarrow$ число 14 точно должно быть на доске.

Ответ: б) нет.

ОТВЕТ:	а) нет
	б) нет
	в) 4

в) ① Найдём минимально возможную сумму 100 различных чисел:

$S \geqslant \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050$

S_{min} на 70 меньше, чем дано в условии

② Первые 100 различных натур. числа содержат в себе 7 чисел, кратных 14: 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98

③ Уберём одно из чисел, кратных 14 и посмотрим, какой станет минимально возможная сумма без этого числа:

Заменим 98 на 101 (тогда станет 6 чисел, кратных 14)

Тогда $S \geqslant \frac{1+97}{2} \cdot 97 + 99 + 100 + 101 = 5053$

$5053 < 5120$ ✓

Заменим 84 на 102 (тогда станет 5 чисел, кратных 14)

Тогда $S \geqslant 5053 + 18$

$S \geqslant 5071$

$5071 < 5120$ ✓

Заменим 70 на 103 (тогда станет 4 числа, кратных 14)

Тогда $S \geqslant 5071 + 33$

$S \geqslant 5104$

$5104 < 5120$ ✓

Заменим 56 на 104 (тогда станет 3 числа, кратных 14)

Тогда $S \geqslant 5104 + 48$

$S \geqslant 5152$

$5152 > 5120$ ✗

Если чисел, кратных 14 $<$ 3 штук, то $S > 5152$

$\Rightarrow$ Искомое кол-во чисел, кратных 14 $\geqslant 4$

④ Покажем, что кол-во чисел, кратных 14, может быть 4:

Пример: 1, 2, ..., 68, 69, 71, 72, ..., 82, 83, 85, 86, ..., 96, 97, ..., 99, 100, 101, 102, 119

Получаем:

$S = \frac{1+69}{2} \cdot 69 + \frac{71+83}{2} \cdot 13 + \frac{85+97}{2} \cdot 13 + \frac{99+102}{2} \cdot 4 + 119 =$

$= 35 \cdot 69 + 77 \cdot 13 + 91 \cdot 13 + 402 + 119 =$

$= 2415 + 168 \cdot 13 + 521 =$

$= 5120$ ✓

Ответ: в) 4

6. Задание 19 № 517583

На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5120.

а) Может ли быть записано число 230?

б) Можно ли обойтись без числа 14?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

Решение.

а) Пусть на доске написано число 230 и 99 других различных натуральных чисел. Минимально возможная сумма чисел на доске достигается при условии, что сумма 99 различных натуральных чисел минимальна. А это, в свою очередь, возможно, если 99 различных натуральных числа - арифметическая прогрессия с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 1$. Сумма S_{99} этих чисел, по формуле суммы арифметической прогрессии, составит:

$$S_{99} = \frac{1+99}{2} \cdot 99 = 4950.$$

Сумма всех чисел на доске S будет равна:

$$S = S_{99} + 230 = 4950 + 230 = 5180.$$

Нетрудно заметить, что полученная сумма больше, чем 5120, а это значит, что и любая сумма 100 различных натуральных чисел, среди которых есть 230, больше 5120, следовательно, числа 230 на доске быть не может.

б) Пусть на доске не записано число 14. В таком случае, минимально возможная сумма S чисел на доске будет состоять из двух сумм арифметических прогрессий: суммы S_1 первых 13 членов прогрессии с первым членом $a_1 = 1$, разностью $d = 1$ (то есть ряда 1,2,3,..13) и суммы первых 87 членов прогрессии с первым членом $a_1 = 15$, разностью $d = 1$ (то есть ряда 15,16,17,..101). Найдем эту сумму:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1+13}{2} \cdot 13 + \frac{15+101}{2} \cdot 87 = 91 + 5046 = 5137.$$

Нетрудно заметить, что полученная сумма больше, чем 5120, а это значит, что и любая сумма 100 различных натуральных чисел, среди которых нет 14, больше 5120, следовательно, без числа 14 на доске обойтись нельзя.

в) Допустим, что на доске выписаны все числа от 1 до 100. Тогда получается, что полученный ряд составляет арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$, разностью $d = 1$. По формуле для суммы арифметической прогрессии найдем сумму S_0 всех чисел на доске:

$$S_0 = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050.$$

Полученная сумма не удовлетворяет условию задачи. Теперь, чтобы увеличить сумму всех чисел, написанных на доске до обозначенной в условии, попробуем заменить числа, кратные 14 на другие числа, следующие за сотней: 70 заменим на 110, 84 - на 104, а 98 - на 108. Полученная сумма S будет равна:

$$S = S_0 - (70 + 84 + 98) + (110 + 104 + 108) = 5120.$$

При дальнейшей замене чисел, кратных 14 на числа, большие 100, сумма будет увеличиваться и не соответствовать условию задачи. Таким образом, наименьшее количество чисел, кратных 14 равно 4.

Приведем другое решение пункта в).

Приведем пример, когда на доске написано четыре числа, кратных 14 (14, 28, 42, 56):

$$1, 2, \ldots, 69, 71, 72, \ldots, 83, 85, 86, \ldots, 97, 100, 101, 102, 103, 115.$$

Докажем, что не может быть трех чисел, кратных 14. Чтобы убрать максимальное количество чисел, кратных 14, необходимо, чтобы разности между новыми и старыми числами были минимальными. То есть заменить надо наибольшие числа, кратные 14, на наименьшие возможные, большие ста числа. Пусть количество чисел, кратных 14, равно 3. Тогда минимальная сумма записанных на доске чисел равна:

$$S = 1 + 2 + \ldots + 55 + 57 + \ldots + 69 + 71 + \ldots + 83 + 85 + \ldots + 97 + 100 + \ldots 104 = 5152.$$

Полученная сумма больше, чем 5120. При дальнейшей замене чисел, кратных 14, на числа, большие 100, сумма будет увеличиваться, значит, на доске не может быть меньше четырех чисел, кратных 14.

Ответ: а) Нет б) Нет в) 4.

На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?
б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на 6?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть на доске?

Источники:
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2017

На доске могут быть числа:
2
6
12
16
22
26
32
36
...

а) Может ли быть 15 чисел, оканчивающихся на 2 ? быть 15 чисел, оканчивающихся на 6 ?

В таком случае сумма 30-ти чисел оканчивалась бы на 0, а не на 4, как 2454

Ответ: а) нет.

б) Могут ли 29 чисел оканчиваться на 2 и 1 число оканчиваться на 6?

Найдём минимально возможную сумму таких чисел:

$6 \quad \underbrace{2 \quad 12 \quad 22 \quad \dots \quad 282}_{29\ \text{чисел}}$

$S_{min} = \frac{2+282}{2} \cdot 29 + 6 = 4124$
$4124 > 2454$

Ответ: б) нет.

ОТВЕТ: а) нет
б) нет
в) 11

На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?
б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на 6?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть на доске?

в) ① Могут ли 25 чисел оканчиваться на 2 и 5 чисел на 6?

6 16 26 36 46 2 12 22 ... 242

$S \geq \frac{6+46}{2} \cdot 5 + \frac{2+242}{2} \cdot 25 = 130 + 3050$ $\quad +56-242=-186$
$S \geq 3180$

Если взять >25 чисел, оканч. на 2 и <5 чисел, ок. на 6, то S>3180

Могут ли 24 ч. ок. на 2 и 6 ч. на 6?
$S \geq \frac{6+56}{2} \cdot 6 + \frac{2+232}{2} \cdot 24$
$S \geq 2994$

Могут ли 23 ч ок. на 2 и 7 ч на 6? $\quad +66-232=-166$
$S \geq \frac{6+66}{2} \cdot 7 + \frac{2+222}{2} \cdot 23$
$S \geq 2828$

Могут ли 22 ч ок на 2 и 8 ч на 6?
$S \geq \frac{6+76}{2} \cdot 8 + \frac{2+212}{2} \cdot 22$
$S \geq 2682$

Могут ли 21 ч ок. на 2 и 9 ч на 6? $\quad +86-212=-126$
$S \geq \frac{6+86}{2} \cdot 9 + \frac{2+202}{2} \cdot 21$
$S \geq 2556$

Могут ли 20 ч ок. на 2 и 10 ч на 6?
$S \geq \frac{6+96}{2} \cdot 10 + \frac{2+192}{2} \cdot 20$
$S \geq 510 + 1940$
$S \geq 2450$

НО 10 чисел, оканчивающихся на 6 быть не может, т.к. тогда сумма 30 чисел оканчивается на 0, а не на 4, как 2454.

$\Rightarrow$ Искомое число ≥ 11

② Покажем, что 11 чисел, оканчивающихся на 6, может быть:
$S \geq \frac{6+106}{2} \cdot 11 + \frac{2+182}{2} \cdot 19$
$S \geq 2364$

6 16 26 36 46 56 66 76 86 96 196

2 12 22 32 42 52 62 72 82 92 102 112 122 132 142 152 162 172 182

Получаем сумму: $S = \frac{6+96}{2} \cdot 10 + 196 + \frac{2+182}{2} \cdot 19 = 510 + 196 + 92 \cdot 19 = 2454$

Ответ: в) 11

19. Задание 19 № 517451

На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6.

б) Может ли ровно одно число на доске оканчивается на 6?

в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть записано на доске?

Решение.

а) Если на доске написано по 15 чисел, оканчивающихся на 2 и на 6, то их сумма оканчивается на 0. Это противоречит тому, что сумма 2454.

б) Пусть на доске ровно одно число, оканчивающееся на 6. Тогда на доске написано 29 чисел, оканчивающихся на 2. Их сумма не меньше, чем сумма 29 наименьших чисел, оканчивающихся на 2: $2+12+\ldots 282 = \frac{284 \cdot 29}{2} = 4118$. Это противоречит тому, что сумма равна 2454.

в) Пусть на доске n чисел, оканчивающихся на 6 и $30-n$, оканчивающихся на 2. Тогда сумма чисел, оканчивающихся на 2, не меньше суммы

$$2+12+\ldots+(2+10(29-n)) = \frac{(4+10(29-n))(30-n)}{2} = 5n^2 - 297n + 4410.$$

Сумма чисел, оканчивающихся на 6, не меньше суммы

$$6+16+\ldots+(6+10(n-1)) = \frac{(12+10(n-1))n}{2} = 5n^2 + n.$$

Таким образом, $2454 \geq 10n^2 - 296n + 4410 \Leftrightarrow 5n^2 - 148n + 978 \leq 0$, откуда $n \geq 10$, так как $n \in \mathbb{N}$.

Если на доске 10 чисел, оканчивающихся на 6, и 20 чисел, оканчивающихся на 2, то их сумма оканчивается на 0. Значит, чисел, оканчивающихся на 6, больше 10. Приведём пример 11 чисел, оканчивающихся на 6, и 19 чисел, оканчивающихся на 2, с суммой 2454: 6, 16, ..., 86, 96, 196, 2, 12, ..., 172, 182.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 11.