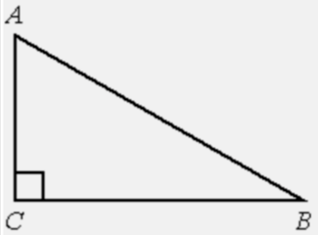
1

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = 0{,}8$. Найдите $\sin B$.

$\overset{\shortparallel}{\cos B}$

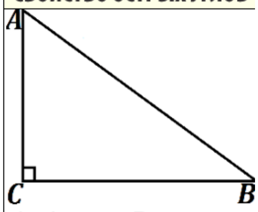


CD84BB

Источники:

FIPI (старый банк)

СВОЙСТВО ОСТРЫХ УГЛОВ



$\sin A = \cos B$

$\sin B = \cos A$

$\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B$

$\operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} A$

$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

$\sin^2 B + 0{,}64 = 1$

$\sin^2 B = 0{,}36$

$\sin B = 0{,}6$

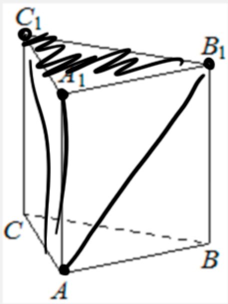
Вариант 27 в СБ 10:00

Стрим в СБ 17:00

Ответ: 0,6

2

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 4. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, A_1, B_1, C_1.



FBF62F

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Основная волна 2013

$V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4 = 12$

Ответ: 12

3

В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков делится на 5, но не делится на 30.

784B7D

Источники:
FIPI (старый банк)

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

$$P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

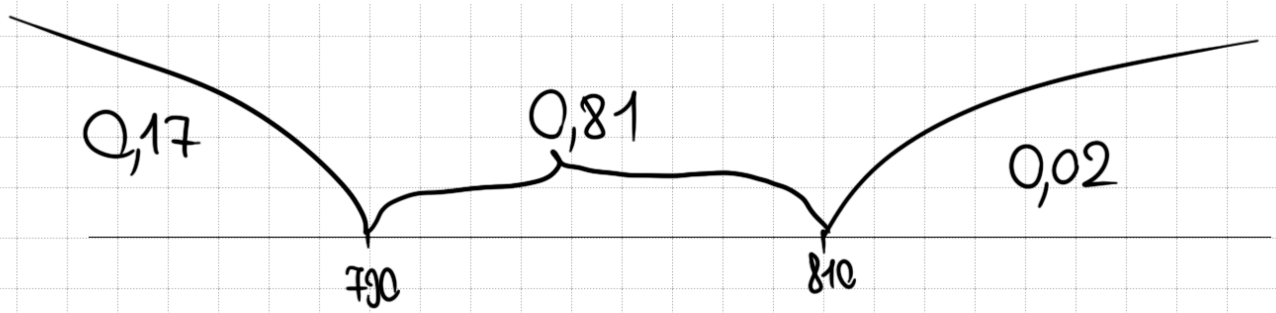
Ответ: 0,25

4

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,98. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,83. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.

A92B9D

Источники:
FIPI (старый банк)



Ответ: 0,81

5

Найдите корень уравнения $49^{x-2} = \frac{1}{7}$.

565F20

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2015
Пробный ЕГЭ 2015

$$(7^2)^{x-2} = 7^{-1}$$

$$7^{2x-4} = 7^{-1}$$

$$2x-4=-1$$

$$2x=3$$

$$x=1{,}5$$

Ответ: 1,5

6

Найдите значение выражения $\frac{21\left(\sin^2 66^\circ - \cos^2 66^\circ\right)}{\cos 132^\circ}$.

4F534A

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2021
Основная волна 2016

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

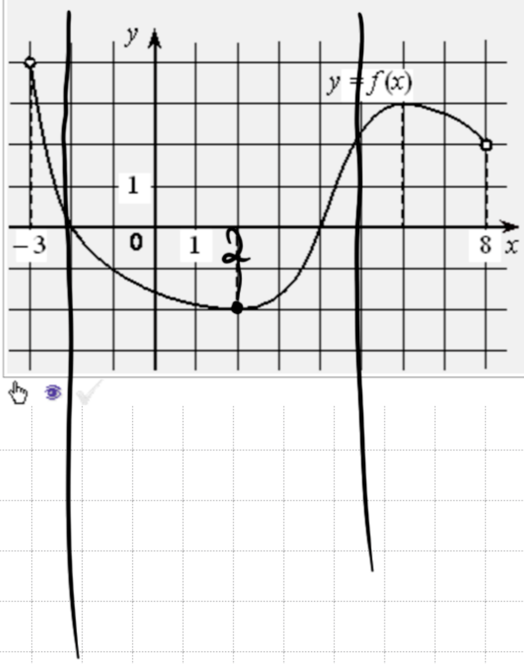
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\frac{21\cdot(\sin^2 66^2 - \cos^2 66^\circ)}{(\cos^2 66 - \sin^2 66)} = -21$$

Ответ: −21

7

На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку из отрезка $[-2; 5]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



55F759

Источники:
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2021

Ответ: 2

8

Два тела, массой $m = 2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 8$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где m — масса (в кг), v — скорость (в м/с). Найдите, под каким углом 2α должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 32 Дж. Ответ дайте в градусах.

D33D49

Источники:
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2020

$32 = 2 \cdot 8^2 \cdot \sin^2 \alpha$

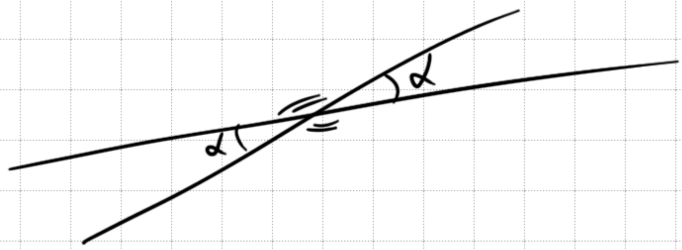
$\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$

$\sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$

Ищем острый угол

$\Rightarrow \alpha = 30^\circ \quad \cdot 2$

$2\alpha = 60^\circ$



Ответ: 60

9

Смешали некоторое количество 19-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 17-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

0DCA14

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2013

СХЕМА ЗАДАЧ НА СПЛАВЫ И СМЕСИ

$\text{Доля}_1 \cdot m_1 + \text{Доля}_2 \cdot m_2 = \text{Доля}_3 \cdot m_3$

$0{,}19 \cdot \cancel{m} + 0{,}17 \cdot \cancel{m} = X \cdot 2\cancel{m}$

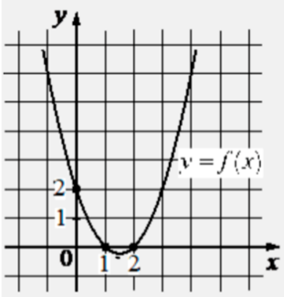
$2x = 0{,}36$

$x = 0{,}18$

Ответ: 18

10

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-2)$.



BC2802

Источники:

FIPI (старый банк)

① $a = 1$

$c = 2$

$y = 1 \cdot x^2 + bx + 2$

② $X_0 = -\frac{b}{2a}$ $X_0 = 1{,}5$ $\frac{-b}{2} = 1{,}5$ $b = -3$

$y = x^2 - 3x + 2$

③ $f(-2) = 12$

Ответ: 12

11 Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+9) - 10x + 7$.

B55725

$$y' = \frac{1}{x+9} - 10 = 0$$

$$\frac{1}{x+9} = 10$$

$$x + 9 = 0{,}1$$

$$x = -8{,}9$$

Ответ: -8,9

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017

ПРОИЗВОДНЫЕ

$C' = 0$

$x' = 1$

$(Cx)' = C$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$\big(U(V)\big)' = \big(U(V)\big)' \cdot V'$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

12 а) Решите уравнение

$$3 \cdot 9^{x+1} - 5 \cdot 6^{x+1} + 8 \cdot 2^{2x} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Источники:

Ященко 2022 (36 вар)
Досрочная волна 2021

а) $27 \cdot 9^x - 30 \cdot 6^x + 8 \cdot 4^x = 0 \quad \Big| :4^x$

$27 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x - 30 \cdot \left(\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{4}_{2}}\right)^x + 8 = 0$

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$

$27t^2 - 30t + 8 = 0$

$D = 900 - 32 \cdot 27 = 36$

$t = \frac{30 \pm 6}{54}$

$t = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $t = \frac{4}{9}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9}$

$x = -1$ $\qquad$ $x = -2$

б) Сравним корни с границами отр.

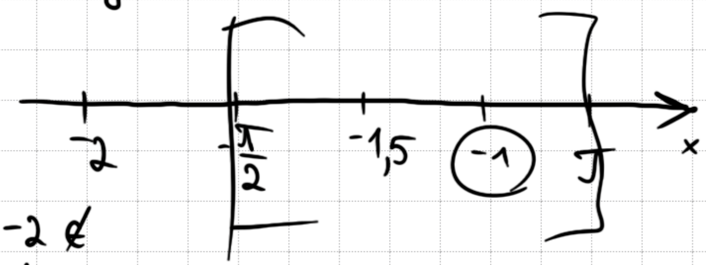
$-1 < \pi$

$-2 < \pi$

$-4 < -\pi < -3 \quad \Big| \cdot \frac{1}{2}$

$-2 < -\frac{\pi}{2} < -1{,}5 < -1$

Получаем:



$-2 \notin$

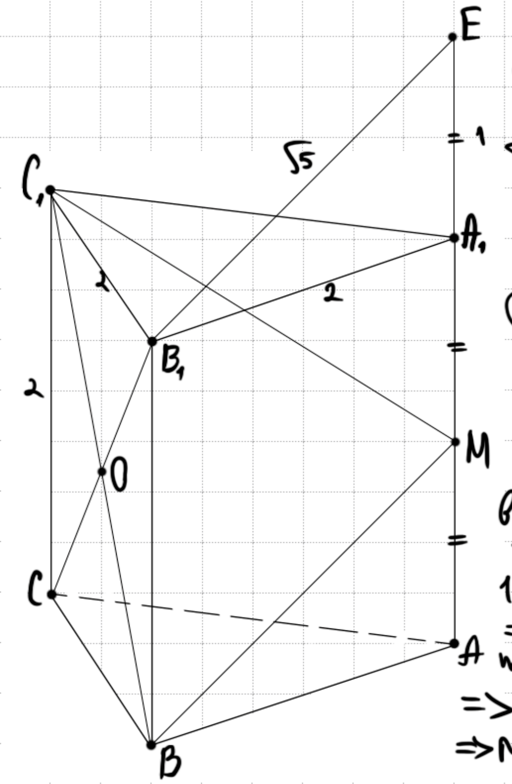
$-1 \in$

Ответ: а) $-1; -2$.
б) -1

13 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Точка M — середина ребра AA_1.

а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C.

Источники:
Досрочная волна (Резерв) 2018
Гордин #14 2019



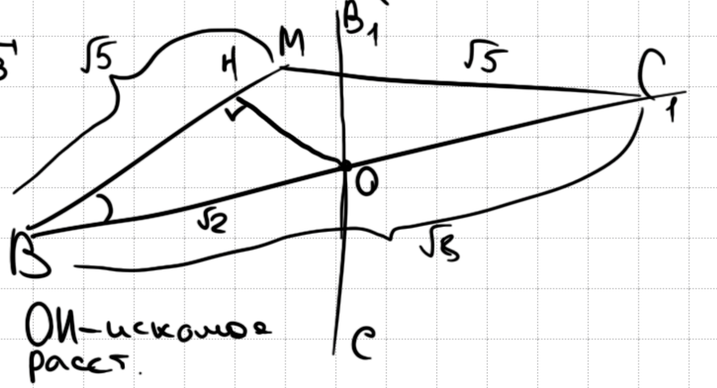
а) ① Пусть $A_1E = A_1M = 1$
Тогда $B_1E \parallel BM$

② $B_1E = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt5$
$B_1C = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt8$
$CE = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

③ Заметим, что в $\triangle CB_1E$ вып. т. Пиф.
$13 = 5 + 8$
$\Rightarrow \triangle CB_1E$ - прям. по т. обр. т. Пиф.
$\Rightarrow \angle CB_1E = 90$
$\Rightarrow MB \perp B_1C$ ■

б) ① Рассмотрим пл. BMC_1

② $B_1C \perp BM$ (см п. а)
$B_1C \perp BC_1$ (т.к. BB_1C_1C - кв-т)
$\Rightarrow B_1C \perp (BMC_1)$



OH - искомое расст.

③ $\cos B = \dfrac{5+8-5}{2\sqrt5 \cdot 2\sqrt2} = \dfrac{8}{4\sqrt{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$

$\sin B = \dfrac{\sqrt6}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt3}{\sqrt5} = \dfrac{OH}{\sqrt2}$ $\quad OH = \sqrt{1{,}2}$

Ответ: $\sqrt{1{,}2}$.

14 Решите неравенство

$$\frac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \geq 0.$$

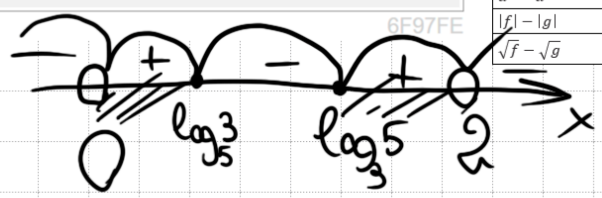
6F97FE

Источники:
FIPI (старый банк)

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

$\log_3 5 \approx 1,\ldots$
$\log_5 3 \approx 0,\ldots$



$$\frac{15^x - 3\cdot 3^x - 5\cdot 5^x + 15}{x\cdot(2-x)} \geq 0$$

$$\frac{3^x\cdot(5^x-3) - 5\cdot(5^x-3)}{x\cdot(2-x)} \geq 0$$

$$\frac{(5^x-3)(3^x-5)}{x\cdot(2-x)} \geq 0$$

$$\frac{\left(5^x - 5^{\log_5 3}\right)\cdot\left(3^x - 3^{\log_3 5}\right)}{x\cdot(2-x)} \geq 0$$

$$\frac{(\cancel{5-1})\cdot(x-\log_5 3)\cdot(\cancel{3-1})(x-\log_3 5)}{x\cdot(2-x)} \geq 0$$

Ответ: $(0; \log_5 3] \cup [\log_3 5; 2)$

15

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года; $\cdot 1{,}25$
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором разница между наибольшей и наименьшей выплатами будет меньше 1 млн рублей.

Источники:
Основная волна 2016

Пусть март – месяц платёжа

Дата	Сумма долга
и16	S
я17	$1{,}25\cdot S$
м17	$\Rightarrow$ было выплачено $0{,}55\cdot S$ (наиб.)
и17	$0{,}7S$
я18	$1{,}25\cdot 0{,}7\cdot S = 0{,}875S$
м18	$\Rightarrow$ б.в. $0{,}475\cdot S$ (наим.)
и18	$0{,}4\cdot S$
я19	$0{,}4S\cdot 1{,}25 = 0{,}5S$
м19	$\Rightarrow$ б.в. $0{,}5S$
и19	0

$0{,}55\cdot S - 0{,}475\cdot S < 1$

$0{,}075\cdot S < 1$

$\frac{75\cdot S}{1000} < 1$

$S < \frac{1000}{75}$

$S < \frac{40}{3}$

$S < 13\frac{1}{3}$

$S_{наиб} = 13$

Ответ: 13.

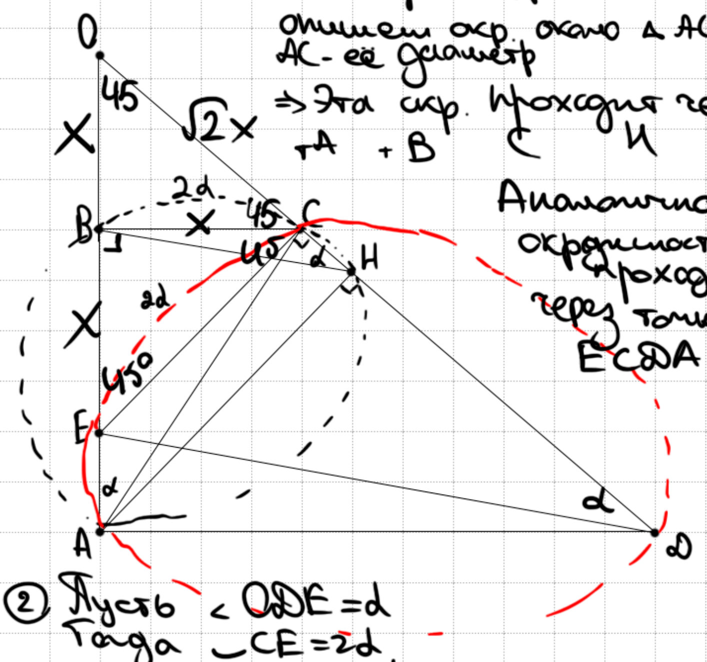
16

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 135°$.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016
Сергеев 2018
Ященко 2018

а) ① опишем окр. около $\triangle ABC$
AC – её диаметр
опишем окр. около $\triangle ACH$
AC – её диаметр
$\Rightarrow$ эта окр. проходит через т. A + B C H



Аналогично окружность проходит через точки $ECDA$

② Пусть $\angle ODE = \alpha$
Тогда $\smile CE = 2\alpha$
$\angle EAC = \alpha$
$\smile BC = 2\alpha$
$\angle BHC = \alpha = \angle ODE$ (соотв.)
$\Rightarrow BH \parallel ED$

б) ① $\triangle OBH \sim \triangle OED$ (по 2 углам α и общему O)

$\frac{BH}{ED} = k = \frac{OB}{OE}$

② Пусть $OB = x$
Тогда $BE = x$ ($BC = x$)
(т.к. $\triangle OBC$ и $\triangle BEC$ – прямоугольные и р/б.)

$\frac{OB}{OE} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

Ответ: 1:2

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (x-1)\cdot\sqrt{3x-a} = x$$

имеет ровно один корень на отрезке [0; 1].

Источники:
Основная волна 2017
Основная волна (Резерв) 2019

$$x^2 - x + (x-1)\cdot\sqrt{3x-a} = 0$$
$$x\cdot(x-1) + (x-1)\cdot\sqrt{3x-a} = 0$$
$$(x-1)(x + \sqrt{3x-a}) = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x + \sqrt{3x-a} = 0 \quad (1) \end{array}\right. \\ 3x - a \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(1) $\sqrt{3x-a} = -x$

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ (3x-a) = (-x)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ 3x - a = x^2 \end{cases}$$

Это уравнение имеет корень на отрезке [0; 1] только если $x=0$

Найдём a, при $x=0$

$\sqrt{3\cdot 0 - a} = 0$

$a = 0$

$\Rightarrow$ при $a=0$ $x=0$ является корнем ур-я

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ a = 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ 3x - a \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$x=1$ при a удовл. $3x - a \geq 0$

$3\cdot 1 - a \geq 0$

$a \leq 3$

$\Rightarrow$ при $a \leq 3$ $x=1$ является корнем ур-я

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 3]$

$x=1$	$x=1$, $x=0$	$x=1$	$x=1$	
$a<0$	$a=0$	$0<a<3$	$a=3$	$a>3$
1 корень	2 корня	1 корень	1 корень	нет корней

18	В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

Источники:
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2020

а) Может ли n быть больше 5?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

а) Если $n=6$, то

День 1	3 1 1 1 1 1 1 1	$S=10$
День 2	5 1 1 1 1 1 1	$S=11$
День 3	2 2 2 2 2 2	$S=12$
День 4	5 5 1 1 1	$S=13$
День 5	4 4 3 3	$S=14$
День 6	5 5 5	$S=15$

б) **Пример #1** ×

День 1 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 $Ср.ар_1=2,9$ ✓
День 2 5 5 5 5 5 5 5 5 5

$Ср.ар. за все дни = \frac{29+45}{19} = 3\frac{17}{19} < 4$ ×

Пример #2

День 1 $2\ \underbrace{33\ldots3}_{10 шт}$ $S=32$
День 2 $\underbrace{5555555522}_{\leq 10 чисел}$ $S=44$
День 3 $\underbrace{555555555}_{\leq 9 чисел}$ $S=45$

$Ср.ар. за все дни = \frac{32+44+45}{30} = \frac{121}{30} > 4$ ✓

Ответ:
а)
б)
в)

18	В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

в)

День 1	от 2 до 6	$S=6$
День 2	≤ 5 ч	$S\geq 7$
День 3	≤ 4 ч	$S\geq 8$
День 4	≤ 3 ч	$S\geq 9$
День 5	≤ 2 ч	$S\geq 10$
День 6	≤ 1 ч	$S\geq 11$

$\Rightarrow n\leq 5$, т.к. если $n=6$, то 1 число имеет сумму не менее 11, что противоречит усл.
$n>6$, то в последний день чисел на доске нет, что противоречит усл.

1 случай 5 дней

День 1	1 1 1 1 1 1	≤ 6 ч		$S=6$
День 2	3 1 1 1 1	≤ 5 ч	$S=7$	$S\geq 7$
День 3	2 2 2 2	≤ 4 ч	$S=8$	$S\geq 8$
День 4	3 3 3	≤ 3 ч	$S=9$	$S\geq 9$
День 5	5 5	≤ 2 ч	$S=10$	$S\geq 10$

$\Rightarrow \leq 2$ числа могут иметь сумму ≥ 10, только если это 5 и 5
Получаем при $n=5$ Сумма всех чисел $=40$

2 случай 4 дня

День 1	≤ 6 ч	$S=6$
День 2	≤ 5 ч	$S\leq 13$
День 3	≤ 4 ч	$S\leq 14$
День 4	≤ 3 ч	$S\leq 15$

Сумма всех чисел ≤ 48

3 случай 3 дня

День 1	≤ 6 чисел	$S=6$
День 2	≤ 5 ч	$S\leq 19$
День 3	≤ 4 ч	$S\leq 20$

Сумма всех чисел ≤ 45

4 случай 2 дня

День 1	≤ 6 ч	$S=6$
День 2	≤ 5 ч	$S\leq 25$

Сумма всех чисел ≤ 31

5 случай 1 день

День 1	≤ 6 ч	$S=6$

Сумма всех чисел $=6$

$\Rightarrow$ Сумма всех чисел ≤ 48 чисел.

Покажем, что 48 чисел может быть:

День 1	1 1 1 1 1 1	$S=6$
День 2	5 5 1 1 1	$S=13$
День 3	5 5 2 2	$S=14$
День 4	5 5 5	$S=15$

Сумма чисел $=6+13+14+15=48$ ✓

Ответ: в) 48