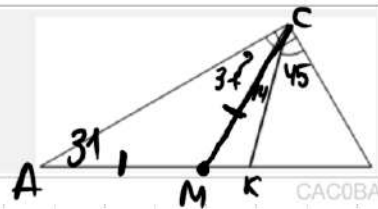


1

Угол между биссектрисой и медианой прямоугольного треугольника, проведёнными из вершины прямого угла, равен 14° . Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

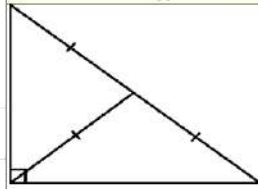
**Источники:**

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Основная волна 2014

СВОЙСТВО МЕДИАНЫ

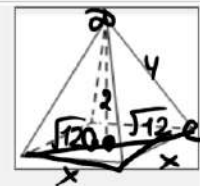


В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

ОТВЕТ: 31

2

В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите её объём.



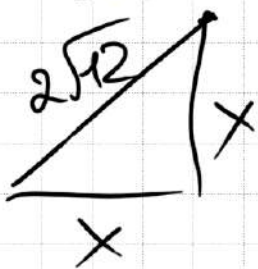
F26E93

Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Досрочная волна 2015



$$\begin{aligned} (2\sqrt{2})^2 &= x^2 + x^2 \\ 4 \cdot 2 &= 2 \cdot x^2 \\ x^2 &= 24 \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 2 = 16$$

ОТВЕТ: 16

3

Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже $36,8^\circ\text{C}$, равна $0,94$. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура тела окажется $36,8^\circ\text{C}$ или выше.

4F31D7

Источники:

ГПР (старый банк)
Досрочная волна 2020

$$1 - 0,94$$

ОТВЕТ: 0,06

4

Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью $0,5$ при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не меньше $0,8$?

3C509C

Источники:

ГПР (старый банк)

$$\left. \begin{aligned} P(\text{попасть}) &= 0,5 \\ P(\text{промахнуться}) &= 0,5 \end{aligned} \right\} 1$$

$$P(\text{поражение цели}) \geq 0,8$$

$$P(\text{уцелеть}) \leq 0,2$$

- 1 выстрел
- 2 выстрела
- 3 выстрела

$$P(\text{уцелеть}) = 0,5$$

$$P(\text{уцелеть}) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

$$P(\text{уцелеть}) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125 \quad \checkmark$$

ОТВЕТ: 3

5

Найдите корень уравнения
 $(5x - 8)^2 = (5x - 2)^2$.

$$\cancel{25x^2} - 80x + 64 = \cancel{25x^2} - 20x + 4$$

$$60 = 60x$$

$$x = 1$$

ОТВЕТ: 1

6

Найдите значение выражения $\sqrt{108} \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sqrt{27}$.

D78270

$$\sqrt{27} \cdot \left(\sqrt{4} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 \right)$$

$$\sqrt{27} \cdot \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 \right)$$

$$\sqrt{27} \cdot \cos \frac{2\pi}{12}$$

$$\sqrt{27} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4,5$$

ОТВЕТ: 4,5

Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Досрочная волна 2019

Пробный ЕГЭ 2018

Основная волна 2017

Пробный ЕГЭ 2016

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

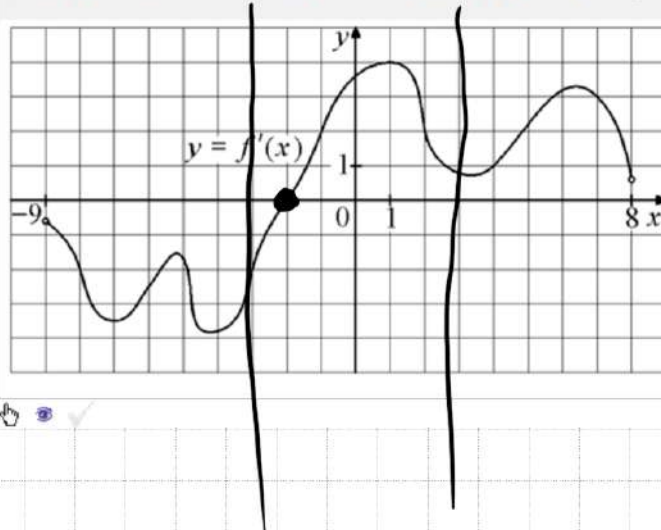
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

7

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 3]$.



720371

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2021
 Основная волна 2018

ОТВЕТ: -2

8

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения P (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь поверхности S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21}$ м², а излучаемая ею мощность P равна $4,104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Дайте ответ в градусах Кельвина.

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна (Резерв) 2019
 Досрочная волна 2014

C24CBD

$$4,104 \cdot 10^{27} = 5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{18} \cdot 10^{21} \cdot T^4$$

$$T^4 = \frac{4,104 \cdot 10^{27} \cdot 10^8 \cdot 18}{5,7 \cdot 1 \cdot \frac{1}{18} \cdot 10^{21}} = \frac{4,104 \cdot 10^{14} \cdot 18 \cdot 1000}{5,7 \cdot 1000} =$$

$$= \frac{4104 \cdot 10^{14} \cdot 18 \cdot 6}{57 \cdot 100}$$

$$T^4 = \frac{19}{216} \cdot 6 \cdot 10^{12} = 6^4 \cdot 10^{12} \quad \wedge \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r} 4104 \overline{) 19} \\ \underline{38} \\ 30 \\ \underline{19} \\ 114 \end{array}$$

ОТВЕТ: 6000

9

Имеется два сосуда. Первый содержит 80 кг, а второй – 70 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 63% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 65% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

$$\begin{cases} x \cdot 80 + y \cdot 70 = 0,63 \cdot 150 \\ x \cdot 80 + y \cdot 70 = 0,65 \cdot 150 \end{cases}$$

Выразим $y = 1,3 - x$

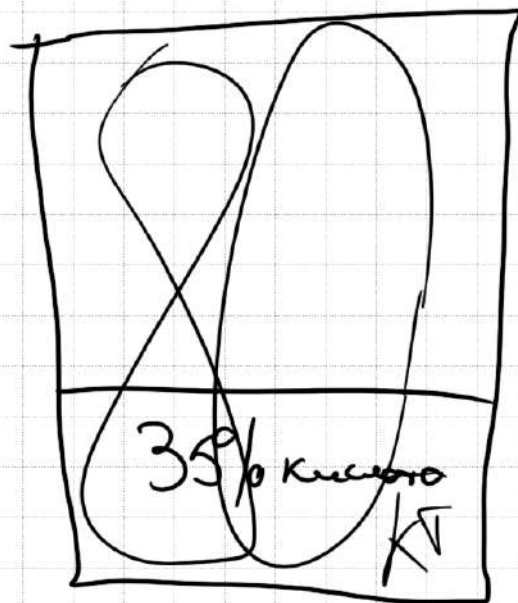
$$80 \cdot x + 70 \cdot (1,3 - x) = 94,5$$

$$80x + 91 - 70x = 94,5$$

$$10x = 3,5$$

$$x = 0,35$$

$$80 \cdot x = 0,35 \cdot 80 = 28$$



ОТВЕТ: 28

Источники:

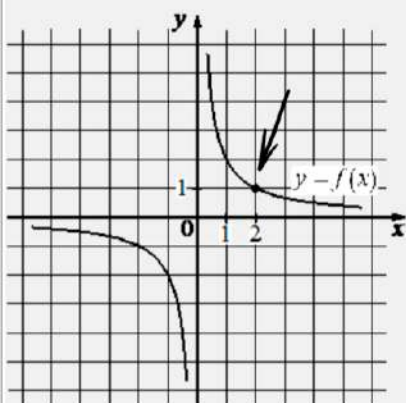
ГІРІ (новый банк)

СХЕМА ЗАДАЧ НА СПЛАВЫ И СМЕСИ

Доля₁ · m₁ + Доля₂ · m₂ = Доля₃ · m₃

10

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



$$(2, 1)$$

$$1 = \frac{k}{2}$$

$$k = 2$$

$$y = \frac{2}{x}$$

$$f(10) = \frac{2}{10} = 0,2$$

ОТВЕТ: 0,2

Источники:

ГІРІ (старый банк)

Основная волна 2022

11

Найдите точку минимума функции $y = 1,5x^2 - 30x + 48 \cdot \ln x + 4$.

77454B

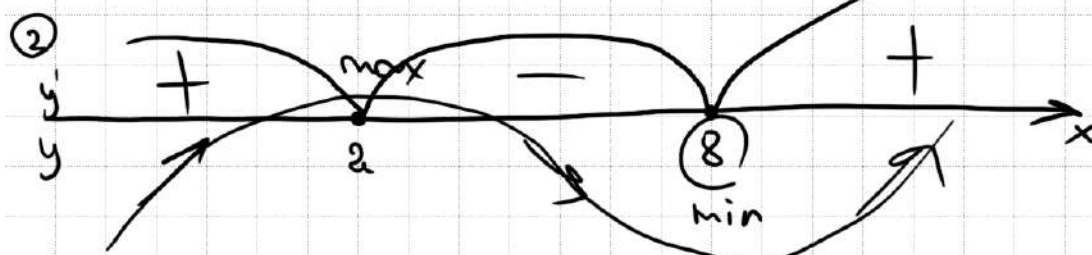
$$\textcircled{1} y' = 3x - 30 + 48 \cdot \frac{1}{x} = 0 \quad | :3$$

$$x - 10 + \frac{16}{x} = 0$$

$$\frac{x^2 - 10x + 16}{x} = 0$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x = 2 \qquad x = 8$$



ОТВЕТ: 8

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2021
 Досрочная волна 2019
 Основная волна 2016
 Основная волна 2014

ПРОИЗВОДНЫЕ

$$C' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(Cx)' = C$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(U \cdot V)' = U'V + UV'$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

$$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$$

12

а) Решите уравнение $3\operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

272AD0

$$\text{а) } \frac{3 \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0$$

$$\frac{3\sin^2 x - 5\cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

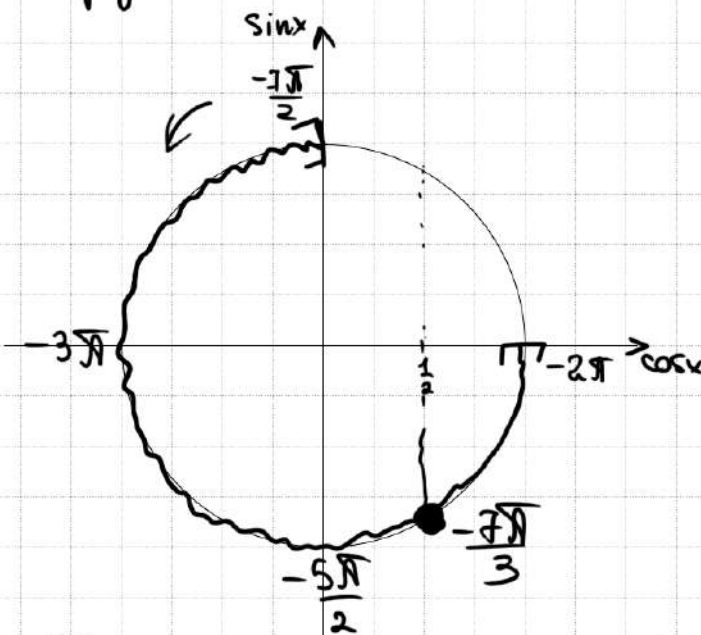
$$\frac{3 - 3\cos^2 x - 5\cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\frac{-2\cos^2 x - 5\cos x + 3}{\cos^2 x} = 0$$

Получаем $\cos x = -3$ Нет решений $\cos x = \frac{1}{2}$
 $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

ОТВЕТ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{7\pi}{3}$

б) Отберём корни с помощью окружности:



Получим число $x = -2\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 Основная волна (Резерв) 2013

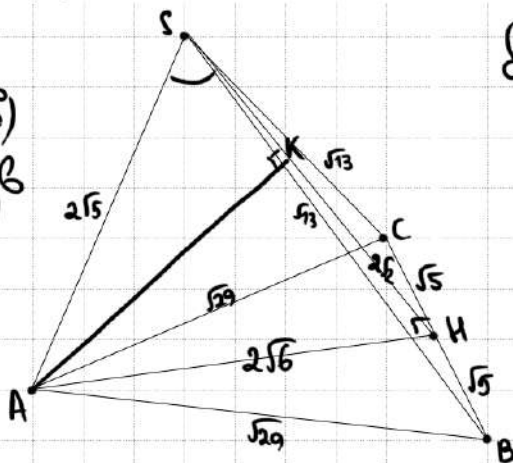
13 В пирамиде $SABC$ известны длины рёбер: $AB = AC = \sqrt{29}$, $BC = SA = 2\sqrt{5}$, $SB = SC = \sqrt{13}$.

- а) Докажите, что прямая SA перпендикулярна прямой BC .
 б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC .

а) ① $BC \perp AH$
 (т.к. AH - медиана ΔABC - р/б)

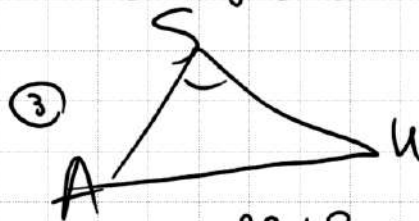
$BC \perp SH$
 (т.к. SH - медиана ΔSBC - р/б)

$\Rightarrow BC \perp (ASH)$
 $\Rightarrow BC \perp SA$ ■



б) ① Пусть $AK \perp SH$
 SK - проекция AS на
 пл. SBC
 $\Rightarrow \angle ASK$ - искомым
 $\angle ASH$

② $AK = \sqrt{29 - 5} = 2\sqrt{6}$
 $SK = \sqrt{13 - 5} = 2\sqrt{2}$



$\cos \angle ASK = \frac{20 + 8 - 24}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{4}{8\sqrt{10}} = \frac{1}{2\sqrt{10}}$

ОТВЕТ: $\arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{10}}\right)$

Источники:

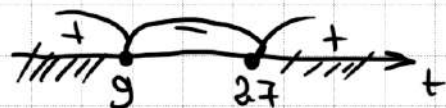
Досрочная волна 2019
 УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И
 ПЛОСКОСТЬЮ



14 Решите неравенство
 $9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geq 0$.

Пусть $3^{4x-x^2-1} = t$

$t^2 - 36t + 243 \geq 0$



$\begin{cases} t \leq 9 \\ t \geq 27 \end{cases}$

$3^{4x-x^2-1} \leq 3^2$

$4x - x^2 - 1 \leq 2$

$x^2 - 4x + 3 \geq 0$



$3^{4x-x^2-1} \geq 3^3$

$4x - x^2 - 1 \geq 3$

$x^2 - 4x + 4 \leq 0$

$(x-2)^2 \leq 0$

$x = 2$

Объединим

ОТВЕТ: $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$

Источники:

Основная волна (Резерв) 2017

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на срок 10 лет. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наименьшую возможную ставку r , если известно, что последний платёж будет не менее 0,819 млн рублей.

Пусть $(1 + \frac{r}{100}) = b$

Дата	Сумма долга	конец года
и	7	и
и	7b	и
и	7b ²	и
и	7b ³	и
и	7b ⁴	и
и	7b ⁵	и
и	7b ⁶	и
и	7b ⁷	и
и	7b ⁸	и
и	7b ⁹	и
и	7b ¹⁰	и

⇒ сумма выплаты 7b - 6,3
 ⇒ сумма выплаты 6,3b - 5,6
 ⇒ сумма выплаты 5,6b - 4,9

0,7
 0,7b
 ⇒ с.в. 0,7b
 0

0,7b ≥ $\frac{819}{1000}$
 $b ≥ \frac{819 \cdot 10}{1000 \cdot 7}$
 $\frac{100+r}{100} \geq \frac{117}{100}$
 $\frac{r}{100} \geq \frac{17}{100}$
 $r \geq 17$
 $r_{\text{наим}} = 17$

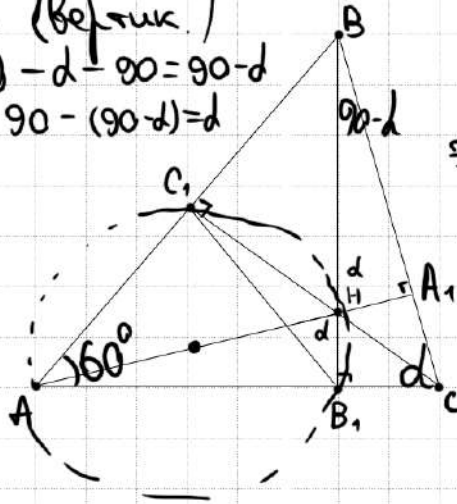
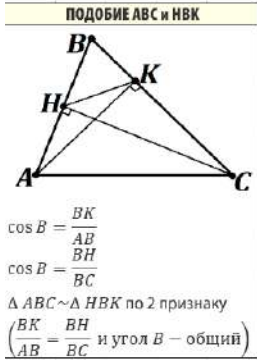
ОТВЕТ: 17

686BE7

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.б) Найдите BC , если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

а) Пусть $\angle AHB_1 = d$
 Тогда $\angle A_1HB = d$ (вертик.)
 $\angle A_1BH = 180 - d - 90 = 90 - d$
 $\angle BCB_1 = 180 - 90 - (90 - d) = d$
 $\angle AHB_1 = \angle ACB = d$

б) ① $\angle AC_1H = 90^\circ$
 Опшем окр-ть около $\triangle AC_1H$
 $\angle AB_1H = 90^\circ$
 Опшем окр-ть около $\triangle AB_1H$
 Эти окр-ти совпадают.



② по $\triangle \sin \triangle AC_1B_1$
 $\frac{B_1C_1}{\sin 60^\circ} = 2R$
 $B_1C_1 = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

③ $\cos 60^\circ = \frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$

$\Rightarrow \triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$
 $k = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
 $BC = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

ОТВЕТ: $4\sqrt{3}$.

$$(\operatorname{tg} x + 6)^2 - (a^2 + 2a + 8)(\operatorname{tg} x + 6) + a^2(2a + 8) = 0$$

имеет на отрезке $[0; \frac{3\pi}{2}]$ ровно два решения.

Пусть $(\operatorname{tg} x + 6) = t$

Тогда $t^2 - (a^2 + 2a + 8) \cdot t + a^2(2a + 8) = 0$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = a^2 + 2a + 8 \\ t_1 t_2 = a^2(2a + 8) \end{cases}$$

$$t_1 = a^2 \quad t_2 = 2a + 8$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + 6 = a^2 \\ \operatorname{tg} x + 6 = 2a + 8 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = a^2 - 6 \\ \operatorname{tg} x = 2a + 2 \end{cases}$$

1 случай

Если $a^2 - 6 = 2a + 2$, то

$$a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$a = 4$$

$$a = -2$$

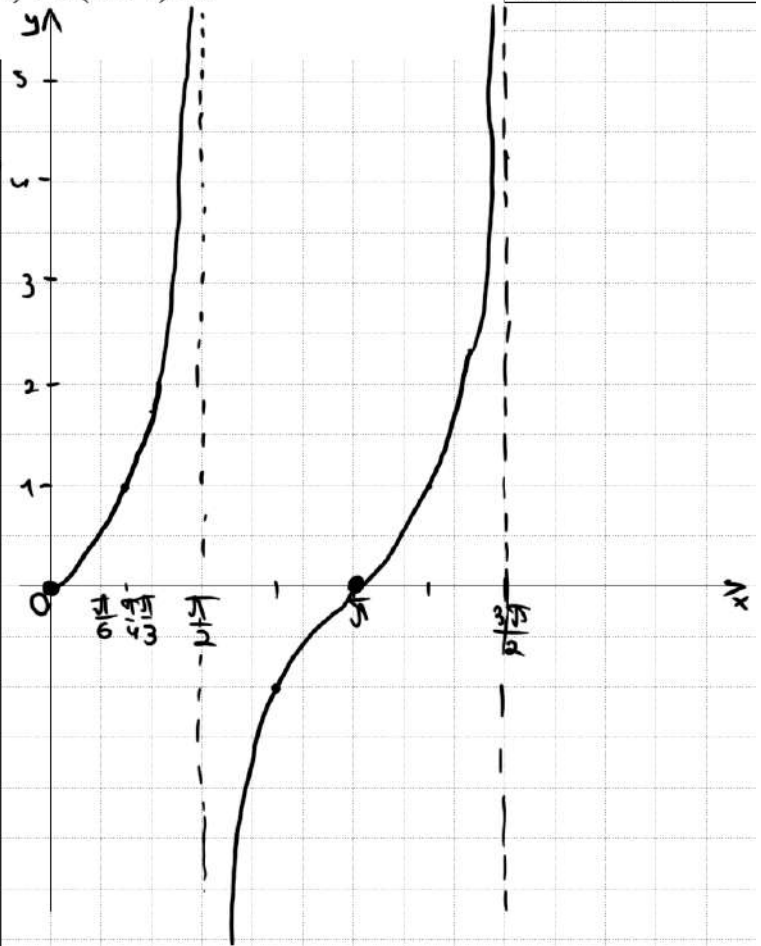
Если $a = 4$, то $\operatorname{tg} x = 10$

Получаем 2 решения

ОТВЕТ: $(-\sqrt{6}; -2) \cup (-2; -1) \cup \{4\}$

Если $a = -2$, то $\operatorname{tg} x = -2$

Получаем 1 решение



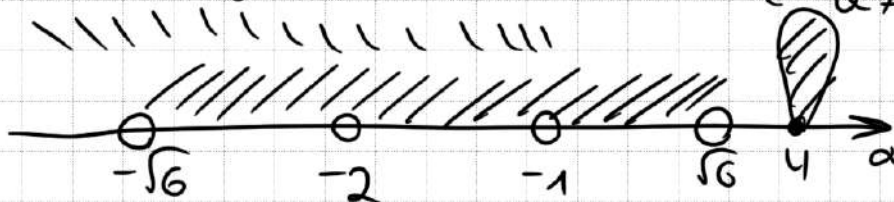
2 случай

Когда обе горизонтальные прямые пересекаются и не совпадают

$$\begin{cases} a^2 - 6 < 0 \\ 2a + 2 < 0 \\ a \neq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a - \sqrt{6})(a + \sqrt{6}) < 0 \\ a < -1 \\ a \neq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} + & - & + \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & \\ a < -1 \\ a \neq -2 \end{cases}$$



Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1 000 кг и 60 штук по 1 500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъемностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъемностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъемностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

а) ① $\frac{5000}{800} = 6,25$
 $\Rightarrow 6$ (800 кг глыб) - везет в 1 груз.

② $\frac{50}{6} = 8\frac{1}{3}$
 $\Rightarrow 9$ грузовиков повежут все 800 кг глыб

③ $\frac{5000}{1000} = 5$

④ $\frac{60}{5} = 12$ грузовиков повежут все 1000 кг глыб

ОТВЕТ:
 а)
 б)
 в)

⑤ $\frac{5000}{1500} = 3\frac{1}{3}$
 $\Rightarrow 3$ (1500 кг глыб) везет в 1 г.

$\frac{60}{3} = 20$ грузовиков повежут все 1500 кг глыб

Итого 41 грузовиков понадобится для примера выше
 Ответ: а) да

б) ① Все глыбы весят 190 тонн
 Вместимость грузовиков в 190 тонн
 \Rightarrow каждому грузовику нужно заполнить целиком

② 1500 кг глыбы можно перевезти только по 2 штуки в машине (т.к. если в машине 1 или 3 таких глыбы, то машину не заполнить целиком никогда)
 $\Rightarrow 30$ машин будут заполнены так:

1500
 1500
 1000
 1000

Оставшиеся 8 машин не смогут перевезти 800 кг глыб, т.к. в машинах будет оставаться пустое м-во.
 Ответ: б) нет.

Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1 000 кг и 60 штук по 1 500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъемностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъемностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъемностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Как - во грузовиков ≥ 39 (см. и б)

Покажем, что 39 машин хватит:

30 машин будут заполнены так:

1500
 1500
 1000
 1000

8 машин д. з. так: 800×6

1 машина д. з. так: 800
 800

Ответ: в) 39