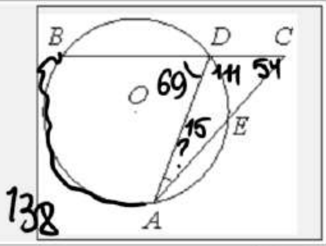
1

Угол ACB равен 54°. Градусная мера дуги AB окружности, не содержащей точек D и E,
равна 138°. Найдите угол DAE. Ответ дайте в градусах.



6328DF

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

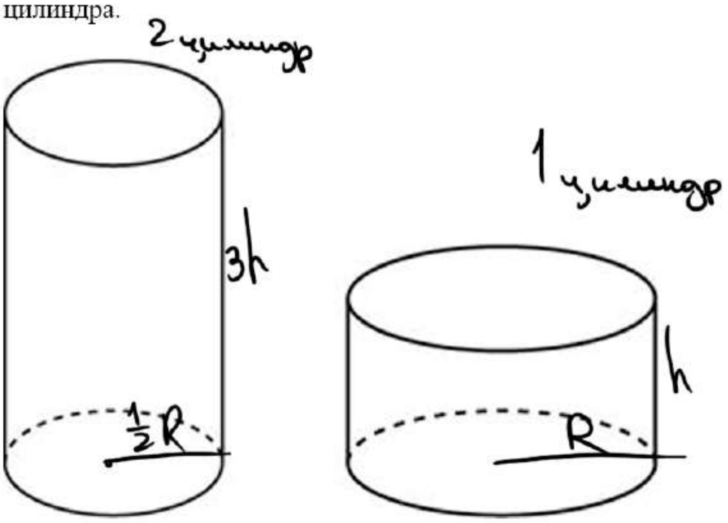
Ответ: 15

2

Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 12. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания в два раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.

Источники:

Основная волна 2019
Основная волна 2017



① $V = \pi R^2 h = 12$

② $V = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}R\right)^2 \cdot 3h = \frac{3}{4}\pi R^2 h = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$

Ответ: 9

3

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что количество выпавших орлов меньше 2.

42401C

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2013

ООО   РРР
ООР   РРО
ОРО   РОР
ОРР   РОО

$P = \frac{4}{8} = 0,5$

Ответ: 0,5

4

Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Стартер» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стратор». Найдите вероятность того, что «Стартер» будет начинать только вторую игру.

Источники:
Досрочная волна 2019

ВВВ   ППП
ВВП   ППВ
ВПВ   ПВП
ВПП   ПВВ

$P = \frac{1}{8} = 0,125$

Ответ: 0,125

5 Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{2x-5}=\frac{1}{4x+13}.$$

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2013

$4x+13=2x-5$
$2x=-18$
$x=-9$

Ответ: -9

6 Найдите значение выражения

$$\frac{2^{3,2}\cdot 6^{6,2}}{12^{5,2}}.$$

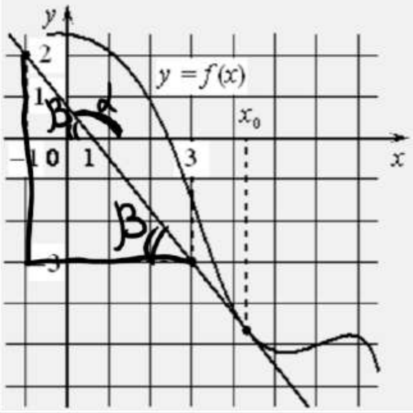
Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

$$\frac{2^{3,2}\cdot 6^{6,2}}{2^{5,2}\cdot 6^{5,2}}=2^{-2}\cdot 6^{1}=\frac{1}{4}\cdot 6=1,5$$

Ответ: 1,5

7

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



$f'(x_0) = tg\alpha$

$tg\beta = \frac{5}{4} = 1{,}25$

5D7FC4

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2021
Демо 2020
Пробный ЕГЭ 2019
Основная волна 2013

Ответ: -1,25

8

В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = a t^2 + b t + H_0$, где $H_0 = 3$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{768}$ м/мин ^{2} и $b = -\frac{1}{8}$ м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

E4E32E

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018

$0 = \frac{1}{768} \cdot t^2 - \frac{1}{8}t + 3 \quad | \cdot 768$

$t^2 - 96t + 2304 = 0$

$(t-48)^2 = 0$

$t = 48$

Ответ: 48

9

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 132 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 1 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 1 час. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

DB0573

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2013

A — B

$v = x$
$t = \frac{132}{x}$
$S = 132$

$v = x+1$
$t = \frac{132}{x+1}$
$S = 132$

$t_{медл} - t_{быстр} = 1$

$\frac{132}{x} - \frac{132}{x+1} = 1$

$\frac{132}{x^2+x} = \frac{1}{1}$

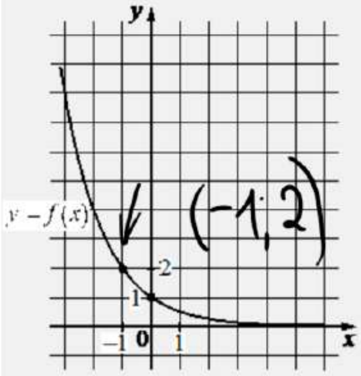
$x^2 + x - 132 = 0$

$x = -12 \qquad x = 11$

Ответ: 11

10

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-3)$.



$(-1; 2)$

783DBA

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна 2022

① $2 = a^{-1}$
$2 = \frac{1}{a}$
$a = \frac{1}{2}$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

② $f(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

Ответ: 8

11

Найдите точку максимума функции $y = (x+5)^2 \cdot e^{2-x}$.

B744FF

Источники:
FIPI (старый банк)
Демо 2021
Демо 2020
Основная волна 2017

ПРОИЗВОДНЫЕ

$C' = 0$
$x' = 1$
$(Cx)' = C$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
✓ $(U \cdot V)' = U'V + UV'$
$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
$\big(U(V)\big)' = \big(U(V)\big)' \cdot V'$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

① $y = (x^2 + 10x + 25) \cdot e^{2-x}$

② $y' = (2x+10)\, e^{2-x} + (x^2 + 10x + 25) \cdot e^{2-x} \cdot (-1)$

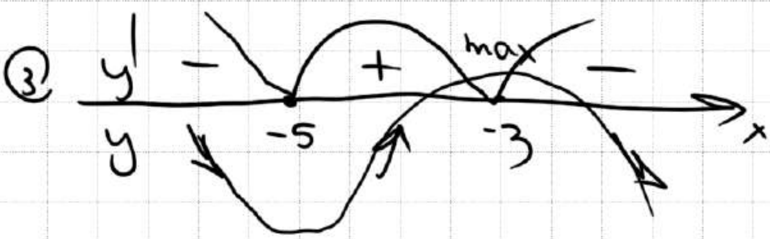
$(2x+10) \cdot e^{2-x} - (x^2 + 10x + 25) \cdot e^{2-x} = 0$

$e^{2-x} \cdot (2x + 10 - x^2 - 10x - 25) = 0$

$e^{2-x} = 0$ $\qquad -x^2 - 8x - 15 = 0 \quad |\cdot(-1)$

$\varnothing$ $\qquad x^2 + 8x + 15 = 0$

$x = -3 \qquad x = -5$

③


Ответ: -3

12 а) Решите уравнение

$$\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2018
Основная волна 2020
Досрочная волна (Резерв) 2017

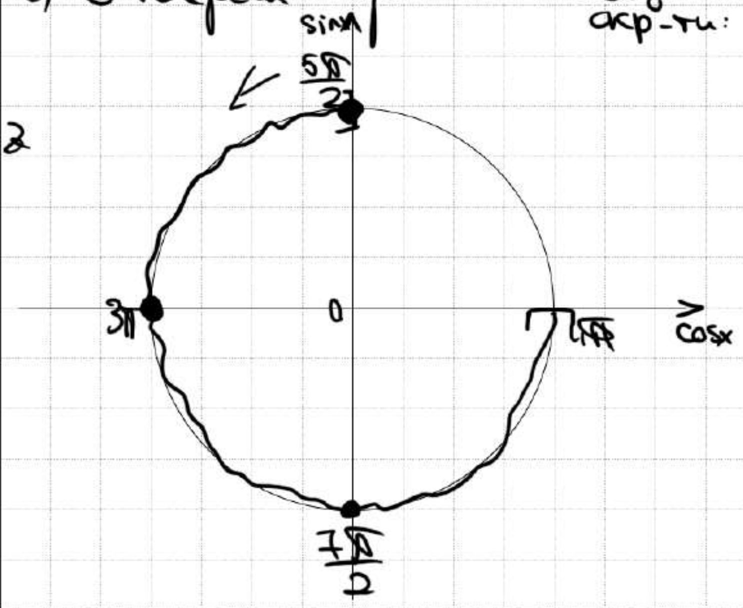
а) $\cos^2 x + \cos x = 0$

$\cos x \cdot (\cos x + 1) = 0$

$\cos x = 0 \qquad \cos x = -1$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z \qquad x = \pi + 2\pi n; n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окр-ти:



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi + 2\pi n; n \in Z$

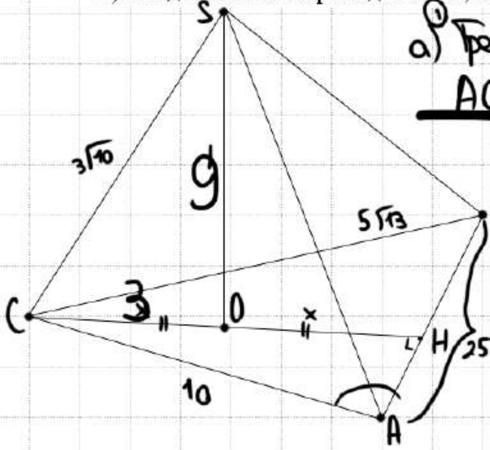
б) $3\pi; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}$

13 Дана треугольная пирамида $SABC$. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка CH – высоты треугольника ABC.

Источники:
Досрочная волна 2022

а) Докажите, что $AC^2 - BC^2 = AS^2 - BS^2$.

б) Найдите объём пирамиды $SABC$, если $AB = 25$, $AC = 10$, $BC = 5\sqrt{13}$, $SC = 3\sqrt{10}$.



① а) Требуется доказать

$\underline{AC^2 + BS^2 = BC^2 + AS^2}$

② $\triangle ACH$: $AC^2 = AH^2 + (2x)^2$

$\triangle SOB$: $BS^2 = OB^2 + h^2$

$\triangle BCH$: $BC^2 = BH^2 + (2x)^2$

$\triangle AOS$: $AS^2 = AO^2 + h^2$

Требуется доказать:

$AH^2 + \cancel{4x^2} + OB^2 + \cancel{h^2} = BH^2 + \cancel{4x^2} + AO^2 + \cancel{h^2}$

Ответ: 225

③ $\triangle OBH$: $OB^2 = x^2 + BH^2$

$x^2 = OB^2 - BH^2$

$\triangle OAH$: $OA^2 = x^2 + AH^2$

$x^2 = OA^2 - AH^2$

Получаем:

$OB^2 - BH^2 = OA^2 - AH^2$

$AH^2 + OB^2 = BH^2 + AO^2$ $\blacksquare$

б) ① $\triangle ABC$:

по т. cos: $\cos A = \dfrac{10^2 + 25^2 - (5\sqrt{13})^2}{2\cdot 10\cdot 25} = \dfrac{4}{5}$

$\sin A = \dfrac{3}{5} = \dfrac{2x}{10}$

$x = \dfrac{3\cdot 10}{5\cdot 2} = 3$

② $V = \dfrac{1}{\cancel{3}}\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}}\,\overset{5}{10}\cdot 25\cdot\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdot 9 = 225$

14 Решите неравенство $\dfrac{4^x-2^{x+3}+7}{4^x-5\cdot 2^x+4}\le\dfrac{2^x-9}{2^x-4}+\dfrac{1}{2^x-6}$.

C5D78A

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2018
Основная волна 2016

Пусть $2^x=t$

$$\frac{t^2-8t+7}{t^2-5t+4}-\frac{t-9}{t-4}-\frac{1}{t-6}\le 0$$

$t^2-5t+4=0$
$t=1 \quad t=4$
$(t-1)(t-4)$

$$\frac{(t-1)(t-7)}{(t-1)(t-4)}-\frac{t-9}{t-4}-\frac{1}{t-6}\le 0$$

$$\begin{cases} \text{①}\ \dfrac{t-7}{t-4}-\dfrac{t-9}{t-4}-\dfrac{1}{t-6}\le 0 \\ \text{②}\ t\ne 1 \end{cases}$$

① $\dfrac{t-7-t+9}{t-4}-\dfrac{1}{t-6}\le 0$

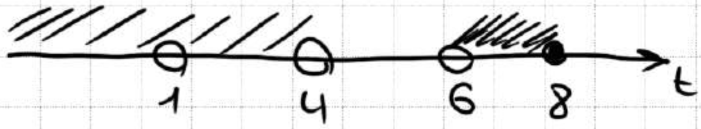
$$\frac{2}{t-4}-\frac{1}{t-6}\le 0$$

$$\frac{2t-12-t+4}{(t-4)(t-6)}\le 0$$

$$\frac{t-8}{(t-4)(t-6)}\le 0$$

Получаем

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t<4 \\ 6<t\le 8 \end{array}\right. \\ t\ne 1 \end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{l} t<1 \\ 1<t<4 \\ 6<t\le 8 \end{array}\right.$$

$2^x<1$ $\quad$ $2^0<2^x<2^2$ $\quad$ $6<2^x\le 2^3$

$x<0$ $\quad$ $0<x<2$ $\quad$ $\log_2 6<x\le 3$

Ответ: $(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(\log_2 6;3]$

15

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на 10 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором банк через четыре года начислит на вклад меньше 15 млн рублей.

Источники:
Основная волна (резерв) 2020
Ященко 2018
Досрочная волна 2016

Пусть S – сумма вклада
янв 2021 – месяц откр.
дек – месяц начисл. %
янв – месяц пополнения вклада

Дата	Сумма вклада
янв 21	S
Дек 21	$1{,}1S$
янв 22	ничего не происходит
Дек 22	$1{,}1^2 \cdot S$
янв 23	$1{,}1^2 \cdot S + 10$
Дек 23	$1{,}1^3 \cdot S + 11$
янв 24	$1{,}1^3 \cdot S + 21$
Дек 24	$1{,}1^4 \cdot S + 23{,}1$

$$1{,}1^4 \cdot S + 23{,}1 - S - 2 \cdot 10 < 15$$
$$0{,}4641 \cdot S < 11{,}9000$$
$$S < \frac{119 \cdot 1000}{4641}$$

$$\begin{array}{r|l} 119000 & 4641 \\ \underline{9282} & 25 \\ 26180 & \\ \underline{23205} & \\ 2975 & \end{array}$$

$$S < 25\frac{2975}{4641}$$
$$S_{наиб.} = 25$$

ОТВЕТ: 25 млн.

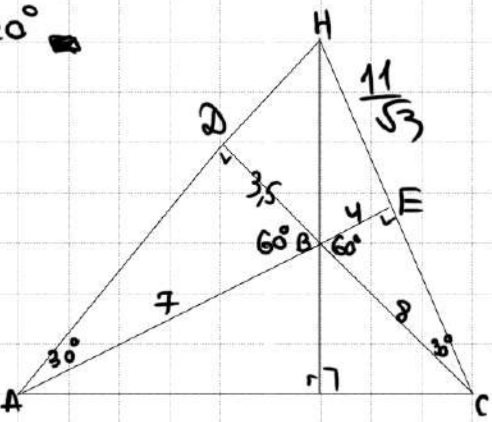
16

В треугольнике ABC угол ABC тупой, H – точка пересечения продолжений высот, угол AHC равен 60°.

Источники:
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2018

а) Докажите, что угол ABC равен 120°.
б) Найдите BH, если $AB = 7$, $BC = 8$.

а) ① $\angle DBE = 360 - 90 - 90 - 60 = 120°$
② $\angle ABC = \angle DBE = 120°$ (вертик)



б) ① $\angle DCH = 180 - 90 - 60 = 30$
$\angle CBE = 180 - 90 - 30 = 60$
$\angle HAE = 180 - 90 - 60 = 30$
$\angle DBA = 180 - 90 - 30 = 60$

② $\triangle BEC$:
$BE = \frac{1}{2} BC = 4$
$\triangle ABD$:
$BD = \frac{1}{2} AB = 3{,}5$

③ $\triangle AHE$:
$tg\,30° = \frac{HE}{AE}$ $\quad HE = \frac{11}{\sqrt{3}}$

④ $\triangle BHE$:
$BH = \sqrt{\left(\frac{11}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4^2} = \frac{13}{\sqrt{3}}$

ОТВЕТ: $\frac{13}{\sqrt{3}}$

17 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$3\sin x + \cos x = a$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Источники:
Досрочная волна (Резерв) 2019
Пробный ЕГЭ 2018

Построим $y = 3\sin x + \cos x$

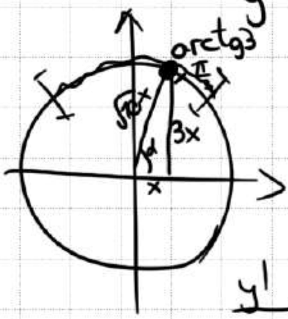
$y' = 3\cos x - \sin x = 0$

$3 - \operatorname{tg} x = 0$

$\operatorname{tg} x = 3$

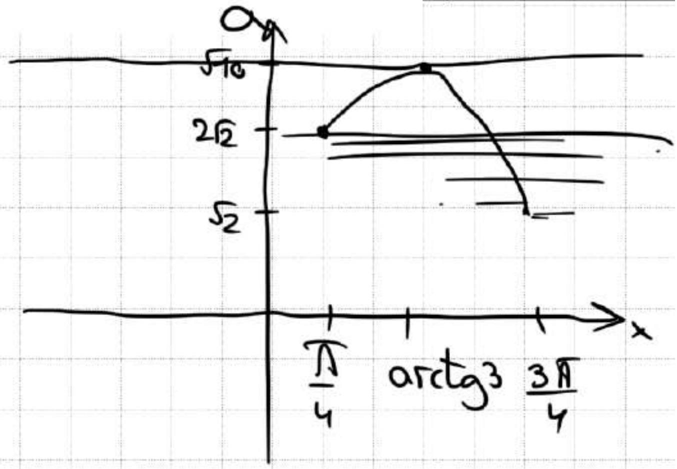
$x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$

$\Rightarrow x = \operatorname{arctg} 3$



x	$\frac{\pi}{4}$	arctg3	$\frac{3\pi}{4}$
y	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{2}$

$3\cdot\sin(\operatorname{arctg}3) + \cos(\operatorname{arctg}3) = 3\cdot\frac{3\cancel{x}}{\sqrt{10}\cancel{x}} + \frac{\cancel{x}}{\sqrt{10}\cancel{x}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$



Ответ: $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}$

18 Целое число S является суммой не менее трёх последовательных членов непостоянной арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

а) Может ли S равняться 8?
б) Может ли S равняться 1?
в) Найдите все значения, которые может принимать S.

Источники:
Досрочная волна (Резерв) 2014
АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ
$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$
$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$
$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$

а) Если $n=3$
$a_1 + a_1+d + a_1+2d = 8$
$3a_1 + 3d = 8 \quad |:3$
$a_1 + d = \frac{8}{3}$
$\varnothing$

Если $n=4$
$a_1 \quad a_1+d \quad a_1+2d \quad a_1+3d \quad = 8$
$4a_1 + 6d = 8$
Пусть $a_1 = -1$
$d = 2$

$-1 + 1 + 3 + 5 = 8$
Ответ: а) да

б) $S = 1$
$\frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = 1 \quad |\cdot 2$
$(a_1+a_n) \cdot n = 2$
Учитывая, что $n \geq 3$
Получаем $(a_1+a_n) \notin \mathbb{Z}$, что противоречит усл.
Ответ: б) нет

Ответ:	а)
	б)
	в)

в) $\frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = S \quad |\cdot 2$
$(a_1+a_n) \cdot n = 2 \cdot S$

Может ли $S=0$?
Да, если $a_1 + a_n = 0$
Например $-5 \quad 0 \quad 5$

Может ли $S=1$?
Нет (см п. б)

Может ли $S=-1$?
$(a_1 + a_n) \cdot n = -2$
Нет, т.к. $(a_1+a_n) \notin \mathbb{Z}$, что противоречит усл.

Может ли $S=-2$?
$(a_1+a_n) \cdot n = -4$
$n=4$
$a_1 + a_n = -1$
$-2 \; -1 \; 0 \; 1$

$\Rightarrow$ Для отрицательных целых (кроме $S=-1$)
$\begin{cases} n = -2S \\ d = 1 \\ a_1 + a_n = -1 \end{cases}$

Может ли $S=2$?
$(a_1+a_n) \cdot n = 4$
$n = 4$
$a_1 + a_n = 1$
$-1 \; 0 \; 1 \; 2$

Может ли $S=3$?
$(a_1+a_n) \cdot n = 6$
$n = 6$
$a_1 + a_n = 1$
$-2 \; -1 \; 0 \; 1 \; 2 \; 3$

$\Rightarrow$ Для положительных целых S: (кроме $S=1$)
$\begin{cases} n = 2S \\ d = 1 \\ a_1 + a_n = 1 \end{cases}$

Ответ: в) Все целые S, кроме ± 1