Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

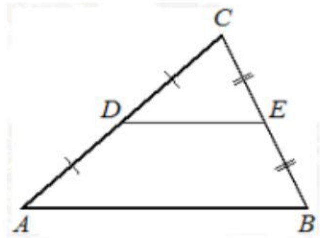
Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

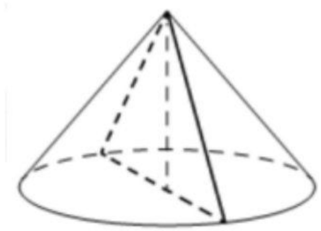
Часть 1

1 Площадь треугольника ABC равна 24. DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.



Ответ: ___________________________.

2 Площадь основания конуса равна 36π, высота – 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 220912

3 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5 или 6.

Ответ: ___________________________.

4 Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Сапфир» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Сапфир» начнёт игру с мячом не более одного раза.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения

$\log_3(x+4) = \log_3 16.$

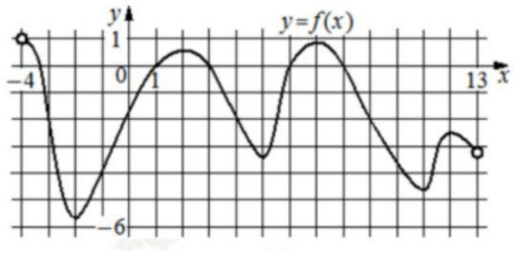
Ответ: ___________________________.

6 Найдите значение выражения

$\dfrac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2}{60+10\sqrt{35}}.$

Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 13)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 14$.



Ответ: ___________________________.

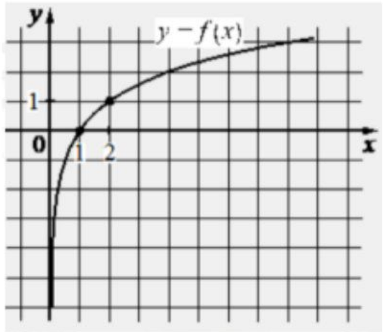
8 При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу со скоростями u и v (в м/с) соответственно, частота звукового сигнала f (в Гц), регистрируемого приёмником, вычисляется по формуле $f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v}$, где $f_0 = 170$ Гц – частота исходного сигнала, $c -$ скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 2$ м/с и $v = 17$ м/с – скорости приёмника и источника относительно среды. При какой скорости c распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет равна 180 Гц? Ответ дайте в м/с.

Ответ: ___________________________.

9 Расстояние между городами A и B равно 420 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 1 час следом за ним со скоростью 80 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C. Ответ дайте в километрах.

Ответ: ___________________________.

10 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(8)$.



Ответ: ___________________________.

11 Найдите наименьшее значение функции

$y = (x-9)^2(x+4) - 4$ на отрезке $[7; 16]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$9^{x+1} - 2\cdot 3^{x+2} + 5 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5}\right)$.

13 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 5$ и диагональю $BD = 9$. Все боковые рёбра пирамиды равны 5. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 4$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.
б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

14 Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(18 - 9x) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 2).$$

15 Зависимость количества Q (в шт., $0 \le Q \le 20000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 20000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $6000Q + 4\,000\,000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей ($0 < t < 10000$) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 6000Q - 4\,000\,000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей.

Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

16 Около треугольника ABC описана окружность. Прямая BO, где O — центр вписанной окружности, вторично пересекает описанную окружность в точке P.

а) Докажите, что $OP = AP$.
б) Найдите расстояние от точки P до прямой AC, если $\angle ABC = 120°$, а радиус описанной окружности равен 18.

17 При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{|4x| - x - 3 - a}{x^2 - x - a} = 0$$

имеет ровно 2 различных решения.

18 На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A, среднее арифметическое чисел во второй группе равно B. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$.
б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 15 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$.
в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ
1	6
2	60
3	0,25
4	0,5
5	12
6	0,2
7	6
8	340
9	240
10	3
11	-4
12	а) $\log_3\frac{5}{3}$; -1 б) $\log_3\frac{5}{3}$
13	$\frac{5\sqrt{19}}{18}$
14	$(-2;1)$
15	7000
16	27
17	$(-3;0)\cup(0;2)\cup(2;6)\cup(6;12)\cup(12;+\infty)$
18	а) привели б) доказали в) $4\ \frac{14}{29}$

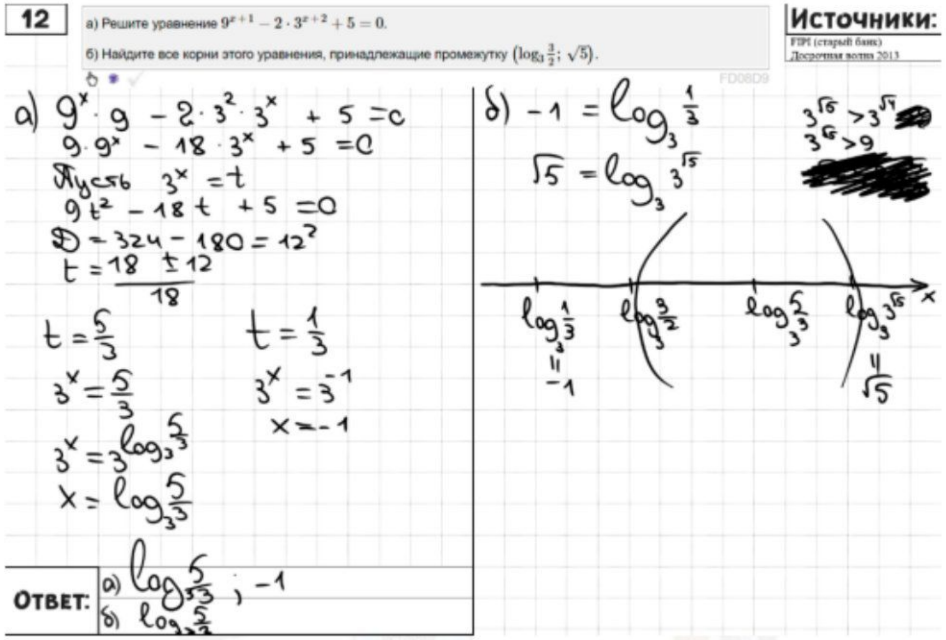
Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

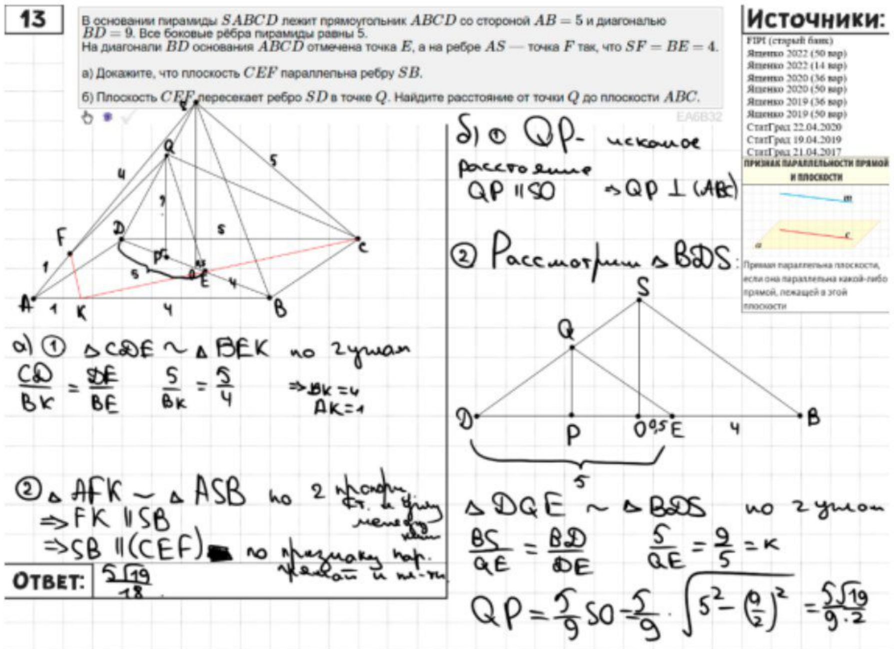
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

14 Решите неравенство

$\log_{\frac{1}{3}}(18-9x) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+5) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$.

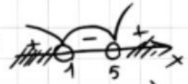
Источники:
Основная волна 2019
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)

$$\begin{cases} 18-9x>0 \\ (x-1)(x-5)>0 \\ x+2>0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(18-9x) < \log_{\frac{1}{3}}(x-1)(x-5)(x+2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ① \; 18-9x>0 \\ ② \; (x-1)(x-5)>0 \\ ③ \; x+2>0 \\ ④ \; 18-9x>(x^2-6x+5)(x+2) \end{cases}$$

① $18>9x$

$x<2$

② 

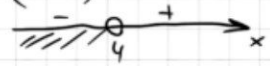
③ $x>-2$

④ $18-9x > x^3+2x^2-6x^2-12x+5x+10$

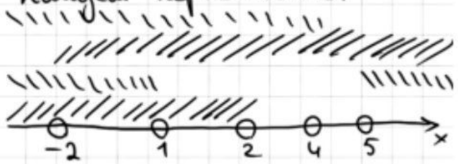
$x^3-4x^2+2x-8<0$

$x^2(x-4)+2\cdot(x-4)<0$

$(x-4)(x^2+2)<0$



Найдём пересечение:



Ответ: $(-2;1)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Зависимость количества Q (в шт., $0 \le Q \le 20000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 20000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $6000Q + 4\,000\,000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей ($0 < t < 10000$) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 6000Q - 4\,000\,000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей.

Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

Источники:
Основная волна (Резерв) 2018

① Чем больше прибыль фирмы – тем больше гос-во получит налогов

②
Прибыль $= PQ - 6000Q - 4000000 - tQ$

$P\cdot(20000-P) - 6000\cdot(20000-P) - 4000000 - t\cdot(20000-P)$

$-P^2 + 26000P + tP - 124\,000\,000 - 20000t$

График – парабола ↓ $P\cdot(26000+t)$

$P_{max} = \dfrac{-26000-t}{-2} = 13000 + \frac{1}{2}t$

цена, при которой будет макс. прибыль

③ tQ наиб – ?

$t\cdot(20000-P)$ наиб – ?

$t(20000-13000-\frac{1}{2}t)$ наиб – ?

$(-\frac{1}{2}t^2 + 7000t)$ наиб – ?

График – Парабола ↓

$t_{max} = \dfrac{-7000}{-1} = 7000$

Ответ: 7000

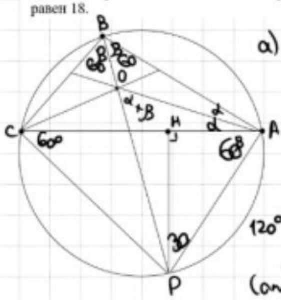
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Около треугольника ABC описана окружность. Прямая BO, где O – центр вписанной окружности, вторично пересекает описанную окружность в точке P.

а) Докажите, что $OP = AP$.

б) Найдите расстояние от точки P до прямой AC, если $\angle ABC = 120°$, а радиус описанной окружности равен 18.

Источники:
Основная волна 2019



а) ① O – точка пересечения биссектрис

② $\angle BAO = \alpha = \angle CAO$

$120°$ $\angle ABP = \beta = \angle CBP$

$\angle CAP = \angle CBP$ (опир. на одну дугу)

③ $\triangle AOB$:

$\angle AOB = 180 - \alpha - \beta$

$\angle AOB = 180 - (180 - \beta - \alpha)$

$\Rightarrow \triangle AOP$ – р/б т.к. $\angle AOP = \alpha + \beta = \angle OAP$

$\Rightarrow OP = AP$

б) ① $2\beta = 120$

$\beta = 60 = \angle CAP$

② $\angle ACP = 60° = \angle ABP$ (опир. на одну дугу)

$\Rightarrow \triangle ACP$ – равност.

$PH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC$

③ по т. sin

$\frac{AC}{\sin 120°} = 2 \cdot R$

$AC = 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$

$PH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 18\sqrt{3} = 27$

Ответ: 27

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{|4x| - x - 3 - a}{x^2 - x - a} = 0$$

имеет ровно 2 различных решения.

Источники:
Основная волна 2019
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)

$\Leftrightarrow \begin{cases} |4x| - x - 3 - a = 0 \\ x^2 - x - a \neq 0 \end{cases}$

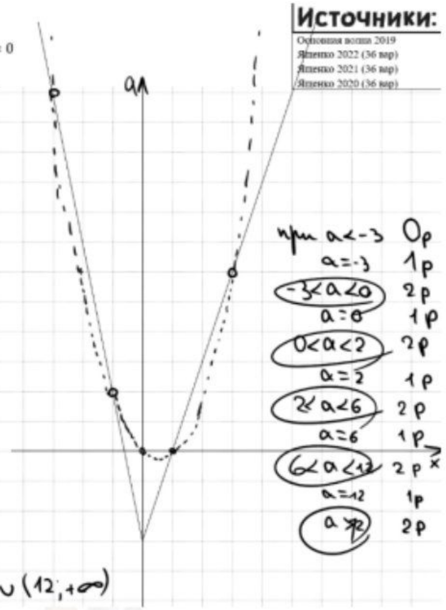
$\begin{cases} a = |4x| - x - 3 & ① \\ a \neq x^2 - x & ② \end{cases}$

① $a' = |4x| - x - 3$

x	0	2	-2
a	-3	3	7

② $a \neq x^2 - x$

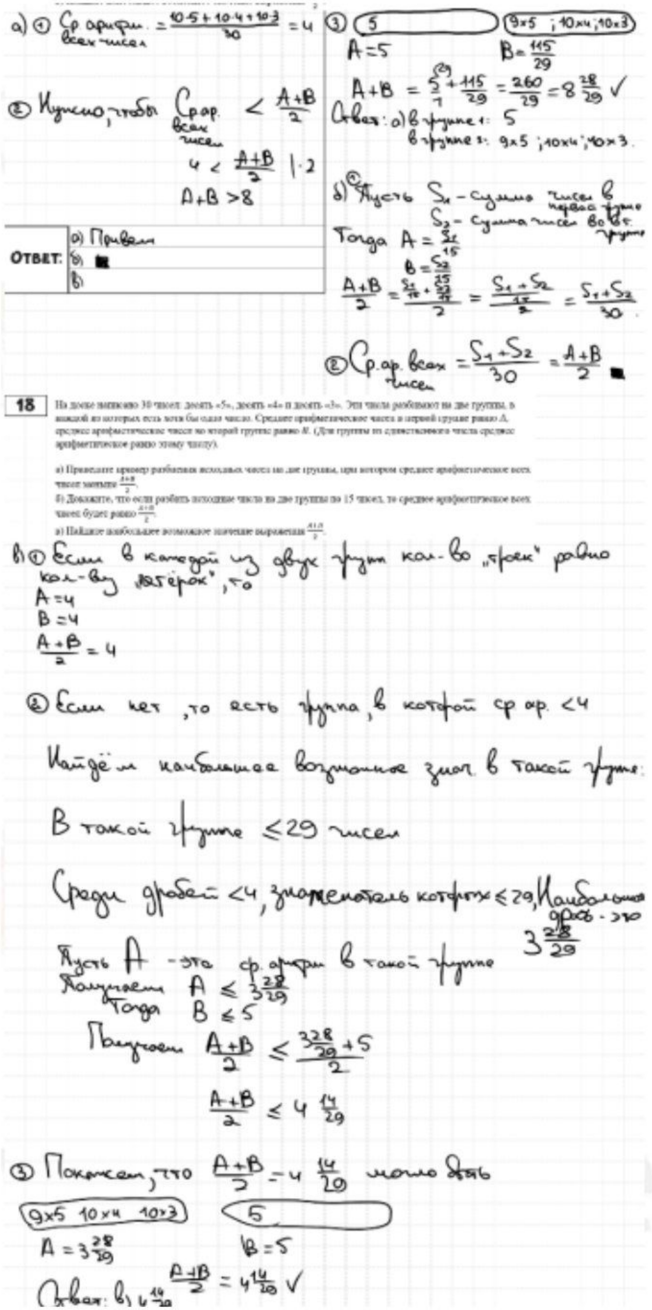
$x_0 = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$ $y_0 = -\frac{1}{4}$



при $a < -3$ 0р
$a = -3$ 1р
$-3 < a < 0$ 2р
$a = 0$ 1р
$0 < a < 2$ 2р
$a = 2$ 1р
$2 < a < 6$ 2р
$a = 6$ 1р
$6 < a < 12$ 2р
$a = 12$ 1р
$a > 12$ 2р

Ответ: $(-3; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6) \cup (6; 12) \cup (12; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4


а) ① Ср. арифм. всех чисел $= \frac{10\cdot5+10\cdot4+10\cdot3}{30} = 4$

② Нужно, чтобы Ср. ар. всех чисел $< \frac{A+B}{2}$

$4 < \frac{A+B}{2}$ $|\cdot 2$

$A+B > 8$

③ $\boxed{5}$ $\boxed{9\times5;\ 10\times4;\ 10\times3}$

$A=5$ $B=\frac{115}{29}$

$A+B = \frac{5}{1}+\frac{115}{29} = \frac{260}{29} = 8\frac{28}{29}$ ✓

Ответ: а) В группе 1: 5; в группе 2: $9\times5;\ 10\times4;\ 10\times3$.

б) ① Пусть S_1 – сумма чисел в первой группе, S_2 – сумма чисел во 2-й группе

Тогда $A = \frac{S_1}{15}$, $B = \frac{S_2}{15}$

$\frac{A+B}{2} = \frac{\frac{S_1}{15}+\frac{S_2}{15}}{2} = \frac{\frac{S_1+S_2}{15}}{2} = \frac{S_1+S_2}{30}$

② Ср. ар. всех чисел $= \frac{S_1+S_2}{30} = \frac{A+B}{2}$ ■

Ответ: а) Привели б) ■ в)

18 На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A, среднее арифметическое чисел во второй группе равно B. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу.)

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$.

б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 15 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$.

в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.

в) ① Если в каждой из двух групп кол-во „троек" равно кол-ву „пятёрок", то

$A=4$
$B=4$
$\frac{A+B}{2}=4$

② Если нет, то есть группа, в которой ср. ар. <4

Найдём наибольшее возможное знач. в такой группе:

В такой группе ≤ 29 чисел

Среди дробей <4, знаменатель которых ≤ 29, наибольшая дробь – это $3\frac{28}{29}$

Пусть A – это ср. арифм в такой группе

Получаем $A \leq 3\frac{28}{29}$

Тогда $B \leq 5$

Получаем $\frac{A+B}{2} \leq \frac{3\frac{28}{29}+5}{2}$

$\frac{A+B}{2} \leq 4\frac{14}{29}$

③ Покажем, что $\frac{A+B}{2} = 4\frac{14}{29}$ может быть

$\boxed{9\times5\ \ 10\times4\ \ 10\times3}$ $\boxed{5}$

$A = 3\frac{28}{29}$ $B=5$

$\frac{A+B}{2} = 4\frac{14}{29}$ ✓

Ответ: в) $4\frac{14}{29}$

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <…> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 12–18, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 220912

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 12–18 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.