





**3** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что количество выпавших орлов меньше 2.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**4** Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Стартер» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стратор». Найдите вероятность того, что «Стартер» будет начинать только вторую игру.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5** Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{2x - 5} = \frac{1}{4x + 13}$$

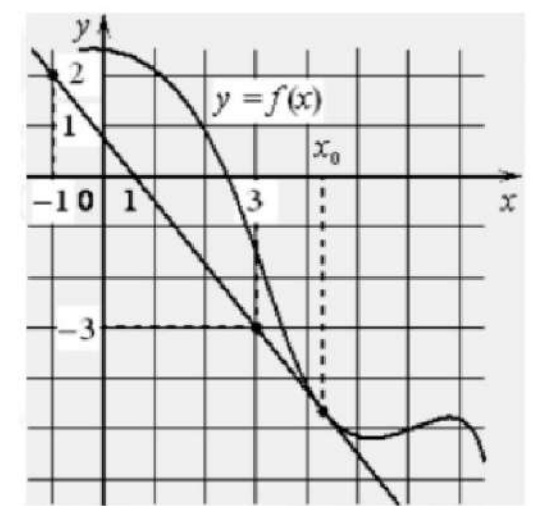
Ответ: \_\_\_\_\_.

**6** Найдите значение выражения

$$\frac{2^{3,2} \cdot 6^{6,2}}{12^{5,2}}$$

Ответ: \_\_\_\_\_.

**7** На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

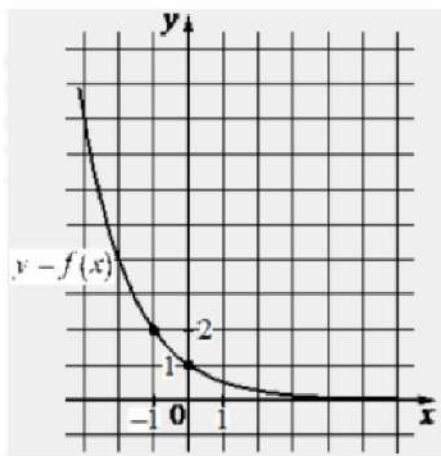
**8** В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону  $H(t) = at^2 + bt + H_0$ , где  $H_0 = 3$  м – начальный уровень воды,  $a = \frac{1}{768}$  м/мин<sup>2</sup> и  $b = -\frac{1}{8}$  м/мин – постоянные,  $t$  – время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**9** Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 132 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 1 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 1 час. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**10** На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = a^x$ . Найдите значение  $f(-3)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

**11** Найдите точку максимума функции  $y = (x + 5)^2 \cdot e^{2-x}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.*

**Часть 2**

*Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.*

**12** а) Решите уравнение

$$\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

**13** Дана треугольная пирамида  $SABC$ . Основание высоты  $SO$  этой пирамиды является серединой отрезка  $CH$  – высоты треугольника  $ABC$ .

а) Докажите, что  $AC^2 - BC^2 = AS^2 - BS^2$ .

б) Найдите объём пирамиды  $SABC$ , если  $AB = 25$ ,  $AC = 10$ ,  $BC = 5\sqrt{13}$ ,  $SC = 3\sqrt{10}$ .

**14** Решите неравенство

$$\frac{4^x - 2^{x+3} + 7}{4^x - 5 \cdot 2^x + 4} \leq \frac{2^x - 9}{2^x - 4} + \frac{1}{2^x - 6}.$$

**15** Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на 10 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором банк через четыре года начислит на вклад меньше 15 млн рублей.





**16** В треугольнике  $ABC$  угол  $ABC$  тупой,  $H$  – точка пересечения продолжений высот, угол  $AHC$  равен  $60^\circ$ .

- а) Докажите, что угол  $ABC$  равен  $120^\circ$ .  
б) Найдите  $BH$ , если  $AB = 7$ ,  $BC = 8$ .

**17** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$3 \sin x + \cos x = a$$

имеет единственное решение на отрезке  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ .

**18** Целое число  $S$  является суммой не менее трёх последовательных членов непостоянной арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

- а) Может ли  $S$  равняться 8?  
б) Может ли  $S$  равняться 1?  
в) Найдите все значения, которые может принимать  $S$ .

*Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.*

### Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ
1	15
2	9
3	0,5
4	0,125
5	-9
6	1,5
7	-1,25
8	48
9	11
10	8
11	-3
12	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi + 2\pi n; n \in Z$ б) $\frac{5\pi}{2}; 3\pi; \frac{7\pi}{2}$
13	225
14	$(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (\log_2 6; 3]$
15	25 млн
16	$\frac{13\sqrt{3}}{3}$
17	$[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}] \cup \{\sqrt{10}\}$
18	а) да б) нет в) все целые $S$ , кроме $\pm 1$

### Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

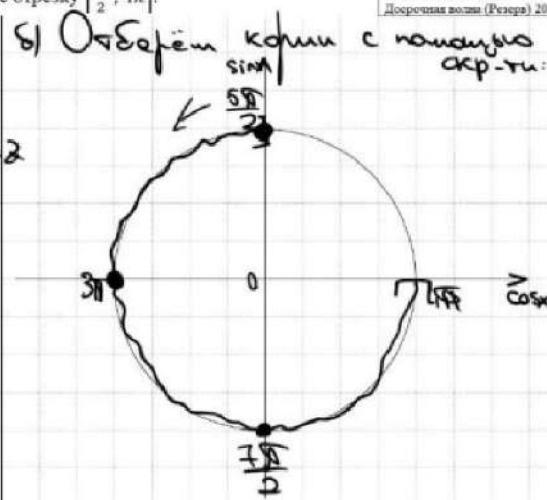


**12** а) Решите уравнение

$$\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

а)  $\cos^2 x + \cos x = 0$   
 $\cos x \cdot (\cos x + 1) = 0$   
 $\cos x = 0$        $\cos x = -1$   
 $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$        $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



**Источники:**

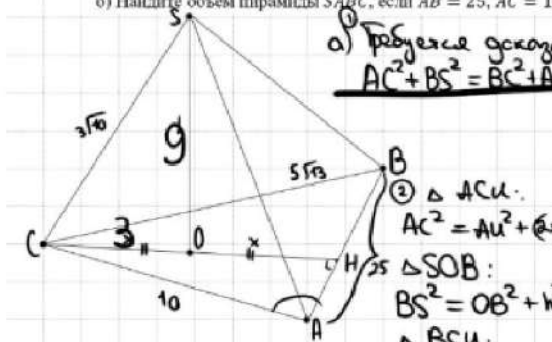
ФИПИ (старый банк)  
 ФИПИ (новый банк)  
 Ященко 2018  
 Основная волна 2020  
 Досрочная волна (Резерв) 2017

**ОТВЕТ:** а)  $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$   
 б)  $3\pi, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$

**13**

Дана треугольная пирамида  $SABC$ . Основание высоты  $SO$  этой пирамиды является серединой отрезка  $CH$  – высоты треугольника  $ABC$ .

- а) Докажите, что  $AC^2 - BC^2 = AS^2 - BS^2$ .  
 б) Найдите объём пирамиды  $SABC$ , если  $AB = 25$ ,  $AC = 10$ ,  $BC = 5\sqrt{13}$ ,  $SC = 3\sqrt{10}$ .



а) Требуется доказать:  $AC^2 + BS^2 = BC^2 + AS^2$

①  $\triangle ASC$ :  $AC^2 = AS^2 + CS^2$   
 $\triangle SOB$ :  $BS^2 = OB^2 + OS^2$   
 $\triangle BSC$ :  $BC^2 = BS^2 + CS^2$   
 $\triangle AOS$ :  $AS^2 = AO^2 + OS^2$

Требуется доказать:  
 $AO^2 + OS^2 + OB^2 + OS^2 = BO^2 + OS^2 + AO^2 + OS^2$

②  $\triangle OBC$ :  $OB^2 = OC^2 + BC^2$   
 $x^2 = OB^2 - BC^2$

$\triangle OAC$ :  $OA^2 = OC^2 + AC^2$   
 $x^2 = OA^2 - AC^2$

Получаем:  
 $OB^2 - BC^2 = OA^2 - AC^2$   
 $AC^2 + BC^2 = BC^2 + AO^2$

б) ①  $\triangle ABC$ :  
 по  $\cos$ :  $\cos A = \frac{10^2 + 25^2 - (5\sqrt{13})^2}{2 \cdot 10 \cdot 25}$   
 $= \frac{4}{5}$   
 $\sin A = \frac{3}{5} = \frac{2x}{10}$   
 $x = \frac{3 \cdot 10}{5 \cdot 2} = 3$

②  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 25 \cdot \frac{3}{5} \cdot 9 = 225$

**ОТВЕТ:** 225

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3



**14** Решите неравенство  $\frac{4^x - 2^{x+3} + 7}{4^x - 5 \cdot 2^x + 4} \leq \frac{2^x - 9}{2^x - 4} + \frac{1}{2^x - 6}$ .

Пусть  $2^x = t$

$$\frac{t^2 - 8t + 7}{t^2 - 5t + 4} - \frac{t-9}{t-4} - \frac{1}{t-6} \leq 0$$

$$\frac{(t-1)(t-7)}{(t-1)(t-4)} - \frac{t-9}{t-4} - \frac{1}{t-6} \leq 0$$

①  $\frac{t-7}{t-4} - \frac{t-9}{t-4} - \frac{1}{t-6} \leq 0$

②  $t \neq 1$

③  $\frac{t-7-t+9}{t-4} - \frac{1}{t-6} \leq 0$

$$\frac{2}{t-4} - \frac{1}{t-6} \leq 0$$

$$\frac{2t-12-t+4}{(t-4)(t-6)} \leq 0$$

**ОТВЕТ:**  $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (\log_2 6; 3]$

**Источники:**  
 ЕГЭ (старый банк)  
 ЕГЭ (новый банк)  
 Ященко 2018  
 Основная волна 2016

$$\frac{t-8}{(t-4)(t-6)} \leq 0$$

$$t^2 - 8t + 4 = 0$$

$$t = 1 \quad t = 4$$

$$(t-1)(t-4)$$

Получаем

$$\begin{cases} t < 4 \\ 6 < t \leq 8 \\ t \neq 1 \end{cases}$$

**ОТВЕТ:**  $\begin{cases} t < 1 \\ 1 < t < 4 \\ 6 < t \leq 8 \end{cases}$

$2^x < 1 \quad x < 0$

$2^0 < 2^x < 2^2 \quad 0 < x < 2$

$6 < 2^x \leq 2^3 \quad \log_2 6 < x \leq 3$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**15** Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на 10 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором банк через четыре года начислит на вклад меньше 15 млн рублей.

**Источники:**  
 Основная волна (резерв) 2020  
 Ященко 2018  
 Досрочная волна 2016

Пусть  $S$  — сумма вклада  
 янв 2021 — месяц откр.  
 дек — месяц, когда  
 янв — месяц, когда  
 вклада

Дата	Сумма вклада
янв 21	$S$
дек 21	$1,1S$
янв 22	никого не пополняет
дек 22	$1,1^2 S$
янв 23	$1,1^2 S + 10$
дек 23	$1,1^3 S + 11$
янв 24	$1,1^3 S + 21$
дек 24	$1,1^4 S + 23,1$

**ОТВЕТ:** 25 млн.

$$1,1^4 \cdot S + 23,1 - S - 2 \cdot 10 < 15$$

$$0,4641 \cdot S < 11,9000$$

$$S < \frac{119 \cdot 1000}{4641}$$

$$S < 25 \frac{2975}{4641}$$

$$S_{\text{наиб.}} = 25$$

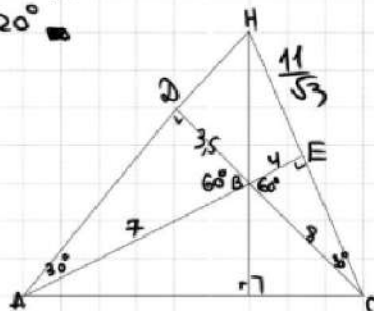
$$\begin{array}{r} 119000 \\ - 9282 \cdot 25 \\ \hline 26180 \\ - 23205 \\ \hline 2975 \end{array}$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**16** В треугольнике  $ABC$  угол  $ABC$  тупой,  $H$  – точка пересечения продолжений высот, угол  $AHC$  равен  $60^\circ$ .  
 а) Докажите, что угол  $ABC$  равен  $120^\circ$ .  
 б) Найдите  $BH$ , если  $AB = 7$ ,  $BC = 8$ .

**Источники:**  
 ЕГЭ (новый банк)  
 Досрочная волна 2018

а) ①  $\angle DBE = 360 - 90 - 90 - 60 = 120^\circ$   
 ②  $\angle ABC = \angle DBE = 120^\circ$   
 (вертикал)



б) ①  $\angle DCH = 180 - 90 - 60 = 30$   
 $\angle CBE = 180 - 90 - 30 = 60$   
 $\angle HAE = 180 - 90 - 60 = 30$   
 $\angle DBA = 180 - 90 - 30 = 60$

②  $\triangle BEC$ :  
 $BE = \frac{1}{2} BC = 4$   
 $\triangle ABD$ :  
 $BD = \frac{1}{2} AB = 3,5$

③  $\triangle AHE$ :  
 $\angle HAE = 30^\circ = \frac{HE}{AE}$   $HE = \frac{11}{\sqrt{3}}$

④  $\triangle BHE$ :  
 $BH = \sqrt{(\frac{11}{\sqrt{3}})^2 + 4^2} = \frac{13}{\sqrt{3}}$

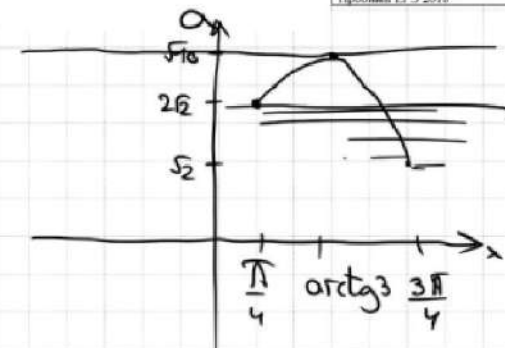
**Ответ:**  $\frac{13}{\sqrt{3}}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

**17** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $3 \sin x + \cos x = a$  имеет единственное решение на отрезке  $[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$ .

**Источники:**  
 Досрочная волна (Резерв) 2019  
 Пробный ЕГЭ 2018

Построим  $y = 3 \sin x + \cos x = 3 \cos x - \sin x = 0$   
 $3 - \tan x = 0$   
 $\tan x = 3$   
 $x = \arctan 3 + \pi n$   
 $\Rightarrow x = \arctan 3$



$x$	$\frac{\pi}{4}$	$\arctan 3$	$\frac{3\pi}{4}$
$y$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{2}$
$3 \cdot \sin(\arctan 3) + \cos(\arctan 3) = 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$			
<b>Ответ:</b>	$[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}] \cup \{\sqrt{10}\}$		

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4





**18** Целое число  $S$  является суммой не менее трех последовательных членов возрастающей арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

**ИСТОЧНИКИ:**  
 Демидович Е.М. Задачи по математике. Арифметика. Алгебра. Геометрия. М.: Наука, 1989.  
 Демидович Е.М. Задачи по математике. Арифметика. Алгебра. Геометрия. М.: Наука, 1989.  
 Демидович Е.М. Задачи по математике. Арифметика. Алгебра. Геометрия. М.: Наука, 1989.

- а) Может ли  $S$  равняться 8?
- б) Может ли  $S$  равняться 17?
- в) Найдите все значения, которые может принимать  $S$ .

а) Если  $n=3$   
 $a_1 + a_2 + a_3 = 8$   
 $3a_1 + 3d = 8 \quad | :3$   
 $a_1 + d = \frac{8}{3}$   
 $\emptyset$

Если  $n=4$   
 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8$   
 $4a_1 + 6d = 8$   
 Пусть  $a_1 = -1$   
 $d = 2$

ОТВЕТ: а) \_\_\_\_\_  
 б) \_\_\_\_\_  
 в) \_\_\_\_\_

$1 + 1 + 3 + 5 = 8$   
 Ответ: а) да

б)  $S=1$   
 $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 1 \quad | \cdot 2$   
 $(a_1 + a_n) \cdot n = 2$   
 Учитывая, что  $n \geq 3$   
 Проверим  $(a_1 + a_n) \neq \frac{2}{n} \geq \frac{2}{3}$ , что невозможно.  
 Ответ: б) нет

в)  $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = S \quad | \cdot 2$   
 $(a_1 + a_n) \cdot n = 2 \cdot S$

Может ли  $S=0$ ?  
 Да, если  $a_1 + a_n = 0$   
 Например  $-5 \quad 0 \quad 5$

Может ли  $S=1$ ?  
 Нет (см. н. б)

Может ли  $S=-1$ ?  
 $(a_1 + a_n) \cdot n = -2$   
 Нет, т.к.  $(a_1 + a_n) \notin \mathbb{Z}$ , что невозможно.

Может ли  $S=-2$ ?  
 $(a_1 + a_n) \cdot n = -4$   
 $n=4$   
 $a_1 + a_n = -1$   
 $-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1$

Может ли  $S=2$ ?  
 $(a_1 + a_n) \cdot n = 4$   
 $n=4$   
 $a_1 + a_n = 1$   
 $-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

⇒ Для отрицательных целых  $S$  (кроме  $S=-1$ )  
 $\begin{cases} n=2S \\ d=1 \\ a_1 + a_n = -1 \end{cases}$

Может ли  $S=3$ ?  
 $(a_1 + a_n) \cdot n = 6$   
 $n=6$   
 $a_1 + a_n = 1$   
 $-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

⇒ Для положительных целых  $S$  (кроме  $S=1$ )  
 $\begin{cases} n=2S \\ d=1 \\ a_1 + a_n = 1 \end{cases}$

Ответ: в) Все целые  $S$ , кроме  $\pm 1$

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта <i>a</i> ; – обоснованное решение пункта <i>b</i> ; – искомая оценка в пункте <i>v</i> ; – пример в пункте <i>v</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 12–18, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 12–18 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.

