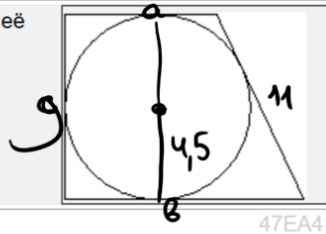


1

Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 40, её большая боковая сторона равна 11. Найдите радиус окружности.



$$\begin{aligned} a + b &= 20 \\ c + 11 &= 20 \\ c &= 9 \end{aligned}$$

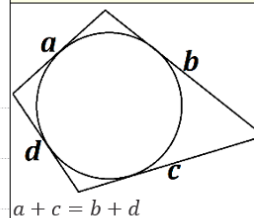
**Источники:**

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Досрочная волна 2015

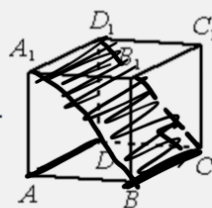
ПРИЗНАК ОПИСАННОГО 4-КА



ОТВЕТ: 4,5

2

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите угол между прямыми  $CD_1$  и  $AD$ .



Ответ дайте в

градусах.



DC1005

**Источники:**

ФИПИ (старый банк)

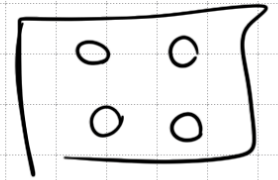
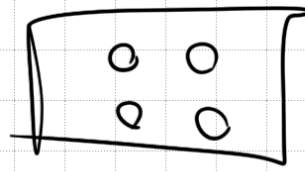
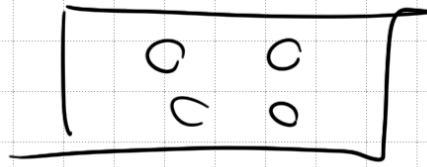
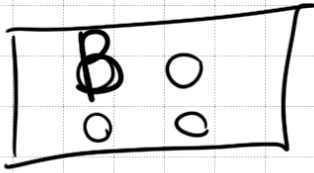
ОТВЕТ: 90

3

В классе 16 учащихся, среди них два друга — Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.



e33c5D



$$P = \frac{\cancel{3}}{\cancel{15}} = \frac{1}{5} = 0,2$$

ОТВЕТ: 0 , 2

4

Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,6. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,45. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.



341FE9

$$0,6 \cdot 0,45 = 0,27$$

ОТВЕТ: 0 , 2 7

**Источники:**

ФИПИ (старый банк)  
Пробный ЕГЭ 2018

**Источники:**

ФИПИ (старый банк)  
ФИПИ (новый банк)  
Досрочная волна 2015

5

Найдите корень уравнения  $3^{2x-16} = \frac{1}{81} = \frac{1}{3^4}$

A1ADF2

$$3^{2x-16} = 3^{-4}$$

$$2x - 16 = -4$$

$$2x = 16 - 4$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

ОТВЕТ: 6

6

Найдите значение выражения

$$\frac{7 \sin 154^\circ}{\cos 77^\circ \cdot \cos 13^\circ}$$

$$= \frac{7 \cdot 2 \cdot \sin 77^\circ \cdot \cos 77^\circ}{\cos 77^\circ \cdot \cos(90^\circ - 77^\circ)} = 14$$

## Источники:

ФИПИ (старый банк)  
 ФИПИ (новый банк)  
 Основная волна 2019  
 Досрочная волна (Резерв) 2018  
 Основная волна 2017  
 Пробный ЕГЭ 2015

## Источники:

ФИПИ (новый банк)  
 Основная волна 2021  
 Досрочная волна 2018  
 Основная волна 2017  
 Пробный ЕГЭ 2017

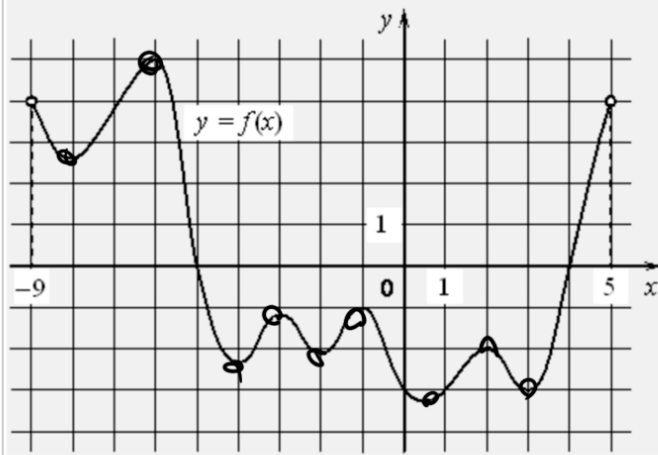
### ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$   
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$   
 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$   
 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

ОТВЕТ: 14

7

На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-9; 5)$ . Найдите количество точек, в которых производная функции  $f(x)$  равна 0.



👉 🗨️ ✓

8E93FF

**Источники:**

ФИПИ (старый банк)  
 ФИПИ (новый банк)  
 Основная волна 2013

**ОТВЕТ:** 9

8

Наблюдатель находится на высоте  $h$  (в км). Расстояние  $l$  (в км) от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле  $l = \sqrt{2Rh}$ , где  $R = 6400$  км — радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 96 км? Ответ дайте в км.

👉 🗨️ ✓

8E8558

$$96 = \sqrt{2 \cdot 6400 \cdot h} \quad |^2$$

$$96^2 = 2 \cdot 6400 \cdot h$$

$$h = \frac{96 \cdot 96 \cancel{48} \cdot 24}{2 \cdot 6400} = 0,72$$

200 100

**ОТВЕТ:** 0,72

**Источники:**

ФИПИ (старый банк)

9

Имеется два сосуда. Первый содержит 60 кг, а второй — 20 кг растворов кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 30% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 45% кислоты. Сколько процентов кислоты содержится в первом сосуде?



B968FE

$$\begin{cases} x \cdot 60 + y \cdot 20 = 0,3 \cdot 80 \\ x \cdot m + y \cdot m = 0,45 \cdot 2m \quad | :m \end{cases}$$

Выразим  $y = 0,9 - x$

$$60x + 20 \cdot (0,9 - x) = 24$$

$$60x + 18 - 20x = 24$$

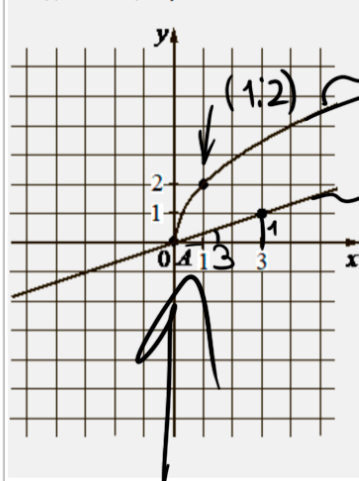
$$40x = 6$$

$$x = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} = \frac{3}{20} \cdot \frac{5}{5} = \frac{15}{100} = 15\%$$

ОТВЕТ: 15

10

На рисунке изображены графики функций видов  $f(x) = a\sqrt{x}$  и  $g(x) = kx$ , пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



$$2 = a \cdot \sqrt{1}$$

$$a = 2$$

$$\frac{1}{3}x = 2\sqrt{x} \quad | \cdot 3$$

$$x - 6\sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x} \text{ так } \sqrt{x} = t$$

$$t^2 - 6t = 0$$

$$t \cdot (t - 6) = 0$$

$$t = 0 \quad x = 0 \quad t = 6$$

$$\sqrt{x} = 6 \\ x = 36$$

ОТВЕТ: 36

## Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

СХЕМА ЗАДАЧ НА СПЛАВЫ И СМЕСИ

Доля<sub>1</sub> · m<sub>1</sub> + Доля<sub>2</sub> · m<sub>2</sub> = Доля<sub>3</sub> · m<sub>3</sub>

## Источники:

ФИПИ (старый банк)

Досрочная волна 2022

OB896F

11

Найдите точку минимума функции  
 $y = 9x - 9 \cdot \ln(x + 3) + 4$ .

$$\textcircled{1} y' = 9 - 9 \cdot \frac{1}{x+3} = 0$$

$$9 = \frac{9}{x+3}$$

$$x+3 = 1$$

$$x = -2$$

ОТВЕТ: -2

## Источники:

ФИПИ (старый банк)  
 ФИПИ (новый банк)  
 Основная волна 2021  
 Пробный ЕГЭ 2013

### ПРОИЗВОДНЫЕ

$$C' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(Cx)' = C$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(U \cdot V)' = U'V + UV'$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

$$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$$

12

а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\sin(x+\pi)} = 7^{2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ .

$$\text{a) } (7^{-2})^{-\sin x} = 7^{2\sqrt{3} \cdot \cos x}$$

$$7^{2\sin x} = 7^{2\sqrt{3} \cdot \cos x}$$

$$2\sin x - 2\sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\sin x = \sqrt{3} \cos x$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

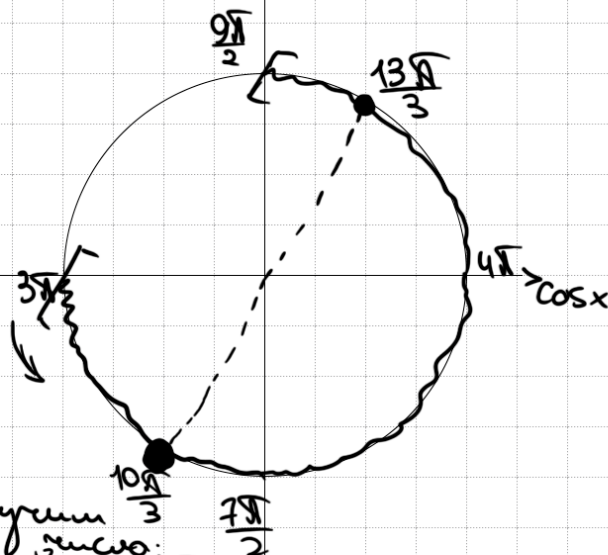
ОТВЕТ:

а)  $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$   
 б)  $\frac{10\pi}{3}; \frac{13\pi}{3}$

## Источники:

ФИПИ (старый банк)  
 ФИПИ (новый банк)  
 Основная волна 2017

б) Отберём корни с помощью окружности:  $\sin x$



Получим

$$x = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{3}$$

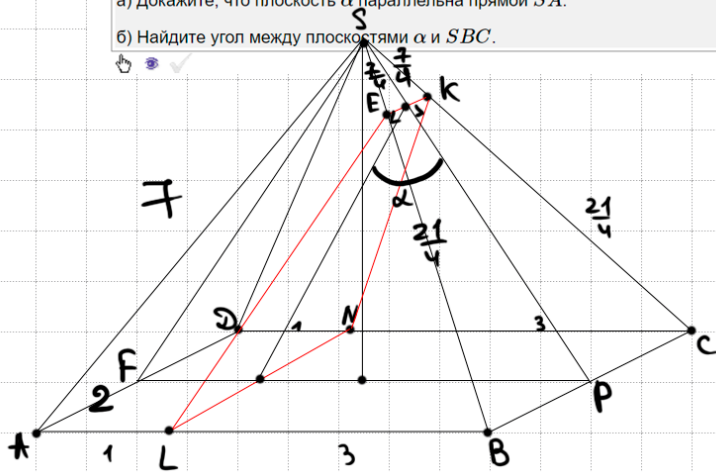


13

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 4, а боковое ребро  $SA$  равно 7. На рёбрах  $CD$  и  $SC$  отмечены точки  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $KN$  и параллельна прямой  $BC$ .

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $SA$ .
- б) Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $SBC$ .

876DD3



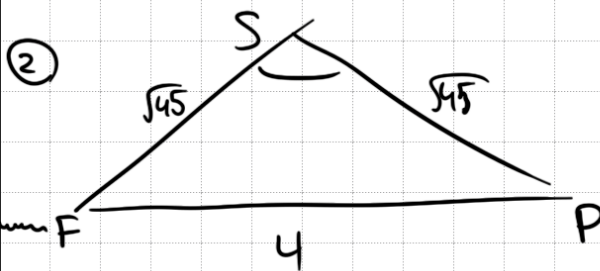
а) ①  $AL = DN = 1$   
 $BL = CN = 3$   
 $SE = SK = \frac{7}{4}$   
 $BE = CK = \frac{21}{4}$

②  $\triangle BEL \sim \triangle ABS$  по 2 пропорции стороны и углу между ними  
 $\frac{BE}{BS} = \frac{BL}{AB} = \frac{3}{4}$  и  $\angle ABS = \angle BEL$

ОТВЕТ:  $\arccos\left(\frac{37}{45}\right)$

$\Rightarrow EL \parallel SA$   
 $\Rightarrow \alpha \parallel SA$

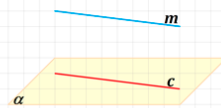
б)  $SA \parallel EL$   
 $AD \parallel LN$   
 $\Rightarrow (SAD) \parallel \alpha$   
 $\Rightarrow \angle(\alpha, SBC) = \angle(SAD, SBC)$   
 $\Rightarrow \angle FSP$  - искомым



т. cos:  
 $\cos \angle FSP = \frac{45 + 45 - 16}{2 \cdot 45} = \frac{37}{45}$

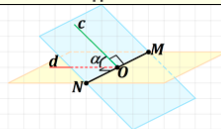
Источники:

ФИПИ (старый банк)  
 Основная волна 2019  
 Досрочная волна 2020  
 ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ



Угол между плоскостями – это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведёнными в этих плоскостях

14

Решите неравенство

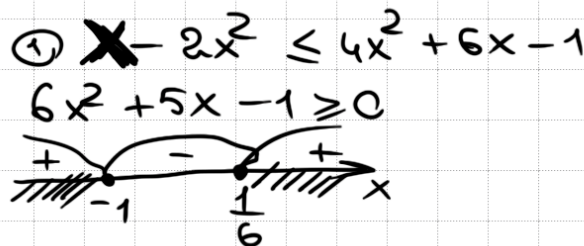
$2 \log_2(1 - 2x) - \log_2\left(\frac{1 - 2x}{x}\right) \leq \log_2(4x^2 + 6x - 1)$

$\begin{cases} \log_2(1 - 2x)^2 - \log_2\left(\frac{1 - 2x}{x}\right) \leq \log_2(4x^2 + 6x - 1) \\ 1 - 2x > 0 \\ \frac{1 - 2x}{x} > 0 \end{cases}$

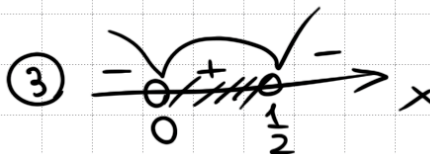
$\begin{cases} \log_2 \frac{(1 - 2x)^2 \cdot x}{1 - 2x} \leq \log_2(4x^2 + 6x - 1) \\ 1 - 2x > 0 \\ \frac{1 - 2x}{x} > 0 \end{cases}$

①  $(1 - 2x) \cdot x \leq 4x^2 + 6x - 1$   
 ②  $1 - 2x > 0$   
 ③  $\frac{1 - 2x}{x} > 0$

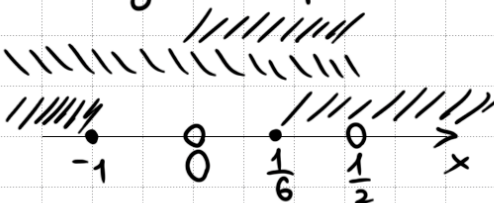
ОТВЕТ:  $\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$



②  $x < \frac{1}{2}$



Найдём пересечение:



Источники:

Основная волна 2018  
 Основная волна (Резерв) 2018

15

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере  $S$  тыс. рублей, где  $S$  — натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в тыс. рублей)	$S$	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение  $S$ , при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

Дата	Сумма долга
ч 16	$S$
д 17	$1,15S$
м 17	$\Rightarrow$ сумма выплаты $0,45 \cdot S$
ч 17	$0,7S$
д 18	$1,15 \cdot 0,7S = 0,805 \cdot S$
м 18	$\Rightarrow$ с.в. $0,405S$
ч 18	$0,4 \cdot S$
д 19	$1,15 \cdot 0,4S = 0,46S$
м 19	$\Rightarrow$ с.в. $0,46S$
ОТВЕТ:	200

$$\begin{cases} \frac{45}{100} S \in \mathbb{Z} \\ \frac{405}{1000} S \in \mathbb{Z} \\ \frac{46}{100} S \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{9 \cdot S}{20} \in \mathbb{Z} \\ \frac{81 \cdot S}{200} \in \mathbb{Z} \\ \frac{23 \cdot S}{50} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Наим. цен} = 200$$

Источники:

Основная волна (Резерв) 2017  
Основная волна (Резерв) 2016

16

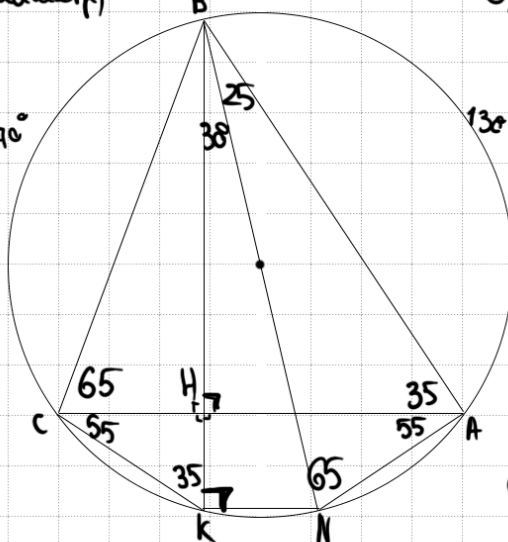
Около остроугольного треугольника  $ABC$  с различными сторонами описали окружность с диаметром  $BN$ . Высота  $BH$  пересекает эту окружность в точке  $K$ .

- Докажите, что  $AN = CK$ .
- Найдите  $KN$ , если  $\angle BAC = 35^\circ$ ,  $\angle ACB = 65^\circ$ , а радиус окружности равен 12.

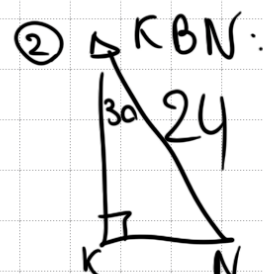
Источники:

Основная волна 2019

- а) ①  $\angle BKN = 90^\circ$  (опр. на диаметр)  
 $\angle ANB = 90^\circ$  (т.к.  $BN$  — диаметр)  
 $\Rightarrow AC \parallel KN$   
 $\Rightarrow ACKN$  — трапеция  
 (выс. в. окр., т.е. равнобедр. трапеция)  
 $\Rightarrow AN = CK$



- б) ① Найдём углы:  
 $\angle BAC = 35^\circ = \angle BCK$  (т.к. опр. на диаметр)  
 $\angle KCN = 180 - 90 - 35 = 55^\circ$  (т.к. опр. на диаметр)  
 $\angle CAN = \angle KCN = 55^\circ$  (т.к. опр. на диаметр)  
 $\angle BCA = \angle BNA = 65^\circ$  (опираются на одну дугу)  
 $\angle ABN = 180 - 90 - 65 = 25^\circ$   
 $\triangle ABK: \angle ABK = 180 - 90 - 35 = 55^\circ$   
 $\angle KBN = 30^\circ$



$$KN = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$$

(т.к. катет, лежащий напротив  $30^\circ$  равен  $\frac{1}{2}$  гипотенузы)

ОТВЕТ: 12



Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

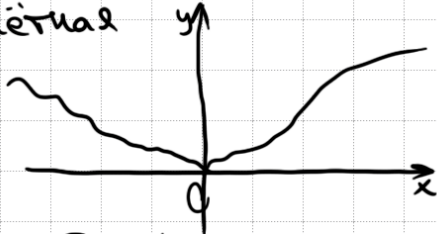
$$\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = |x+a-5| + |x-a+5|$$

имеет единственное решение.

i Номер: 4489 ★

$$\sqrt{x^4 + (a-5)^4} - |x+a-5| - |x-a+5| = 0$$

Пусть  $f(x) = \sqrt{x^4 + (a-5)^4} - |x+a-5| - |x-a+5|$   
 Тогда  $f(-x) = \sqrt{(-x)^4 + (a-5)^4} - |-x+a-5| - |-x-a+5|$   
 $= \sqrt{x^4 + (a-5)^4} - |x-a+5| - |x+a-5|$   
 $\Rightarrow f(x) - \text{чётная}$



Единственный корень чётной ф-ции может иметь только если этот корень  $x=0$

Найдём при каких  $a$   $x=0$ :

ОТВЕТ: 3; 7

Если  $x < -2$ , то

$$\sqrt{x^4 + 16} = -x + 2 - x - 2$$

$$\sqrt{x^4 + 16} = -2x$$

$$\begin{cases} -2x \geq 0 \\ x^4 + 16 = 4x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x^4 - 4x^2 + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ (x^2 - 2)^2 + 12 = 0 \end{cases} \emptyset$$

Если  $-2 \leq x \leq 2$ , то

$$\sqrt{x^4 + 16} = -x + 2 + x + 2$$

$$\sqrt{x^4 + 16} = 4$$

$$\begin{cases} x^4 + 16 = 16 \\ x = 0 \text{ - единственный корень} \end{cases}$$

Если  $x > 2$ , то

$$\sqrt{x^4 + 16} = 2x$$

$$\emptyset$$

Если  $a = 5$

$$\sqrt{x^4} = |x| + |x|$$

$$x^2 = 2|x|$$

$$|x|^2 - 2|x| = 0$$

$$|x| \cdot (|x| - 2) = 0$$

$$\begin{cases} |x| = 0 & |x| = 2 \\ x = 0 & x = \pm 2 \end{cases}$$

- три корня

Если  $a = 7$

$$\sqrt{x^4 + 16} = |x+2| + |x-2|$$

$$x = 0 \text{ - единств. решение}$$

Если  $x = 0$ , то

$$\sqrt{(a-5)^4} = |a-5| + |a-5|$$

$$(a-5)^2 = 2|a-5|$$

$$|a-5|^2 - 2|a-5| = 0$$

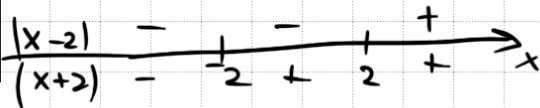
$$|a-5| \cdot (|a-5| - 2) = 0$$

$$\begin{cases} |a-5| = 0 & |a-5| = 2 \\ a = 5 & a - 5 = 2 & a - 5 = -2 \\ & a = 7 & a = 3 \end{cases}$$

Проверим, при каких из этих  $a$  будет единственным корнем  $x=0$

Если  $a = 3$ , то

$$\sqrt{x^4 + 16} = |x-2| + |x+2|$$



В ящике лежит 95 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 73 грамма. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 115 г.

- а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?  
 б) Могло ли в ящике оказаться меньше 10 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?  
 в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

① Пусть  $x$  - количество лёгких фруктов  
 $y$  - количество тяжёлых фруктов  
 $95-x-y$  - количество средних фруктов

$$\text{Ср. масса лёгких} = \frac{\text{Сумма масс лёгких}}{x} = 73$$

$$\text{Ср. масса средних} = \frac{\text{Сумма масс средних}}{95-x-y} = 100$$

$$\text{Ср. масса тяжёлых} = \frac{\text{Сумма масс тяжёлых}}{y} = 115$$

ОТВЕТ: а) нет  
 б) нет  
 в) 857

Основная волна 2019  
 Ященко 2022 (36 вар)  
 Ященко 2021 (36 вар)  
 Ященко 2020 (36 вар)

$$\text{Ср. масса всех} = \frac{\text{Сумма масс всех}}{95} = 100$$

Если  $x=y$   
 а)  $9500 = 73 \cdot x + 115x + 100 \cdot (95-x-x)$   
 $9500 = 73x + 115x + 9500 - 200x$   
 $x=0=y$

Ни лёгких, ни тяжёлых нет, что противоречит условию

б)  $9500 = 73x + 115y + 100 \cdot (95-x-y)$   
 $9500 = 73x + 115y + 9500 - 100x - 100y$   
 $27x = 15y \quad | :3$   
 $9x = 5y$

$y = \frac{9}{5}x \Rightarrow x$  кратно 5  
 Если  $x=5 \quad y=9$ , то средних 81  
 $x=10 \quad y=18 \quad 67$   
 $x=15 \quad y=27 \quad 53$   
 $x=20 \quad y=36 \quad 39$   
 $x=25 \quad y=45 \quad 25$   
 $x=30 \quad y=54 \quad 11$

$\Rightarrow$  Средних может быть не меньше 11  
 Ответ: б) нет

В ящике лежит 95 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 73 грамма. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 115 г.

- а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?  
 б) Могло ли в ящике оказаться меньше 10 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?  
 в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

в) Самый тяжёлый фрукт будет, если  $y=54$   
 и 53 из 54 фруктов весом 101 г.

$$\text{Сумма всех тяжёлых} = 54 \cdot 115 = 53 \cdot 101 + Q$$

$$Q = 54 \cdot 115 - 53 \cdot 101 = 857$$

Пример:

30 фруктов по 73 г  
 11 фруктов по 100 г  
 53 фрукта по 101 г  
 54-й = 857