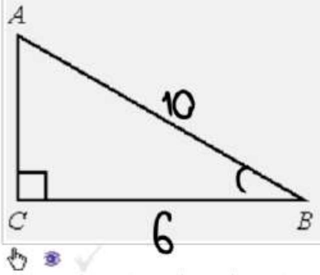
**1**

В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен $90^\circ$, $BC = 6$, $AB = 10$. Найдите $\sin B$.




27BB40

**Источники:**

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2017

① $10^2 = AC^2 + 6^2$

$AC^2 = 100 - 36 = 64$

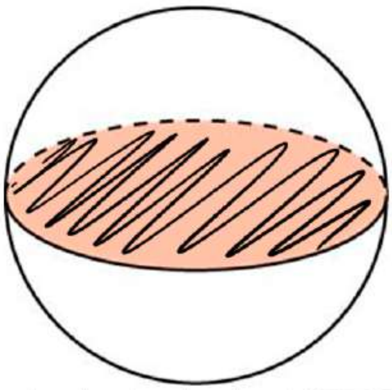
$AC = 8$

② $\sin B = \frac{8}{10} = 0{,}8$

**Ответ:** 0,8

**2**

Площадь поверхности шара равна 12. Найдите площадь большого круга шара.



**Источники:**

Досрочная волна (Резерв) 2019

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ШАРА


$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$

① $S_{\text{сф}} = 12 = 4\boxed{\pi R^2}$

$\pi R^2 = 3$

**Ответ:** 3

**3**

В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

4c1895

**Источники:**

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2020
Основная волна 2018
Основная волна 2017

$$P = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

**Ответ:** 0,75

**4**

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того,
что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того,
что система забракует неисправную батарейку, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,05. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

D170BF

**Источники:**

FIPI (старый банк)
Основная волна 2022
Досрочная волна 2022

P(батарейка забракована)

батарейка хорошая, но при этом забракована

батарейка плохая, при этом справедливо забрак.

$$0{,}99 \cdot 0{,}05 + 0{,}01 \cdot 0{,}95 =$$

$$\frac{495}{10000} + \frac{95}{10000} = \frac{590}{10000} = 0{,}059$$

**Ответ:** 0,059

**5** Найдите корень уравнения $3^{\log_9(4x+1)} = 9$.

Источники: FIPI (старый банк)

036C77

$$3^{\log_9(4x+1)} = 3^2$$

$$\log_9(4x+1) = 2$$

$$9^2 = 4x+1$$
$$81 = 4x+1$$
$$4x = 80$$
$$x = 20$$

**Ответ:** 20

**6** Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{24}}$.

Источники: FIPI (старый банк)

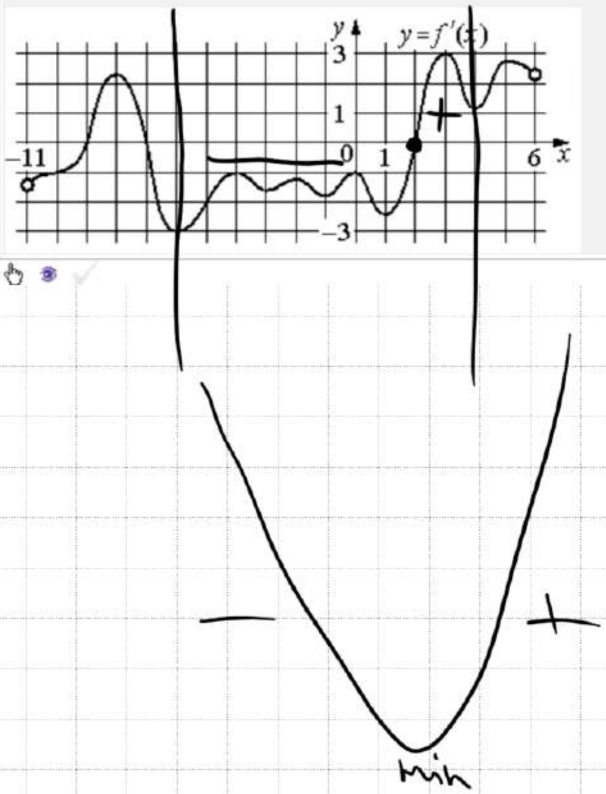
334A92

$$\sqrt[4]{\frac{8\cdot \cancel{48}\,2}{\cancel{24}}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

**Ответ:** 2

**7**

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11;6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6;4]$.




7D7A50

**Источники:**

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2021
Основная волна 2018
Пробный ЕГЭ 2017

**Ответ:** 1

**8**

Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_п = 25\ ^\circ C$, через радиатор пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние $x$, вода охлаждается от начальной температуры $T_в = 57\ ^\circ C$ до температуры $T$, причём $x = \alpha \cdot \dfrac{cm}{\gamma} \cdot \log_2 \dfrac{T_в - T_п}{T - T_п}$, где $c = 4200\ \dfrac{Вт \cdot с}{кг \cdot {}^\circ C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63\ \dfrac{Вт}{м \cdot {}^\circ C}$ — коэффициент теплообмена, $\alpha = 1{,}4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 56 м.

5CC0F4

**Источники:**

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018

$$56 = 1{,}4 \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4200}} \cdot \cancel{0{,}3}}{\cancel{63}_{\,3}} \cdot \log_2 \frac{32}{T-25}$$

$$\log_2 \frac{32}{T-25} = 2$$

$$\frac{32}{T-25} = 4$$

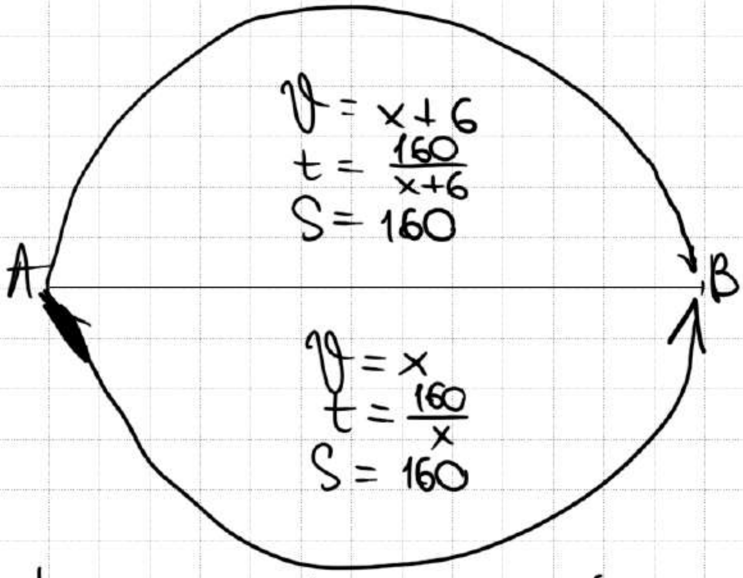
$$T-25 = 8$$

$$T = 33$$

**Ответ:** 33

**9** Два велосипедиста одновременно отправились в 160-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 6 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 6 часов раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

**Источники:**
FIPI (новый банк)
Пробный ЕГЭ 2019
Основная волна 2018




$t_{медл} - t_{быстр} = 6$

$\frac{160}{x} - \frac{160}{x+6} = 6$

$\frac{\cancel{160x} + 160\cdot\cancel{6} - \cancel{160x}}{x^2+6x} = \frac{\cancel{6}}{1}$

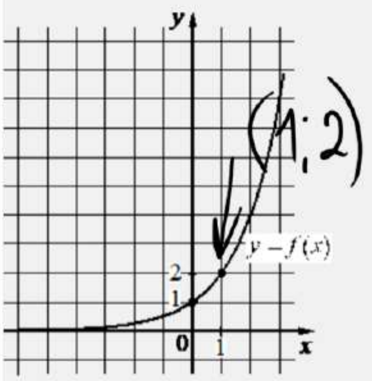
$x^2 + 6x - 160 = 0$

$x = -16$

$x = 10$

**ОТВЕТ:** 10

**10** На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(4)$.




38A32C

① $2 = a^1$

$a = 2$

$f(x) = 2^x$

② $f(4) = 2^4 = 16$

**ОТВЕТ:** 16

**Источники:**
FIPI (старый банк)
Основная волна 2022

**11** Найдите точку минимума функции
$y = (x^2 - 17x + 17) \cdot e^{7-x}$.


**Источники:**
Основная волна 2017
Досрочная волна 2014


**ПРОИЗВОДНЫЕ**

$C' = 0$
$x' = 1$
$(Cx)' = C$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

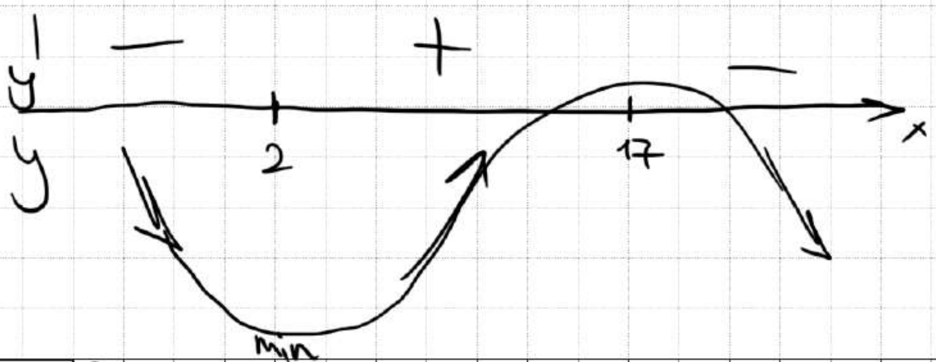
① $y' = (2x - 17) \cdot e^{7-x} - (x^2 - 17x + 17) \cdot e^{7-x} = 0$

$e^{7-x} \cdot (2x - 17 - x^2 + 17x - 17) = 0$

$e^{7-x} = 0$ $\quad\quad -x^2 + 19x - 34 = 0 \quad \cdot(-1)$

$\varnothing$ $\quad\quad x^2 - 19x + 34 = 0$

$x = 17 \quad x = 2$




**Ответ:** 2

**12** а) Решите уравнение

$$2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos x = \sqrt{3}\sin 2x - 1.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.


**Источники:**
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)


а) $2\left(\sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos 2x \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) - \cos x = \sqrt{3}\sin 2x - 1$

$\cancel{\sqrt{3}\sin 2x} + \cos 2x - \cos x - \cancel{\sqrt{3}\sin 2x} + 1 = 0$

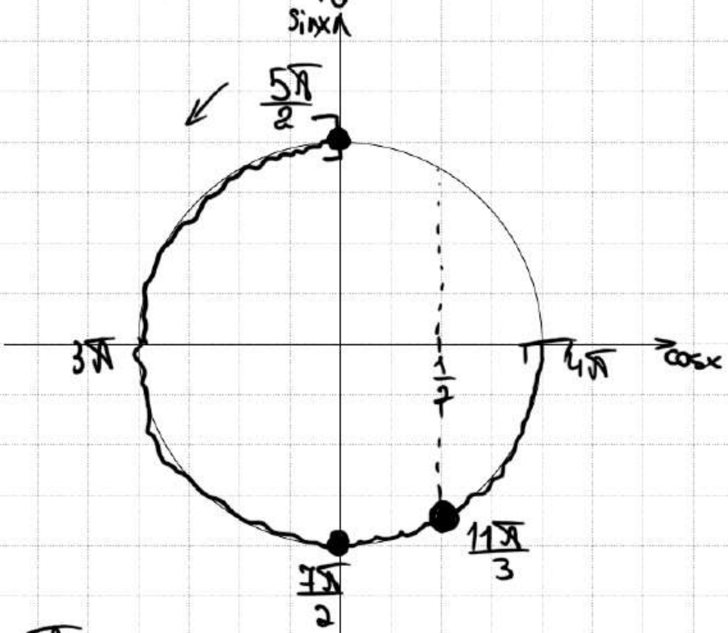
$2\cos^2 x - \cancel{1} - \cos x + \cancel{1} = 0$

$\cos x \cdot (2\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 0 \quad\quad \cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности:




Получим: $x = \frac{5\pi}{2}$

$x = \frac{7\pi}{2}$

$x = \frac{4\pi}{1} - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}$

**Ответ:** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$
б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{3}$.

## 13

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что $SA$ — высота пирамиды.

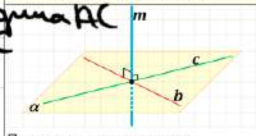
б) Найдите угол между прямыми $SC$ и $BD$.

A885B6

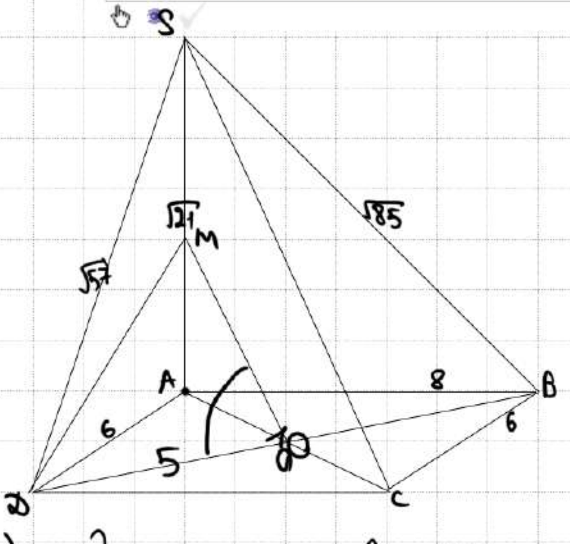
**Источники:**

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (10 вар)
Ященко 2018 (30 вар)

**ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ**




Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости




а) ① Заметим, что в $\triangle SAB$ и $\triangle SAD$ вып.

$\sqrt{57}^2 = 6^2 + \sqrt{21}^2$ $\quad$ $\sqrt{85}^2 = 8^2 + \sqrt{21}^2$

$\Rightarrow \triangle SAB$ и $\triangle SAD$ — прямоугольные по т. обр. т. Пифагора

② $SA \perp AD$, $SA \perp AB$ $\Rightarrow SA \perp (ABC)$ $\Rightarrow SA$ — высота пир. ■

б) ① $\triangle SAC$.

$OM$ — ср. линия, т.к. $O$ — середина $AC$, $OM \parallel SC$

$\Rightarrow \angle DOM$ — искомый

② $AM = \frac{\sqrt{21}}{2}$ $\quad$ $SC = \sqrt{21 + 10^2} = 11$

$OM = \frac{11}{2}$

$DM = \sqrt{6^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{165}}{2}$

③ по т. cos $\triangle DOM$.

$\cos\angle DOM = \dfrac{\frac{121}{4} + 25 - \frac{165}{4}}{2 \cdot \frac{11}{2} \cdot 5} = \frac{14}{55}$

$\angle DOM = \arccos\left(\frac{14}{55}\right)$

**Ответ:** $\arccos\left(\frac{14}{55}\right)$

## 14

Решите неравенство

$\log_5(3x+1) + \log_5\left(\frac{1}{72x^2} + 1\right) \geq \log_5\left(\frac{1}{24x} + 1\right)$.

**Источники:**

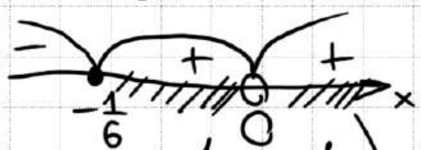
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018

$\log_5\left((3x+1)\cdot\left(\frac{1}{72x^2} + \frac{1}{1}\right)\right) \geq \log_5\left(\frac{1}{24x} + 1\right)$

$$\begin{cases} ① \ (3x+1)\cdot\left(\dfrac{1+72x^2}{72x^2}\right) \geq \dfrac{1+24x}{24x} \\ ② \ 3x + 1 > 0 \\ ③ \ \dfrac{1}{24x} + 1 > 0 \end{cases}$$

(3x

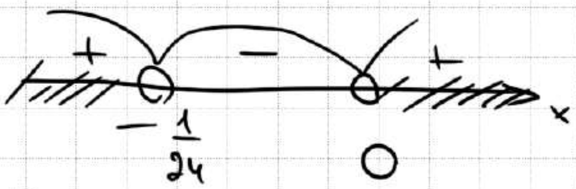
① $\dfrac{\cancel{3x} + 216x^3 + 1 + \cancel{72x^2} - \cancel{3x} - \cancel{72x^2}}{72x^2} \geq 0$



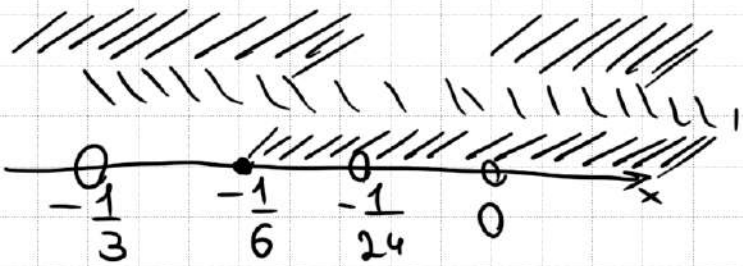

② $3x > -1$

$x > -\frac{1}{3}$

③ $\dfrac{1+24x}{24x} > 0$




Найдём пересечение:




**Ответ:** $\left[-\frac{1}{6}; -\frac{1}{24}\right) \cup (0; +\infty)$

**15** В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 8 лет. Условия его возврата таковы:

– в январе 2026, 2027, 2028 и 2029 годов долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– в январе 2030, 2031, 2032 и 2033 годов долг возрастает на 18% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1125 тысяч рублей?

**Источники:**
Основная волна 2021
Ященко 2022 (36 вар)

Пусть $S$ – сумма кредита
март – месяц платежа

| Дата | Сумма долга | | |
|---|---|---|---|
| и 25 | $S$ | | |
| я 26 | $1{,}2S$ (1,18) | ⇒ была выплата | $\frac{2{,}6S}{8}$ |
| м 26 | | | |
| и 26 | $\frac{7}{8}S$ | | |
| я 27 | $\frac{8{,}4}{8}S$ | ⇒ б.в. | $\frac{2{,}4S}{8}$ |
| м 27 | | | |
| и 27 | $\frac{6}{8}S$ | | |
| я 28 | $\frac{7{,}2S}{8}$ | ⇒ б.в. | $\frac{2{,}2S}{8}$ |
| м 28 | | | |
| и 28 | $\frac{5}{8}S$ | | |
| я 29 | $\frac{6}{8}S$ | ⇒ б.в. | $\frac{2S}{8}$ |
| м 29 | | | |
| и 29 | $\frac{4}{8}S$ | | |
| я 30 | $\frac{4{,}72}{8}S$ | ⇒ б.в. | $\frac{1{,}72S}{8}$ |
| м 30 | | | |
| и 30 | $\frac{3}{8}S$ | | |
| я 31 | $\frac{3{,}54S}{8}$ | ⇒ б.в. | $\frac{1{,}54S}{8}$ |
| м 31 | | | |
| и 31 | $\frac{2}{8}S$ | | |
| я 32 | $\frac{2{,}36S}{8}$ | ⇒ б.в. | $\frac{1{,}36S}{8}$ |
| м 32 | | | |
| и 32 | $\frac{1}{8}S$ | | |
| я 33 | $\frac{1{,}18S}{8}$ | ⇒ б.в. | $\frac{1{,}18S}{8}$ |
| м 33 | | | |
| и 33 | $0$ | | |

**Ответ:** 600 тыс.

О.С.В. = 1125

$$\frac{9{,}2S}{8} + \frac{5{,}8\cdot S}{8} = 1125$$

$$\frac{15\cdot S}{8} = 1125$$

$$S = \frac{1125}{15}\cdot 8 = 600$$

**16**

К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны $AB$ и $AD$ в точках $M$ и $N$ соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника $AMN$ равен стороне квадрата.

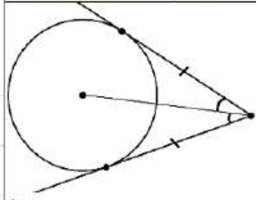
б) Прямая $MN$ пересекает прямую $CD$ в точке $P$. В каком отношении делит сторону $BC$ прямая, проходящая через точку $P$ и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 3$?

C131C9

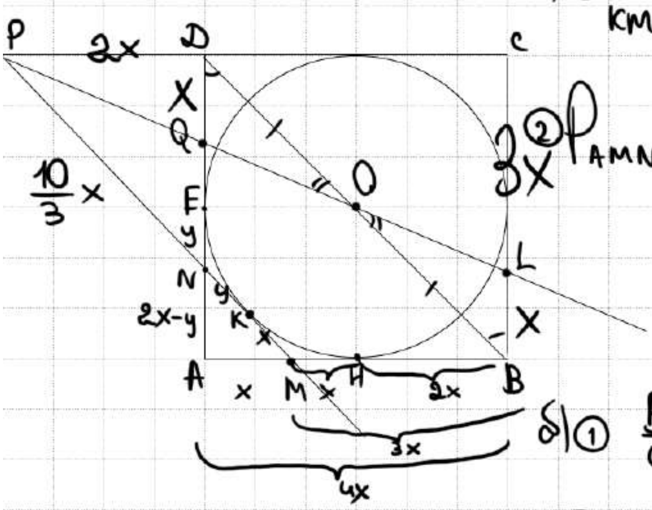
## Источники:

FIPI (старый банк)
Гордин #16 2019
Досрочная волна 2015
Пробный ЕГЭ 18.03.2021

**СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ**



Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности




а) ① $\left.\begin{aligned} EN &= NK \\ KM &= MH \end{aligned}\right\}$ по св-ву кас.

② $P_{AMN} = AN + NK + KM + AM$
$= \underbrace{AN + EN} + \underbrace{MH + AM}$
$= AE + AH$
$= \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AB$
$= AB$ ■

б) ① $\frac{BL}{CL}$ - ? $= \frac{DQ}{AQ}$

② по т. Пиф. в $\triangle AMN$: $(x+y)^2 = (2x-y)^2 + x^2$
$\cancel{x^2} + 2xy + \cancel{y^2} = 4x^2 - 4xy + \cancel{y^2} + \cancel{x^2}$
$4x^2 - 6xy = 0$
$2x \cdot (2x - 3y) = 0$
$x = 0$ $\quad x = 1{,}5y$
$\varnothing$ $\quad y = \frac{2}{3}x$

③ $\triangle PDN \sim \triangle ANM$ по 2 углам
$k = \frac{DN}{AN} = \frac{4x - AN}{AN} = \frac{4x - \frac{4}{3}x}{\frac{4}{3}x} = \frac{2}{1}$

④ по т. о биссектрисе
$\frac{PD}{PN} = \frac{DQ}{QN}$ $\quad \frac{2x}{\frac{10}{3}x} = \frac{DQ}{QN} = \frac{3}{5}$

$DQ = \frac{3}{8} \cdot DN = \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3}x = x$

$\frac{BL}{CL} = \frac{1}{3}$

**Ответ:** 3 : 1

**17** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\ln(6a - x)\ln(2x + 2a - 2) = \ln(6a - x)\ln(x - a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

**Источники:** Основная волна 2017

$$\ln(6a-x)\cdot\ln(2x+2a-2) - \ln(6a-x)\cdot\ln(x-a) = 0$$

$$\ln(6a-x)\cdot\left(\ln(2x+2a-2) - \ln(x-a)\right) = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \ln(6a-x)=0 \\ \ln(2x+2a-2) = \ln(x-a) \end{array}\right. \\ 6a - x > 0 \\ 2x+2a-2>0 \\ x-a>0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 6a-x=1 \\ 2x+2a-2 = x-a \end{array}\right. \\ 6a-x>0 \\ 2x+2a-2>0 \\ x-a>0 \\ 0\le x \le 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6a-1 \\ x=-3a+2 \end{array}\right. \\ 6a-x>0 \\ 2x+2a-2>0 \\ x-a>0 \\ 0\le x \le 1 \end{cases}$$

**Ответ:** $\left(\frac{2}{7}; \frac{1}{2}\right)$

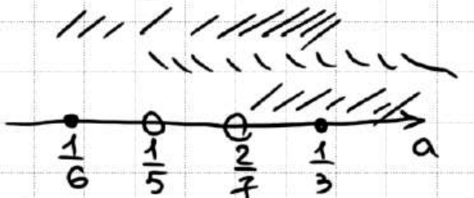
$X = 6a-1$ явл. корнем при $a$, удовл.

$$\begin{cases} 6a-x>0 \\ 2x+2a-2>0 \\ x-a>0 \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6a-6a+1>0 \\ 12a-2+2a-2>0 \\ 6a-1-a>0 \\ 0 \le 6a-1 \le 1 \end{cases}$$

$$1 \le 6a \le 2$$

$$\begin{cases} a - \text{любое} \\ a > \frac{2}{7} \\ a > \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \le a \le \frac{1}{3} \end{cases}$$

Найдём пересечение:



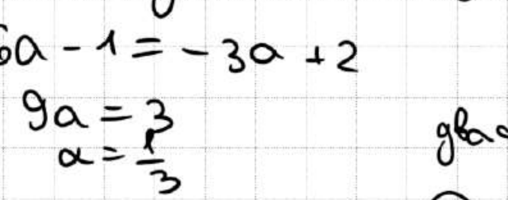

$\Rightarrow$ при $a \in \left(\frac{2}{7}; \frac{1}{3}\right]$ $x = 6a-1$ явл. корнем

$X = -3a+2$ явл. корнем при $a$, удовл.

$$\begin{cases} 6a-x>0 \\ 2x+2a-2>0 \\ x-a>0 \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9a>2 \\ -6a+4+2a-2>0 \\ 4a<2 \\ -2\le -3a \le -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > \frac{2}{9} \\ a < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \le a \le \frac{2}{3} \end{cases}$$

Найдём пересечение




$\Rightarrow$ при $a \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$ $x = -3a+2$ явл. корнем

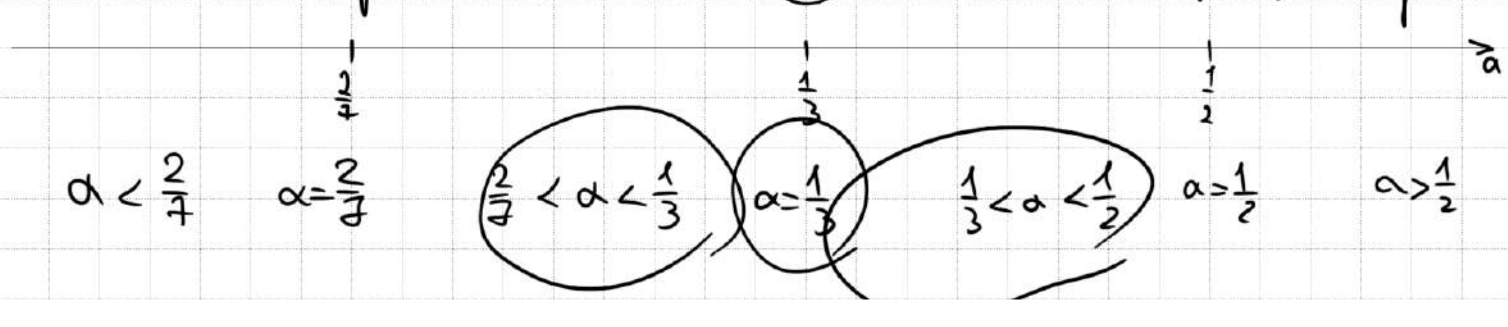
$X = -3a+2$ совпадает с $x = 6a-1$, если

$$6a - 1 = -3a+2$$

$$9a = 3$$

$$a = \frac{1}{3}$$

два совпадающих корня



**18**

На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

**Источники:**

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2015
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018

24C2D5

Ср. арифм. = 7

$\frac{\text{Сумма чисел}}{30} = 7 \Rightarrow$ Сумма чисел $= 210$

а) Сколько могло быть изначально единиц?

Если 30 единиц $\Rightarrow$ сумма $= 30$ $\varnothing$

29 единиц $\Rightarrow$ сумма $\leq 29 + 40$ $\varnothing$

28 единиц $\Rightarrow$ сумма $\leq 28 + 80$ $\varnothing$

27 единиц $\Rightarrow$ сумма $\leq 27 + 120$ $\varnothing$

26 единиц $\Rightarrow$ сумма $\leq 26 + 160$ $\varnothing$

25 единиц $\Rightarrow$ сумма $25 + 37\cdot 5$ ✓

Пример $\underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ldots 1}_{25\text{ штук}}$ 37 37 37 37 37

Ср. Ар. Было $= 7$

Ср. Ар. Стало $= \frac{18{,}5\cdot 5}{5} = 18{,}5$

$\Rightarrow$ а) Ответ: да

б) Пусть $x$ - кол-во единиц,

$S$ - первоначальная сумма всех, кроме единиц,

Тогда После замены

$\frac{S}{2}$ - оставшаяся сумма всех кроме единиц, после замены

Ср. Ар. после замены: $\frac{\frac{S}{2}}{30 - x} = \frac{S}{60-2x} = \frac{210 - x}{60 - 2x}$

$12 < \frac{210 - x}{60 - 2x} < 13 \quad \Big|\cdot 60-2x$

$720 - 24x < 210 - x < 780 - 26x$

$\begin{cases} 720 - 24x < 210 - x \\ 210 - x < 780 - 26x \end{cases}$

$\begin{cases} 23x > 510 \\ 25x < 570 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \frac{510}{23} \\ x < \frac{570}{25} \end{cases}$

$\begin{cases} x > 22\frac{4}{3} \\ x < 22{,}8 \end{cases}$ $\Rightarrow$ целых $x$ нет

Ответ: б) нет

в) Нужно максимизировать кол-во единиц для наибольшего ср. ар.

$x \leq 25$ (см п. а)

$\Rightarrow$ Ср. Ар. иск. $= 18{,}5$ (см п. а)

| | |
|---|---|
| **Ответ:** | а) да |
| | б) нет |
| | в) 18,5 |