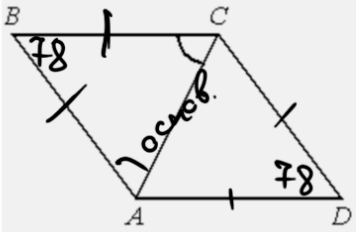
1

В ромбе $ABCD$ угол CDA равен 78°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



257EE0

Источники:
FIPI (старый банк)
Демо 2021
Пробный ЕГЭ 2013

$$\frac{180-78}{2}=51$$

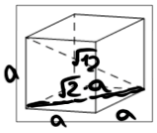
Ответ: 51

2

Введите ответ в поле ввода

Диагональ куба равна $\sqrt{12}$. Найдите его объём.

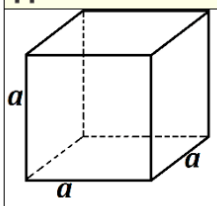
Введите ответ



Номер: 4293 Статус задания: **НЕ РЕШЕНО** ОТВЕТИТЬ

Источники:
FIPI (новый банк)
Основная волна 2014

ДИАГОНАЛЬ КУБА



$d=\sqrt{3}a$

$$\sqrt{12}^2=a^2+(\sqrt{2}a)^2$$
$$12=3a^2$$
$$a^2=4$$
$$a=2$$

$$V=a^3=2^3=8$$

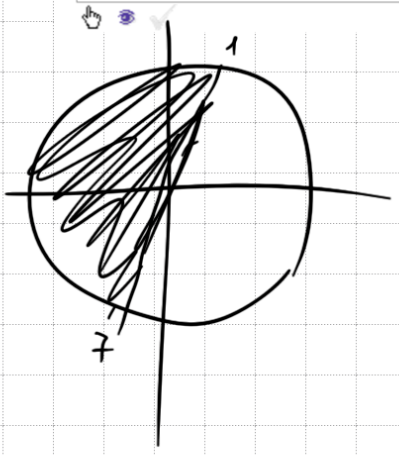
Ответ: 8

3

Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1.

26190D

Источники:
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2021
Пробный ЕГЭ 2013



$$P = \frac{6}{12} = 0{,}5$$

Ответ: 0,5

4

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах равна 0,05. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

EBB536

Источники:
FIPI (старый банк)

I автомат	II автомат	
ост	ост	
ост	зак	0,05
зак	ост	0,05
зак	зак	0,05

} 1

$$1 - 0{,}05 - 0{,}05 - 0{,}05 = 0{,}85$$

Ответ: 0,85

5 Решите уравнение
$\log_x 32 = 5$.

Источники:
Пробный ЕГЭ 2019

$x^5 = 32$
$2^5 = 32$

Ответ: 2

6 Найдите значение выражения
$\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{8}\cdot\cos\frac{7\pi}{8}$.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2021
Основная волна 2017

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{7\pi}{8}\cdot\cos\frac{7\pi}{8}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\frac{7\pi}{4}$$

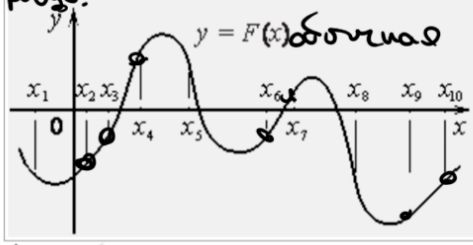
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{2}{4} = -0{,}5$$

Ответ: -0,5

7

На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?

произв.



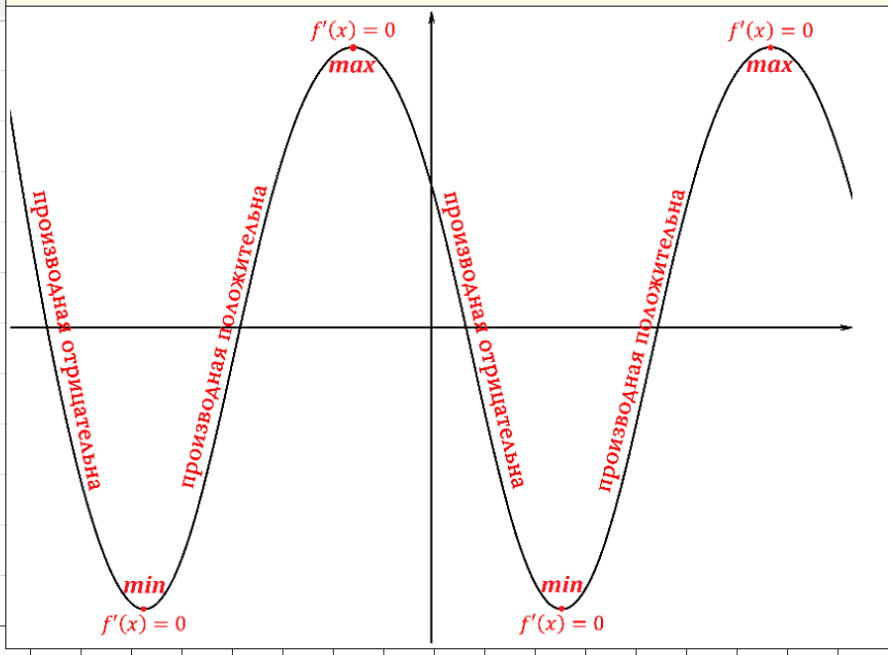
Источники:

FIPI (старый банк)

ПЕРВООБРАЗНАЯ

$F'(x) = f(x)$

ГРАФИК ОБЫЧНОЙ ФУНКЦИИ



Ответ: 7

8

К источнику с ЭДС $\varepsilon = 115$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}6$ Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R+r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 100 В? Ответ выразите в омах.

Источники:

Основная волна 2019

$U \geq 100$

$\frac{\varepsilon R}{R+r} - \frac{100}{1}^{(R+0{,}6} \geq 0$

$\frac{115 \cdot R - 100R - 60}{R+0{,}6} \geq 0 \quad \Big| \cdot (R+0{,}6)$

$15R - 60 \geq 0$

$R \geq 4$

Ответ: 4

9

Первые 120 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 200 км — со скоростью 100 км/ч, а затем 160 км — со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5504F2

Источники:

FIPI (старый банк)

СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ

$$V_{\text{средняя}} = \frac{S_{\text{суммарное}}}{t_{\text{суммарное}}}$$

$v = 60$, $t = 2$, $S = 120$

$v = 100$, $t = 2$, $S = 200$

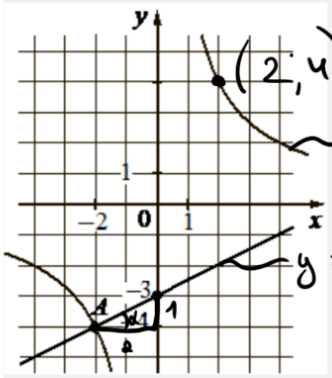
$v = 120$, $t = \frac{160}{120} = \frac{4}{3}$, $S = 160$

$$v_{ср} = \frac{120 + 200 + 160}{2 + 2 + \frac{4}{3}} = \frac{480 \cdot 3}{\cancel{\frac{16}{3}}} = 90$$

Ответ: 90

10

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



$(2, 4)$

$y = \frac{8}{x}$

$y = \frac{1}{2}x - 3$

$y = \frac{k}{x}$

$4 = \frac{k}{2}$ $\quad k = 8$

6FA927

Источники:

FIPI (старый банк)

Досрочная волна 2022

$\frac{8}{x} = \frac{1}{2}x - 3 \quad \Big| \cdot x$

$8 = \frac{1}{2}x^2 - 3x \quad \Big| \cdot 2$

$x^2 - 6x - 16 = 0$

$x_B = 8 \qquad x_A = -2$

Ответ: 8

11

Найдите наименьшее значение функции

$$y = 8\cos x + \frac{30}{\pi}x + 19$$

на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

0A887D

① $y' = -8\sin x + \frac{30}{\pi} = 0$

$\sin x = \frac{30}{8\pi} = \frac{30}{8\cdot 3{,}14} > 1$

$\varnothing$

② $y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\overset{10}{\cancel{30}}}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{3}} + 19 = -5$

$y(0) = 8\cdot 1 + 19 = 27$

Ответ: -5

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2017
Пробный ЕГЭ 2015

ПРОИЗВОДНЫЕ

$C' = 0$
$x' = 1$
$(Cx)' = C$
$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(U\cdot V)' = U'V + UV'$
$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
$(U(V))' = (U(V))'\cdot V'$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x\cdot\ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a b)' = \frac{1}{b\cdot\ln a}$

12

а) Решите уравнение

$$1 + \log_2(9x^2+5) = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1; \frac{8}{9}\right]$.

а) $\log_2 2 + \log_2(9x^2+5) = \log_{2^{\frac{1}{2}}}(8x^4+14)^{\frac{1}{2}}$

$\log_2(18x^2+10) = \log_2(8x^4+14)$

$8x^4 - 18x^2 + 4 = 0 \quad |:2$

$4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$

Пусть $x^2 = t$

$4t^2 - 9t + 2 = 0$

$D = 81 - 32 = 49$

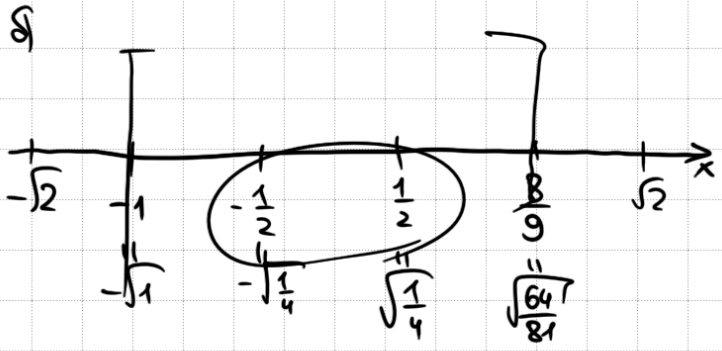
$t = \frac{9\pm 7}{8}$

$t_1 = 2$ $\quad$ $t_2 = \frac{1}{4}$

$x^2 = 2$ $\quad$ $x^2 = \frac{1}{4}$

$x = \pm\sqrt{2}$ $\quad$ $x = \pm\frac{1}{2}$

б)



Ответ:
а) $\pm\sqrt{2}$; $\pm\frac{1}{2}$
б) $\pm\frac{1}{2}$

Источники:

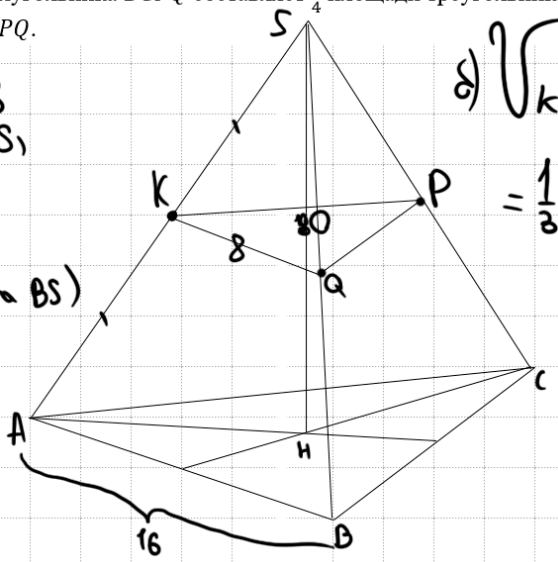
FIPI (старый банк)
Семёнов 2015
Основная волна (Резерв) 2013

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 16, высота SH равна 10. Точка K — середина бокового ребра SA. Плоскость, параллельная плоскости ABC, проходит через точку K и пересекает рёбра SB и SC в точках Q и P соответственно.

а) Докажите, что площадь четырёхугольника $BCPQ$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SBC.

б) Найдите объём пирамиды $KBCPQ$.

Источники:
Основная волна 2021
Ященко 2022 (36 вар)



а) ① KQ – ср. линия $\triangle SAB$
т.к. $KQ \parallel AB$ и K – середина AS,

PQ – ср. линия $\triangle SBC$
(т.к. $QP \parallel BC$ и Q – середина BS)

KP – ср. линия $\triangle ASC$
(т.к. $KP \parallel AC$)

② $\triangle SQP \sim \triangle SBC$ по 2 углам
$k=2$

Пусть $S_{SQP} = S$
Тогда $S_{SBC} = 4S$ (т.к. $\frac{S_{SBC}}{S_{SQP}} = k^2$)
Получаем $S_{BCPQ} = 4S - S = 3S = \frac{3}{4} S_{SBC}$ ■

б) $V_{KBCPQ} = V_{SABC} - V_{SKPQ} - V_{KABC}$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 16^2}{4} \cdot 10 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 8^2}{4} \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 16^2}{4} \cdot 5$

$= \cancel{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 8^2}{4} \cdot 5 \cdot (4 \cdot 2 - 4 \cdot 1)} =$

$= 80\sqrt{3}$

Ответ: $80\sqrt{3}$.

14 Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 8^{x-1}}{2 \cdot 8^{x-1} - 1} \geq \frac{3}{8^x - 1} + \frac{8}{64^x - 5 \cdot 8^x + 4}.$$

Источники:
Основная волна 2017

Пусть $8^x = t$

$$\frac{2 \cdot \frac{t}{8} \cdot 8}{2 \cdot \frac{t}{8} - 1 \cdot 8} - \frac{3}{t-1} - \frac{8}{t^2 - 5t + 4} \geq 0$$

$$\frac{\cancel{2}t^{(t-1}}{\cancel{2}(t-4)} - \frac{3^{(t-4}}{t-1} - \frac{8}{(t-1)(t-4)} \geq 0$$

$$\frac{t^2 - t - 3t + 12 - 8}{(t-1)(t-4)} \geq 0$$

$$\frac{t^2 - 4t + 4}{(t-1)(t-4)} \geq 0$$

$$\frac{(t-2)^2}{(t-1)(t-4)} \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t < 1 \\ t = 2 \\ t > 4 \end{array}\right.$$

$8^x < 1$
$8^x < 8^0$
$x < 0$

$8^x = 2$
$x = \frac{1}{3}$
$\log_8 2$

$8^x > 4$
$2^{3x} > 2^2$
$3x > 2$
$x > \frac{2}{3}$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

15 31 декабря 2016 года Василий взял в банке 5 460 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Василий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Василий выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

Источники:

Ященко 2022 (50 вар)
Ященко 2022 (14 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2019 (50 вар)
Ященко 2019 (14 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (20 вар)
Ященко 2017 (30 вар)
Демо 2016
Демо 2015

1 янв – день платежа

Пусть 5 460 000 = S

Дата	Сумма долга
31 дек 16	S
31 дек 17	$1{,}2\cdot S$
1 янв 18	$1{,}2\cdot S - x$
31 дек 18	$1{,}2^2\cdot S - 1{,}2\cdot x$
1 янв 19	$1{,}2^2\cdot S - 1{,}2x - x$
31 дек 19	$1{,}2^3 S - 1{,}2^2\cdot x - 1{,}2x$
1 янв 20	$1{,}2^3\cdot S - 1{,}2^2\cdot x - 1{,}2x - x = 0$

$$1{,}728\cdot S = 1{,}44x + 1{,}2x + x$$

$$1{,}728\cdot S = 3{,}64\cdot x$$

$$x = \frac{\overset{\boxed{432}}{\cancel{1728}}\cdot \overset{\boxed{6000}}{\cancel{5460000}}}{\cancel{1000}\cdot \cancel{364}\ \cancel{91}}$$

$$x = 2592\ 000$$

Ответ: 2 592 000

16

В треугольнике ABC угол ABC равен 60°. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M.

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) Найдите $\sin\angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

6FC99C

а) ① BO – биссектриса угла B (по св-ву кас.)

② $\triangle OBH$ – прямоугольный

$BO = 2r$

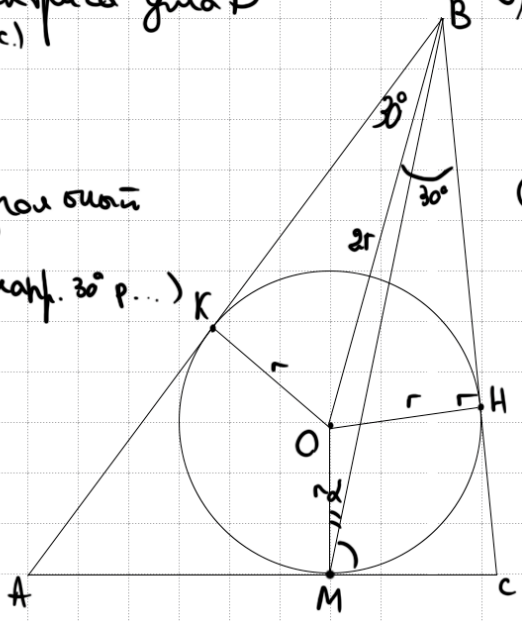
(т.к. катет, леж. напр. 30° р...)

③ $\triangle OBM$:

$OB + OM > BM$

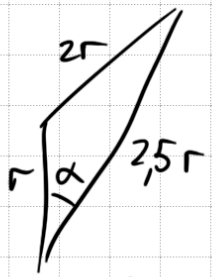
(нер-во тр-ка)

$BM < 3r$



б) ① $\sin\angle BMC = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$ – ?

② BOM:



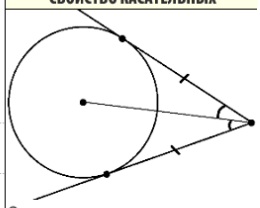
$$\cos\alpha = \frac{r^2 + (2{,}5r)^2 - (2r)^2}{2\cdot r\cdot 2{,}5r} = \frac{3{,}25\cancel{r^2}}{5\cdot\cancel{r^2}} = \frac{13}{20}$$

Ответ: 0,65

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ

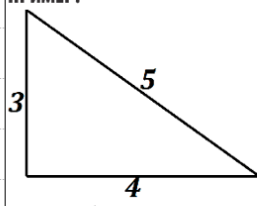


Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

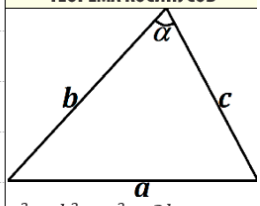
В любом треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны

ПРИМЕР:



$3 + 4 > 5$
$3 + 5 > 4$
$4 + 5 > 3$

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

17

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(4\cos x - 3 - a)\cdot\cos x - 2{,}5\cos 2x + 1{,}5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

Источники:
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2013

$4\cos^2 x - 3\cos x - a\cdot\cos x - 2{,}5(2\cos^2 x - 1) + 1{,}5 = 0$

$-\cos^2 x - 3\cos x - a\cdot\cos x + 4 = 0 \quad |\cdot(-1)$

$\cos^2 x + (3+a)\cdot\cos x - 4 = 0$

Пусть $\cos x = t \qquad -1 \le t \le 1$

$t^2 + (3+a)\cdot t - 4 = 0$

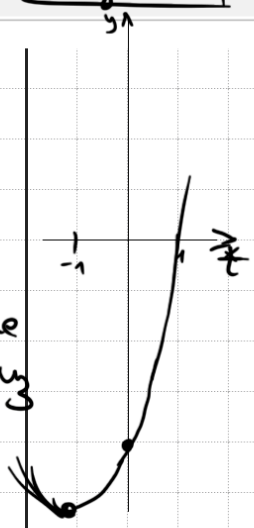
Найдём все a, при это уравнение с t имеет хотя бы одно решение из отрезка $t \in [-1;1]$

Пусть $f(t) = t^2 + (3+a)\cdot t - 4$

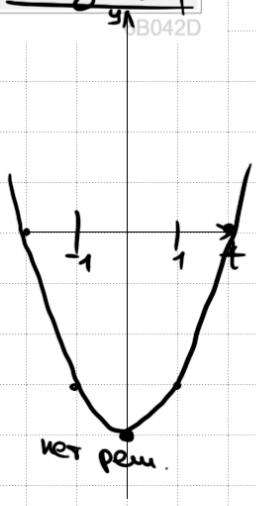
График - парабола, ветви ↑

$(0;-4)$

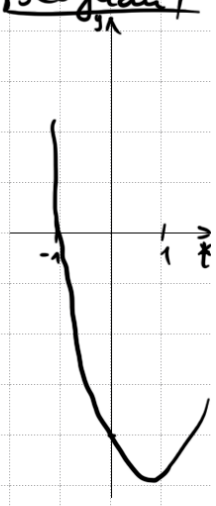
1 случай



2 случай



3 случай



$f(1) \ge 0$ $\qquad$ $f(-1) \ge 0$

$\left[\begin{array}{l} ① \ f(1) \ge 0 \\ ② \ f(-1) \ge 0 \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;-6] \cup [0;+\infty)$

① $1 + 3 + a - 4 \ge 0$

$a \ge 0$

② $1 - 3 - a - 4 \ge 0$

$a \le -6$

18

Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 12?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 87?

в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

BC565B

Источники:

FIPI (старый банк)
Основная волна 2013

Пусть a – число сотен $1 \le a \le 9$
b – число десятков $0 \le b \le 9$
c – число единиц $0 \le c \le 9$

а) $\dfrac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a+b+c} = 12$

$100 \cdot a + 10b + c = 12a + 12b + 12c$

$88 \cdot a = 2b + 11 \cdot c$

Если $a = 1$, $b = 0$, $c = 8$, то $\dfrac{108}{1+0+8} = 12$

б) $\dfrac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a+b+c} = 87$

$13 \cdot a = 77 \cdot b + 86 \cdot c$

Рассмотрим область значений левой части уравнения

$13 \le 13a \le 117$

Рассмотрим наименьшие значения правой части уравнения

Если $b=0$ и $c=0$ $13 \cdot a = 0$ $\varnothing$
$b=1$ и $c=0$ $13 \cdot a = 77$ $\varnothing$
$b=0$ и $c=1$ $13 \cdot a = 86$ $\varnothing$
$b=2$ и $c=0$ $13 \cdot a = 154$ $\varnothing$

Все дальнейшие комбинации b и c будут давать больше 154 в правой части уравнения, т.е. равенство выполняться не будет

Ответ:

	а) Да
	б) нет
	в) 11

18

Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 12?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 87?

в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

BC565B

в) Пусть k – искомое условие

$\dfrac{100 \cdot a + 10 \cdot b + c}{a+b+c} = k$

$100 \cdot a + 10 \cdot b + c = k \cdot a + k \cdot b + k \cdot c$

$a \cdot (k-100) + b \cdot (k-10) + c \cdot (k-1) = 0$

Если $k = 1$, то $0 = 99 \cdot a + 9 \cdot b$ Нет решений в целых числах
$k = 2$, то $c = 98 \cdot a + 8 \cdot b$ $\varnothing$
$k = 3$, то $2 \cdot c = 97 \cdot a + 7 \cdot b$ $\varnothing$ при $1 \le k \le 10$ Правая часть уравнения всегда больше
...
$k = 9$, то $8 \cdot c = 91 \cdot a + b$ $\varnothing$
$k = 10$ $9c = 90 \cdot a + 0$ $\varnothing$
$k = 11$ $10 \cdot c + b = 89 \cdot a$ При $a = 1$, $b = 9$, $c = 8$ $\dfrac{198}{1+9+8} = 11$

Ответ: в) 11