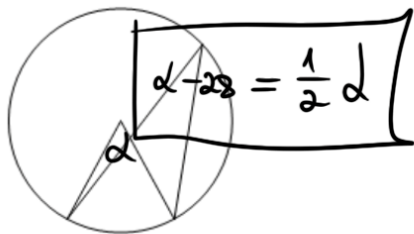


1

Найдите центральный угол, если он на 28° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.



$$\alpha - \frac{1}{2}\alpha = 28$$

$$\frac{1}{2}\alpha = 28$$

$$\alpha = 56$$

ОТВЕТ: 5 6

Источники:

ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2018
Пробный ЕГЭ 2015

2

В цилиндрический сосуд налили 2800 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 13 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.



791637

$$\textcircled{1} V_{\text{вода}} = \pi R^2 \cdot 16 = 2800$$

$$\pi R^2 = 175$$

$$\textcircled{2} V_{\text{вода}} + V_{\text{дет.}} = \pi R^2 \cdot 29$$

$$2800 + V_{\text{дет.}} = 175 \cdot 29$$

$$2275$$

ОТВЕТ: 2 2 7 5

Источники:

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Досрочная волна 2018
Основная волна 2017

3

На олимпиаде по русскому языку 350 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 140 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.



26с68F

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2017

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad 140 \\ \textcircled{2} \quad 140 \\ \textcircled{3} \quad 70 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array}} \right\} 350$$

$$P = \frac{70}{350} = \frac{1}{5} = 0,2$$

ОТВЕТ: 0 , 2

4

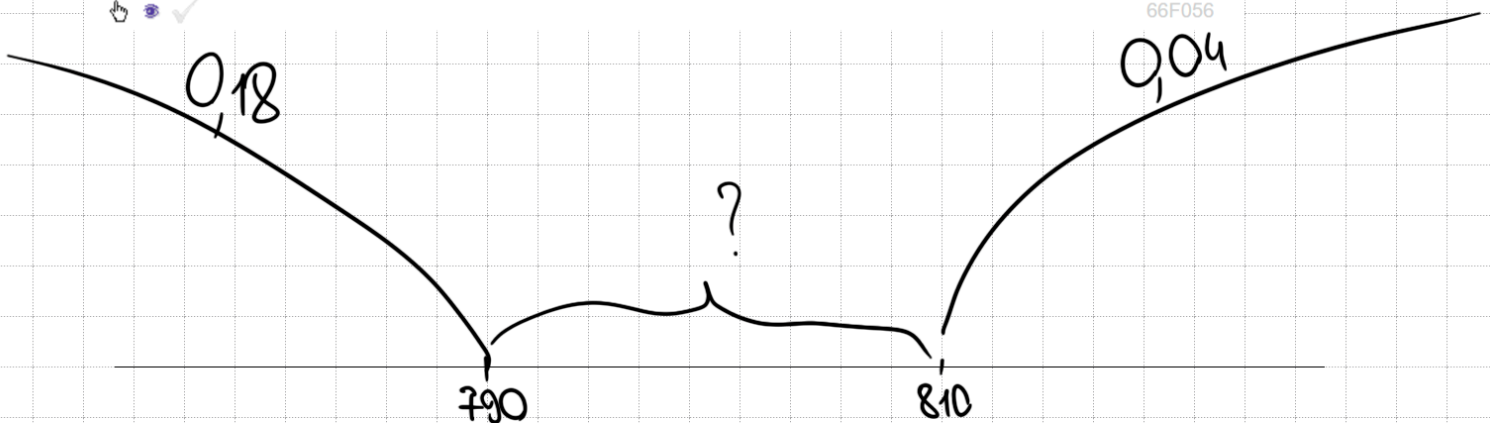
При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,82. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.



66F056

Источники:

ФИПИ (старый банк)



$$1 - 0,18 - 0,04 = 0,78$$

ОТВЕТ: 0 , 7 8

5

Найдите корень уравнения $(\frac{1}{2})^{x-6} = 8^x$.

С36F5E

$$\left(2^{-1}\right)^{x-6} = 2^{3x}$$

$$2^{-x+6} = 2^{3x}$$

$$-x + 6 = 3x$$

$$6 = 4x$$

$$x = 1,5$$

ОТВЕТ: 1,5

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна (Резерв) 2019
 Основная волна 2019
 Основная волна 2017
 Пробный ЕГЭ 2015
 Основная волна 2014

6

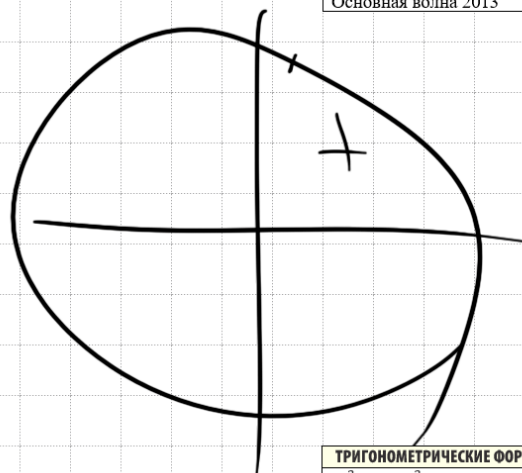
Найдите значение выражения $30 \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 87^\circ - 43$.

70CAFA

$$30 \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 3^\circ) - 43$$

$$30 \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{ctg} 3^\circ - 43$$

$$30 \cdot \frac{\sin 3^\circ}{\cos 3^\circ} \cdot \frac{\cos 3^\circ}{\sin 3^\circ} - 43 = -13$$



Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2013

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

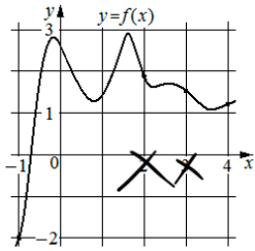
$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

ОТВЕТ: -13

7

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-1, 2, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)

ОТВЕТ: - 1

8

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 294,4 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

Источники:

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Досрочная волна 2019

$$P_1 = 1$$

F56EEF

$$1 \cdot 294,4^{1,4} = 128 \cdot V_2^{1,4}$$

$$V_2^{1,4} = \frac{294,4^{1,4}}{128}$$

$$V_2^{7/5} = \frac{294,4^7}{2^{35}} \quad | \wedge \frac{1}{7}$$

$$V_2 = \frac{294,4}{2^5} = \frac{294,4}{32} = 9,2$$

ОТВЕТ: 9, 2

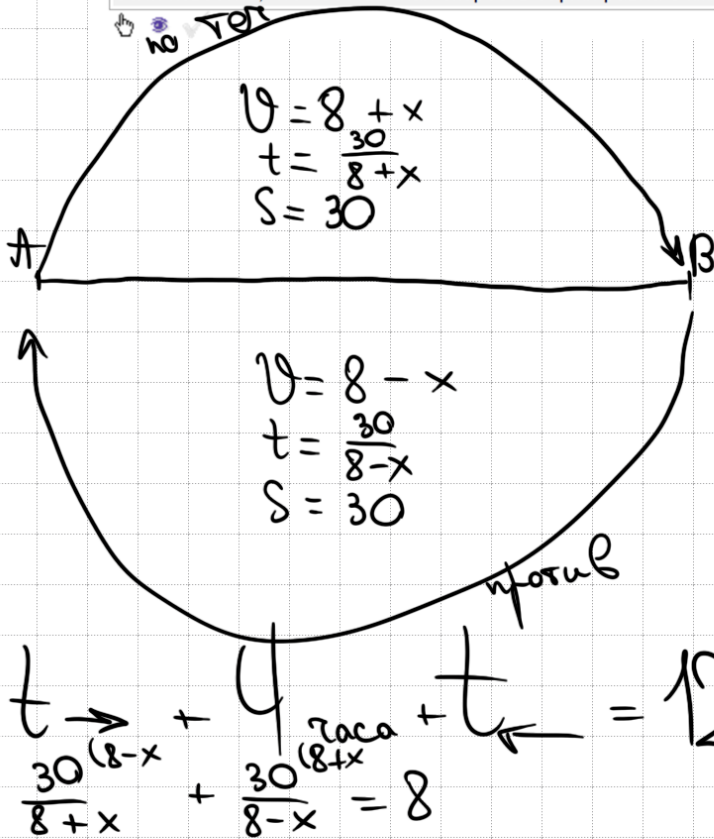
9

Баржа в 10 : 00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 4 часа, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 22 : 00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 8 км/ч.

Источники:

ФИПИ (старый банк)

C169EB



$$\frac{240 - 30x + 240 + 30x}{64 - x^2} = 8$$

$$\frac{480}{64 - x^2} = 8 \quad | : 8$$

$$\frac{60}{64 - x^2} = 1$$

$$60 = 64 - x^2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2$$

ОТВЕТ: 2

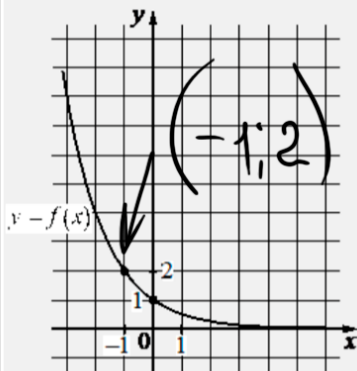
10

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-4)$.

Источники:

ФИПИ (старый банк)
Основная волна 2022

7C4A3A



$$① 2 = a^{-1}$$

$$2 = \frac{1}{a}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$② f(-4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$$

ОТВЕТ: 16

11

Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 6x - 5$$

на отрезке $[9; 36]$.

2F96EF

$$\textcircled{1} y = \frac{2}{3} \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6x - 5$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 6x - 5$$

$$\textcircled{2} y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6$$

$$\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 6$$

$$x = 36$$

$$\textcircled{3} y(9) = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 3 - 6 \cdot 9 - 5 = -41$$

$$y(36) = \frac{2}{3} \cdot 216 - 216 - 5 = -77$$

ОТВЕТ: -77

12

а) Решите уравнение

$$\cos 2x - 3 \cos(-x) + 2 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos 2x - 3 \cos x + 2 &= 0 \\ 2 \cos^2 x - 1 - 3 \cos x + 2 &= 0 \\ 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Пусть } \cos x = t$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$t = 1$$

$$\cos x = 1$$

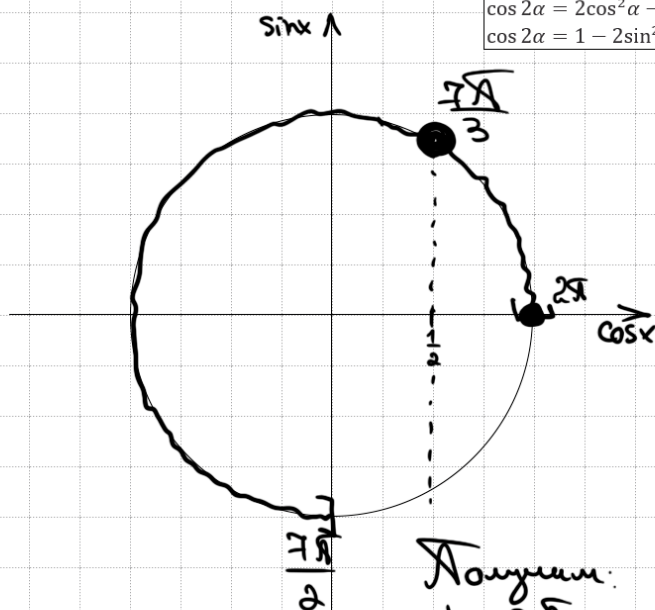
$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

б) Отберём корни с помощью окружности:



Получим:

$$x = 2\pi$$

$$x = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$$

ОТВЕТ:

$$\text{а) } 2\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } 2\pi, \frac{7\pi}{3}$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Источники:

Основная волна 2022

Чётность

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

13

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$.

Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

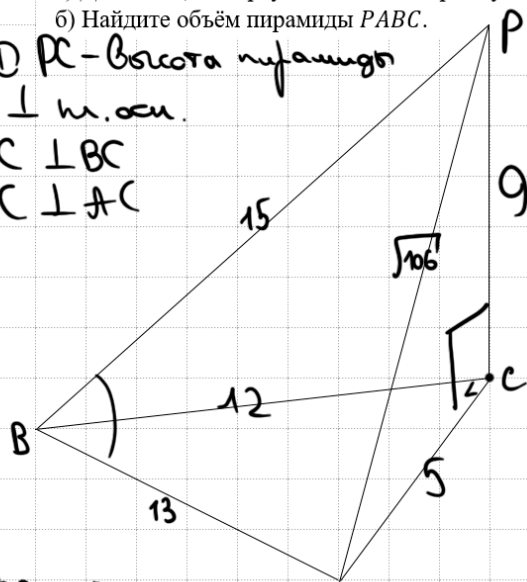
б) Найдите объём пирамиды $PABC$.

а) ① PC - высота пирамиды

$PC \perp$ м. осн.

$\Rightarrow PC \perp BC$

$PC \perp AC$



② $BC \perp PA$ (по усм.)

$BC \perp PC$

$\Rightarrow BC \perp (PCA)$

$\Rightarrow BC \perp AC$

$\Rightarrow \triangle ABC$ - прямоугольный

ОТВЕТ: 90

б) ① $\triangle ABP$:

$$AP = \sqrt{15^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \frac{48}{65}} = \sqrt{225 + 169 - 288} = \sqrt{106}$$

$$\begin{cases} \triangle ABC: & 13^2 = AC^2 + BC^2 \\ \triangle PBC: & 15^2 = PC^2 + BC^2 \\ \triangle APC: & \sqrt{106}^2 = PC^2 + AC^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 56 = PC^2 - AC^2 \\ 106 = PC^2 + AC^2 \end{cases}$$

$$162 = 2PC^2$$

$$PC^2 = 81$$

$$PC = 9$$

$$\text{② } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot 5}{2} \cdot 9 = 90$$

Источники:

Гордин #14 2019

Основная волна (Резерв) 2017

14

Решите неравенство

$$\frac{2^{5+x} - 2^{-x}}{2^{3-x} - 4^{-x}} \geq 2^x.$$

$$\frac{2^5 \cdot 2^x - \frac{1}{2^x}}{2^3 - \frac{1}{4^x}} - \frac{2^x}{1} \geq 0 \quad \left(\frac{8}{2^x} - \frac{1}{4^x}\right)$$

$$\frac{2^3}{2^x} - \frac{1}{4^x} - \frac{2^x}{1} \geq 0 \quad t > 0$$

Пусть $2^x = t$

$$\frac{32t - \frac{1}{t} - 8 + \frac{1}{t}}{\frac{8}{t} - \frac{1}{t^2}} \geq 0$$

$$\frac{32t - 8}{\frac{8t - 1}{t^2}} \geq 0 \quad | : t^2$$

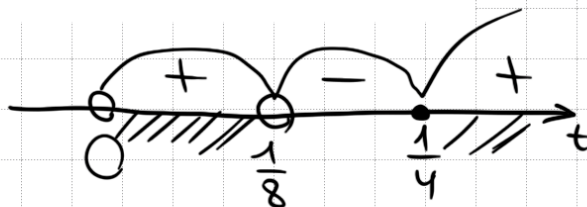
$$\frac{32t - 8}{8t - 1} \geq 0$$

ОТВЕТ:

$$(-\infty; -3) \cup [-2; +\infty)$$

Источники:

Досрочная волна 2019



$$\begin{cases} 0 < t < \frac{1}{8} \\ t \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$0 < 2^x < \frac{1}{8}$$

$$2^x < 2^{-3}$$

$$x < -3$$

$$2^x \geq 2^{-2}$$

$$x \geq -2$$

15

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

Пусть S - сумма вклада
 Декабрь - месяц начисл. %
 Январь - месяц пополнения вклада
 Январь 2 года - месяц пополнения вклада

Дата	Сумма вклада
1 Янв 21	S
1 Дек 21	$1,1 \cdot S$
2 Янв 22	ничего не происходит
2 Янв 22	$1,1^2 \cdot S$
3 Янв 23	$1,1^2 \cdot S + 3$
3 Дек 23	$1,1^3 \cdot S + 3 \cdot 1,1$
4 Янв 24	$1,1^3 \cdot S + 3 \cdot 1,1 + 3$
4 Дек 24	$1,1^4 \cdot S + 3 \cdot 1,1^2 + 3 \cdot 1,1 < 25$

$$1,4641 \cdot S + 3,63 + 3,3 - 25 < 0$$

$$1,4641 \cdot S < 18,07$$

$$S < \frac{180700}{14641}$$

$$S < 12 \frac{5008}{14641}$$

$$S_{\text{наиб}} = 12$$

ОТВЕТ: 12 млн

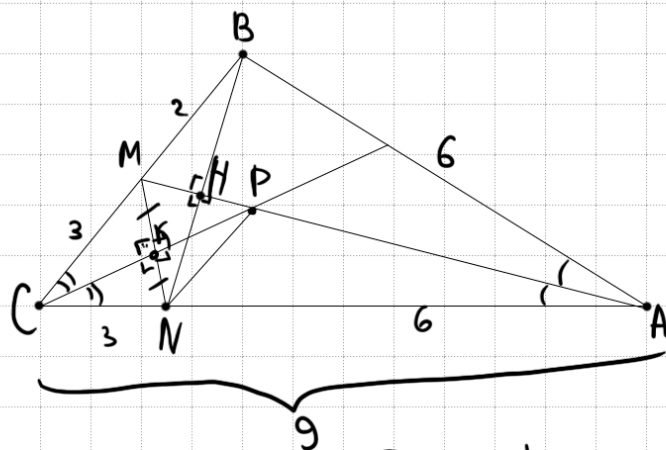
Источники:

ФИР (старый банк)
 ФИР (новый банк)
 Яценко 2018
 Досрочная волна 2016

16

В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM , пересекает сторону AC в точке N ; $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

- а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.
 б) Пусть P - точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите отношение $AP:PN$.



а) ① по т. о биссектрисе:
 $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{5} \text{ и } BC=5 \Rightarrow BM=2$
 $CM=3$

② $\triangle ABN$ - равноб., т.к. AM - высота и биссектриса

ОТВЕТ: 3:1

Источники:

Яценко 2018
 Основная волна (Резерв) 2014

$$\Rightarrow AN=6$$

$$\Rightarrow CN=9-6=3$$

③ $\triangle CMN$ - равноб.
 $\Rightarrow CK$ - биссектриса и медиана
 $\Rightarrow K$ - середина MN

б) ① $\triangle PMN$ - равноб., т.к. PK - высота и медиана

$$\Rightarrow \frac{AP}{PN} = \frac{AP}{PM}$$

② $\triangle ACM$:
 PC - биссектриса
 по т. о бисс.:
 $\frac{AP}{PM} = \frac{AC}{CM} = \frac{9}{3} = 3$

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполняется при всех x .

$$(x^2 + 2.05 \cdot x + 0.5^2) + 0.75$$

$$\frac{|x^2 + ax + 1|}{|(x + 0.5)^2 + 0.75|} < 3$$

Заметим, что $(x + 0.5)^2 + 0.75 > 0$ $\forall x$

$$\frac{|x^2 + ax + 1|}{(x + 0.5)^2 + 0.75} < 3 \quad | \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$|x^2 + ax + 1| < 3x^2 + 3x + 3$$

$$-3x^2 - 3x - 3 < x^2 + ax + 1 < 3x^2 + 3x + 3$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 3x + ax + 4 > 0 \\ 2x^2 + 3x - ax + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \mathcal{D}_1 < 0$$

$$\textcircled{2} \mathcal{D}_2 < 0$$

ОТВЕТ:

$$(-1; 5)$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2012

СВОЙСТВА МОДУЛЕЙ

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a|^2 = a^2$$

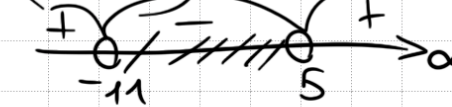
CFCADD

①

$$\mathcal{D}_1 < 0$$

$$(3+a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 < 0$$

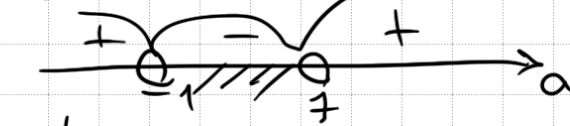
$$(3+a-8)(3+a+8) < 0$$



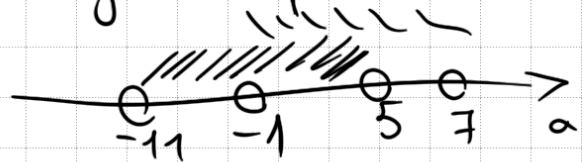
② $\mathcal{D}_2 < 0$

$$(3-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0$$

$$(3-a-4)(3-a+4) < 0$$



Найдем пересечение:



Максим должен был умножить двузначное число на трёхзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал трёхзначное число справа к двузначному, получив пятизначное число, которое оказалось в N раз (N – натуральное число) больше правильного результата.

- а) Могло ли N равняться 2?
 б) Могло ли N равняться 10?
 в) Каково наибольшее возможное значение N ?

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Семёнов 2015

08279D

а) Пусть x – двузначное число
 y – трёхзначное число

$$\frac{x \cdot 1000 + y}{x \cdot y} = 2$$

$$1000x + y = 2xy$$

$$1000x - 2xy = -y$$

$$x \cdot (1000 - 2y) = -y$$

$$x = \frac{y}{2y - 1000} = \frac{y}{2 \cdot (y - 500)}$$

если $y = 501$

$$\frac{504}{8} = 63$$

$$\frac{504}{8} = 63$$

ОТВЕТ:

а) Да

б) нет

в) 9

$$\frac{63504}{63 \cdot 504} = 2$$

$$\delta) \frac{1000x + y}{xy} = 10$$

$$1000x + y = 10xy \quad 10xy - y = 1000x$$

$$1000x - 10xy = -y$$

$$x \cdot (1000 - 10y) = -y$$

$$x = \frac{y}{10y - 1000}$$

$$x = \frac{y}{10 \cdot (y - 100)}$$

$$x = \frac{10xy - y}{1000}$$

$$x = \frac{y(10x - 1)}{1000}$$

y делится на 1000
 на y – трёхзначное

⇒ Ответ: б) нет

$$\beta) \frac{1000x + y}{x \cdot y} = N$$

$$\frac{1000}{y} + \frac{1}{x} = N$$

$$N_{\text{наиб}} = \frac{1000}{100} + \frac{1}{10} = 10,1$$

$$\Rightarrow N \leq 10,1$$

$$N = 10 \text{ не подходит (см н. д.)}$$

Проверим $N = 9$

$$1000x + y = 9xy$$

$$1000x - 9xy = -y$$

$$x \cdot (1000 - 9y) = -y$$

$$x = \frac{y}{9y - 1000}$$

Если $y = 112$, то $x = \frac{112}{8} = 14$

$$\frac{14 \cdot 112}{14 \cdot 112} = 9$$