1

Острые углы прямоугольного треугольника равны 84° и 6°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

F1150D

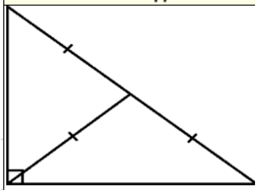
$\angle CMH = 90 - 6 - 6 = 78$

Ответ: 78

Источники:

FIPI (старый банк)
Основная волна 2021
Основная волна 2017
Основная волна (Резерв) 2013

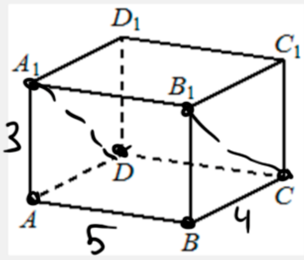
СВОЙСТВО МЕДИАНЫ



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 5$, $BC = 4$, $AA_1 = 3$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1.



32AF22

$V_{чск} = \frac{1}{2} V_{пар.} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 30$

Ответ: 30

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2017

3

В фирме такси в наличии 60 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на боках, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

33

D295A8

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2019

$$P = \frac{33}{60} = \frac{11}{20} = 0{,}55$$

Ответ: 0,55

4

Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Стартер» по очереди играет с командами «Протор», «Ротор» и «Мотор». Найдите вероятность того, что «Стартер» будет начинать только вторую и последнюю игры.

Источники:
Досрочная волна 2019

В В В П П П
В В П П П В
В П В П В П
В П П $\boxed{\text{П В В}}$

$$P = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Ответ: 0,125

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{28-2x}=2$. $|^2$

D6D480

$$28-2x=4$$
$$28-4=2x$$
$$24=2\cdot x$$
$$x=12$$

Источники:
- FIPI (старый банк)
- FIPI (новый банк)
- Демо 2021
- Демо 2020
- Досрочная волна 2019
- Основная волна 2018
- Основная волна 2017
- Основная волна 2014
- Досрочная волна 2013

Ответ: 12

6 Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{4\sqrt{41}}{41}$ и $\alpha\in\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

EF0CB

Источники:
- FIPI (старый банк)
- FIPI (новый банк)
- Основная волна 2017
- Основная волна 2013

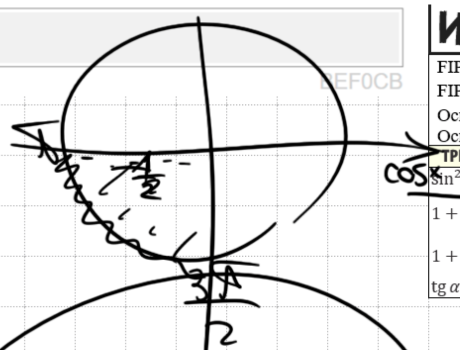
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$



① $\frac{16\cdot\cancel{41}}{41^{\cancel{2}}}+\cos^2\alpha=1$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1}^{(41}-\frac{16}{41}=\frac{25}{41}$$

$$\cos\alpha=+\frac{5}{\sqrt{41}}$$

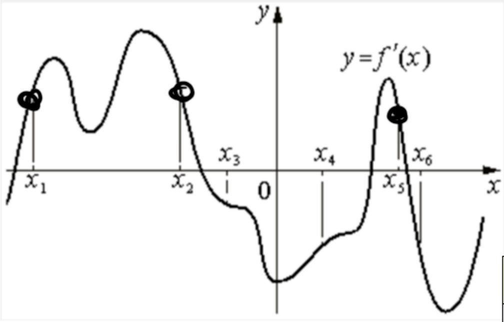
$$\cos\alpha=-\frac{5}{\sqrt{41}}$$

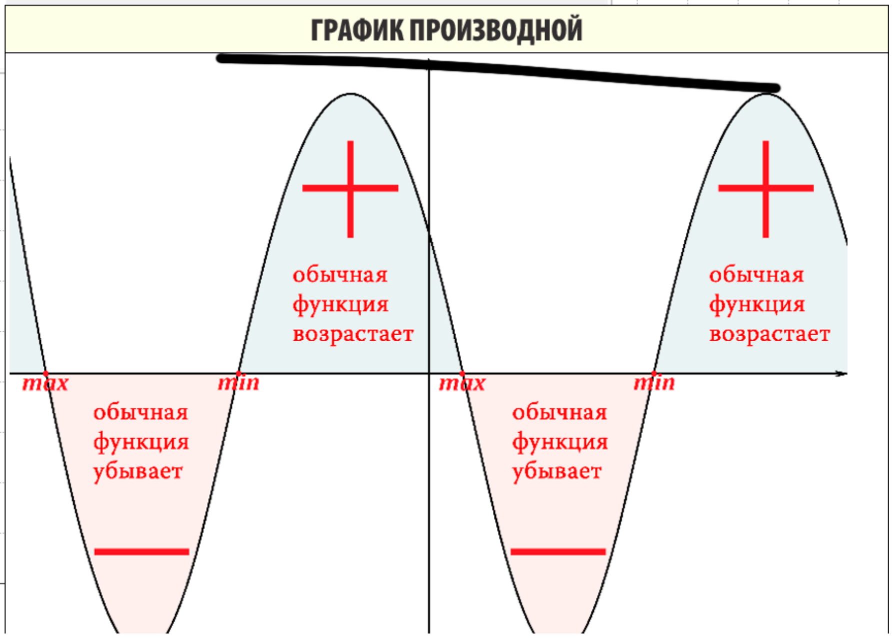
② $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{+\frac{4\sqrt{41}}{41}}{+\frac{5}{\sqrt{41}}}=\frac{4\sqrt{41}}{41}:\frac{5}{\sqrt{41}}=\frac{4\cancel{\sqrt{41}}}{\cancel{41}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{41}}}{5}=0{,}8$$

Ответ: 0,8

7

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$.
На оси абсцисс отмечены шесть точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.
Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?





Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017
Досрочная волна 2016
Основная волна 2014

Ответ: 3

8

Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, прошедшее после начала работы лебёдки, $\omega = 50$ град./мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4$ град./мин^2 — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Определите время, прошедшее после начала работы лебёдки, если известно, что за это время угол намотки φ достиг $2500°$. Ответ дайте в минутах.

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

$$2500 = 50 \cdot t + \frac{\cancel{4}^{2} \cdot t^2}{\cancel{2}} \quad \Big| :2$$

$$t^2 + 25t - 1250 = 0$$

$$t = 25 \qquad t = -50$$

Ответ: 25

9

Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

FD8828

Источники:
FIPI (старый банк)

Пусть m – % мужа
g – % жены
d – % дочери
} 100%

$$\begin{cases} m + g + d = 100 & (1)\\ 2m + g + d = 167 & (2)\\ m + g + \frac{1}{3}d = 96 & (3)\end{cases}$$

(2) − (1) : $m = 67$

(1) − (3) : $\frac{2}{3}d = 4$

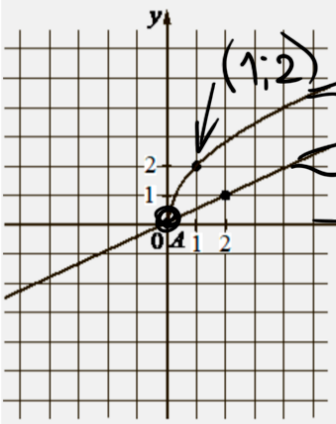
$d = 6$

$g = 100 - 67 - 6 = 27$

Ответ: 27

10

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



$2 = a \cdot \sqrt{1}$

$a = 2$

(1;2)

$y = 2\sqrt{x}$

$y = \frac{1}{2}x$

16

448E90

Источники:
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2022

$\frac{1}{2}x = 2\sqrt{x}$

$x - 4\sqrt{x} = 0$

Пусть $\sqrt{x} = t$

$t^2 - 4t = 0$

$t \cdot (t - 4) = 0$

$t = 0$, $\sqrt{x} = 0$, $x = 0$ $t = 4$, $\sqrt{x} = 4$ $\boxed{x = 16}$

Ответ: 16

11 Найдите наибольшее значение функции
$y = (x+10)^2 x + 7$ на отрезке $[-12; -6]$.

Источники:
FIPI (старый банк)

ПРОИЗВОДНЫЕ

$C' = 0$
$x' = 1$
$(Cx)' = C$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

① $y = (x^2 + 20x + 100) \cdot x + 7$
$y = x^3 + 20x^2 + 100x + 7$

② $y' = 3x^2 + 40x + 100 = 0$
$D = 1600 - 1200 = 400$
$x = \frac{-40 \pm 20}{6}$
$x = -10$ $\cancel{x = -\frac{10}{3}}$

③ $y(-10) = 7$
$y(-12) = -41$
$y(-6) = -89$

Ответ: 7

12 а) Решите уравнение
$$\log_5(2-x) = \log_{25} x^4.$$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8\right]$.

Источники:
Досрочная волна (Резерв) 2019
Основная волна 2014

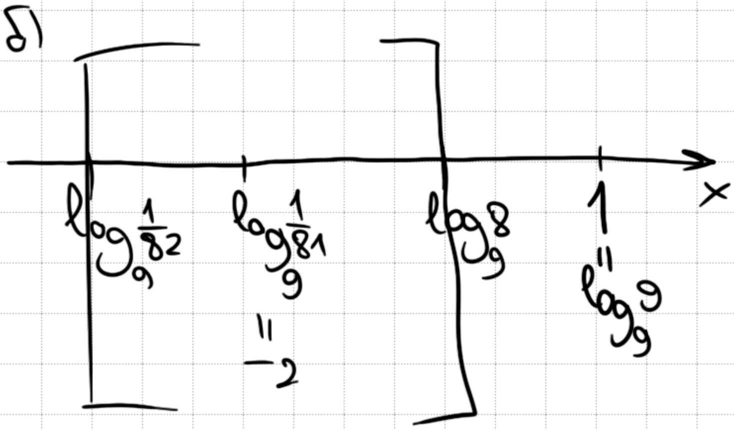
а) $\log_5(2-x) = \log_{5^2}(x^2)^2$

$\log_5(2-x) = \log_5 x^2$

$\begin{cases} 2-x = x^2 \\ 2-x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right. \\ x < 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Получаем $x = 1$
$x = -2$

б)



Получаем $-2 \in$
$-1 \notin$

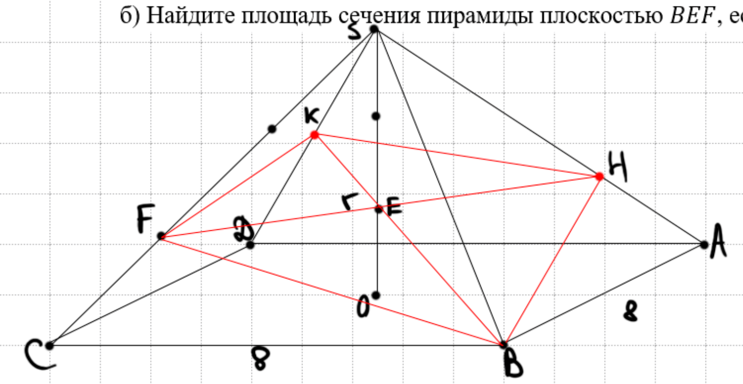
Ответ: а) $1, -2$
б) -2

13 Точка E лежит на высоте SO, а точка F — на боковом ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, причём $SE:EO = SF:FC = 2:1$.

а) Докажите, что плоскость BEF пересекает ребро SD в его середине.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BEF, если $AB = 8$, $SO = 14$.

Источники: Досрочная волна 2021



а) ① Построим сеч.

① BF

② BE

$BE \cap SD = K$

③ FE

$FE \cap AS = H$

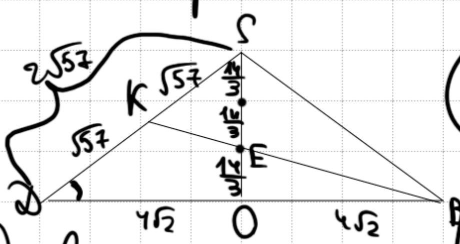
④ FK

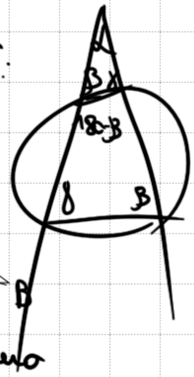
⑤ KH

⑥ BH

$FKHB$ — сечение

② Рассмотрим $\triangle BDS$.





SO — высота и медиана

$\Rightarrow E$ — точка пересечения медиан

$\Rightarrow BK$ — медиана

$\Rightarrow K$ — середина SD ■

б) ① $\triangle SEF \sim \triangle SOC$ по 2 пр.

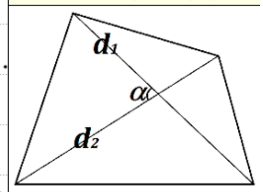
$\Rightarrow \angle SFE = \angle SCO$ (соотв.)

$\Rightarrow FE \parallel OC$

$\Rightarrow FH \parallel AC$

$FH = \frac{2}{3} \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot 8\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК



$S = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha}{2}$

② BK — наклонная

BD — проекция

$BD \perp AC \Rightarrow BD \perp FH$

$\Rightarrow BK \perp FH$ по ТТП

Ответ: $\frac{88\sqrt{2}}{3}$

③ $\cos\angle SDB = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{57}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{57}}$

$BK = \sqrt{(\sqrt{57})^2 + (8\sqrt{2})^2 - 2\cancel{\sqrt{57}} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{57}}}} = 11$

$S = \frac{11 \cdot \frac{16\sqrt{2}}{3}}{2} \cdot 1 = \frac{88\sqrt{2}}{3}$

14 Решите неравенство $(x+0{,}5)^2+0{,}75$

$$\log_{11}(8x^2+7)-\log_{11}(x^2+x+1)\geq\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right).$$

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2022
Демо 2021
Демо 2020
Демо 2019
Основная волна 2018

Заметим, что $8x^2+7$ и $x^2+x+1>0$ при любых x

$$\log_{11}\frac{8x^2+7}{x^2+x+1}\geq\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right)$$

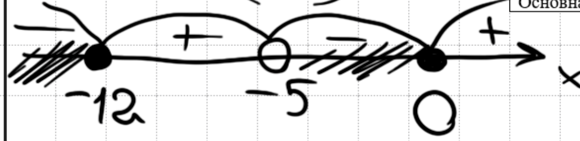
$$\begin{cases} ① \ \dfrac{8x^2+7}{x^2+x+1}\geq\dfrac{x}{x+5}+\dfrac{7}{1}^{\,(x+5} \\ ② \ \dfrac{x}{x+5}+7>0 \end{cases}$$

$$① \ \frac{8x^2+7}{x^2+x+1}^{\,(x+5)}\geq\frac{8x+35}{x+5}^{\,(x^2+x+1}$$

$$\frac{\cancel{8x^3}+40x^2+7x+\cancel{35}-\cancel{8x^3}-8x^2-8x-35x^2-35x-\cancel{35}}{(x^2+x+1)(x+5)}\geq 0$$

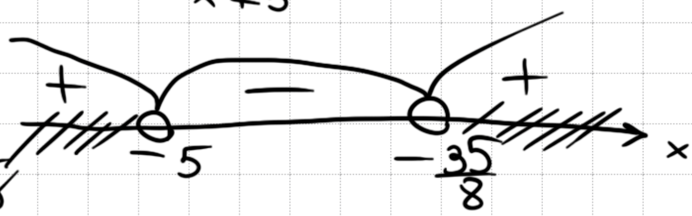
$$\frac{-3x^2-36x}{(x^2+x+1)(x+5)}\geq 0 \quad \Big| :(-3)$$

$$\frac{x^2+12x}{(x^2+x+1)(x+5)}\leq 0$$

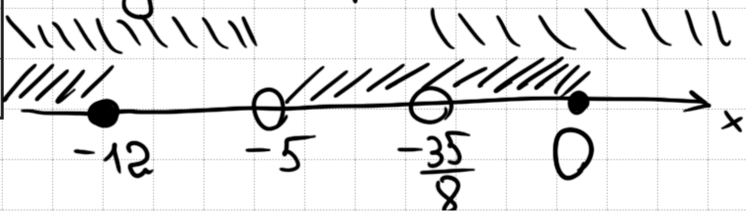


$$② \ \frac{x}{x+5}+\frac{7}{1}^{\,(x+5}>0$$

$$\frac{8x+35}{x+5}>0$$



Найдём пересечение:



Ответ: $\left(-\infty;-12\right]\cup\left(-\frac{35}{8};0\right]$

15

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

DEF632

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2020
СтатГрад 27.01.2022
СтатГрад 29.01.2020
Досрочная волна 2019
СтатГрад 24.01.2019
СтатГрад 26.01.2017
Досрочная волна (Резерв) 2017
Основная волна 2016

Пусть март – месяц платежа

Дата	Сумма долга	
и 16	S	
я 17	$1{,}25S$	
м 17	$\Rightarrow$ было выплачено	$0{,}55S$
и 17	$0{,}7S$	
я 18	$0{,}7S\cdot 1{,}25=0{,}875S$	
м 18	$\Rightarrow$ Б.В.	$0{,}475S$
и 18	$0{,}4S$	
я 19	$0{,}4S\cdot 1{,}25=0{,}5S$	
м 19	$\Rightarrow$ Б.В	$0{,}5S$
и 19	0	

$$\begin{cases} \dfrac{55}{100}\cdot S>5 & \Big|:\dfrac{55}{100} \\ \dfrac{475}{1000}\cdot S>5 & \Big|:\dfrac{475}{1000} \\ \dfrac{5}{10}\cdot S>5 & \Big|:\dfrac{5}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S>\dfrac{\cancel{5}\cdot 100}{\cancel{55}\,11} \\ S>\dfrac{\cancel{5}\cdot\cancel{1000}\,200}{\cancel{475}\,95\,19} \\ S>\dfrac{\cancel{5}\cdot 10}{\cancel{5}} \end{cases}$$

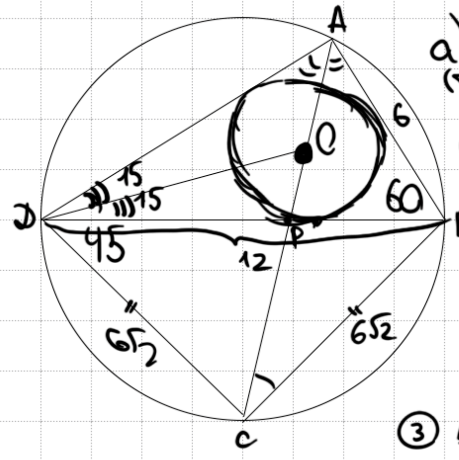
$$\begin{cases} S>9\frac{1}{11} \\ S>10\frac{10}{19} \\ S>10 \end{cases} \Rightarrow S_{\text{наим. цел}}=11$$

Ответ: 11

16 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB:BC = AP:PD$.
б) Найдите площадь треугольника COD, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018
Основная волна 2015



а) ① $\angle ADB = \angle ACB$ (т.к. опирается на $\smile AB$)

② $\smile CD = \smile BC$ (т.к. равные хорды стягивают равные дуги)

$\Rightarrow \angle DAC = \angle BAC$ (т.к. опир. на равные дуги)

③ $\triangle ABC \sim \triangle APD$ по 2 углам

$\left| \begin{array}{l} \angle DAC = \angle BAC \\ \angle ADB = \angle ACB \end{array} \right)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AP} = \dfrac{BC}{PD}$ $\quad \Big| :BC \quad \cdot AP$

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AP}{PD}$ ■

Ответ: $18\sqrt{3}$

б) ① AP – биссектриса $\triangle ABD$

$\Rightarrow O$ лежит на AP

② $BD = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2} = 12$

③ $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ – прямоуг. (опир. на диаметр)

④ $\triangle ABD$:
$\angle ADB = 30^\circ$
$\angle ABD = 60^\circ$

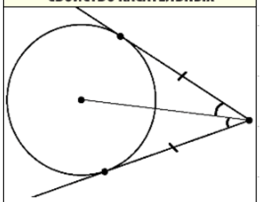
⑤ $\underset{\angle ODP + \angle CDP}{\angle ODC = 15 + 45} = 60^\circ$

$\angle DCO = 60^\circ = \angle ABD$

$\Rightarrow \triangle COD$ – равносторонний

$S = \dfrac{\sqrt{3}\cdot(6\sqrt{2})^2}{4} = 18\sqrt{3}$

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ



Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a+7)^2 = |x-7-a| + |x+a+7|$$

имеет единственный корень.

$x^2 + (a+7)^2 - |x-7-a| - |x+a+7| = 0$

$f(x) = x^2 + (a+7)^2 - |x-7-a| - |x+a+7|$

$f(-x) = (-x)^2 + (a+7)^2 - |-x-7-a| - |-x+a+7|$

$= x^2 + (a+7)^2 - |x+7+a| - |x-a-7|$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ ф-ция $f(x)$ - чётная

Единственный корень чётная ф-ция может иметь только если этот единств. корень $x=0$

Найдём, при каких a $x=0$ будет являться корнем ур-я.

$0^2 + (a+7)^2 = |0-7-a| + |0+a+7|$

$(a+7)^2 = |a+7| + |a+7|$

$|a+7|^2 - 2|a+7| = 0$

Ответ: $-5\ ;\ -9$

Если $a=-7$, то

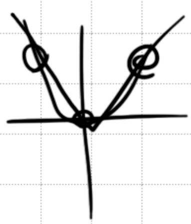
$x^2 = 2|x|$

$|x|^2 - 2|x| = 0$

$|x| \cdot (|x| - 2) = 0$

$x=0 \qquad x=2 \qquad x=-2$

$\Rightarrow$ при $a=-7$ будет 3 корня



Если $a=-9$, то

$x^2+4 = |x+2| + |x-2|$

$x=0$

$|a+7| \cdot (|a+7| - 2) = 0$

$|a+7| = 0 \qquad |a+7| = 2$

$a=-7 \qquad a=-5 \qquad a=-9$

Проверим, при каких этих a будет единств. корень

Если $a=-5$, то

$x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$

		-2		2	
$\lvert x-2\rvert$	$-$		$-$		$+$
$\lvert x+2\rvert$	$-$		$+$		$+$

Если $x<-2$, то $x^2+4 = -x+2-x-2$

$x^2+2x+4=0$

$\varnothing$

Если $-2 \le x \le 2$, то $x^2+4 = -x+2+x+2$

$x=0$

Если $x>2$, то $x^2+4 = x-2+x+2$

$x^2-2x+4=0$

$\varnothing$

$\Rightarrow$ при $a=-5$ будет единств. корень $x=0$

18

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

5408D9

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018
Семёнов 2015
Основная волна 2012

В театре число мальчиков $\leq \frac{2}{11}$ посетивших театр
В кино число мальчиков $\leq \frac{2}{5}$ посетивших кино

Нужно максимизировать количество девочек в театре и в кино

а) В группе 9 мальчиков 11 девочек
Пусть все мальчики ходят на 1 мероприятие
все девочки ходят на оба

Если 4 мальчика в театре $\frac{4}{15} > \frac{2}{11}$
Если 3 мальчика в театре $\frac{3}{14} > \frac{2}{11}$

Если 2 мальчика в театре $\frac{2}{13} < \frac{2}{11}$
$\Rightarrow$ Мальчиков в театре ≤ 2

Если 7 мальчиков в кино $\frac{7}{18} < \frac{2}{5}$
$\Rightarrow$ Мальчиков в кино ≤ 7

Ответ: а) да, если 2 в театре и 7 в кино

б) 9 точно могло быть (см. а)
Пусть было 10 мал. и 10 дев.

Если 3 мал. в театре $\frac{3}{13} > \frac{2}{11}$
2 мал. в театре $\frac{2}{12} < \frac{2}{11}$
$\Rightarrow$ мальчиков в театре ≤ 2

Если 8 мал в кино $\frac{8}{18} > \frac{2}{5}$
7 мал в кино $\frac{7}{17} > \frac{2}{5}$
6 мал. в кино $\frac{6}{16} > \frac{2}{5}$
$\Rightarrow$ мальчиков в кино ≤ 6
$\Rightarrow$ 10 и более мальчиков быть не могло

ОТВЕТ:	а) да
	б) 9
	в) $\frac{9}{17}$

в) $\left(\frac{d}{m_т + m_к + d}\right)_{наим.}$ — ? $\quad | : d$

$$\left(\frac{1}{\frac{m_т}{d} + \frac{m_к}{d} + 1}\right)_{наим}$$

Найдём наибольшие значения $\frac{m_т}{d}$ и $\frac{m_к}{d}$

$$\frac{m_т}{m_т + d} \leq \frac{2}{11} \quad \Big| \cdot 11(m_т + d)$$

$11 m_т \leq 2 m_т + 2d$

$9 m_т \leq 2d \quad | : 9d$

$\frac{m_т}{d} \leq \frac{2}{9}$

$$\frac{m_к}{m_к + d} \leq \frac{2}{5} \quad \Big| \cdot 5(m_к + d)$$

$5 m_к \leq 2 m_к + 2d$

$3 m_к \leq 2d \quad | : 3d$

$\frac{m_к}{d} \leq \frac{2}{3}$

ПОЛУЧАЕМ:

$$\frac{1}{\frac{2}{9} + \frac{2}{3} + 1} = \frac{1}{\frac{17}{9}} = \frac{9}{17}$$

Пример: $M_т = 2$
$M_к = 6$
$d = 9$