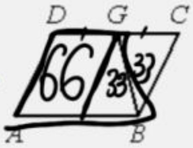
1

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 132. Точка G — середина стороны CD.



Найдите площадь трапеции $ABGD$.

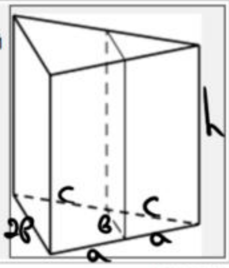
2695F1

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017
Основная волна (Резерв) 2013

Ответ: 99

2

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 37. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



AB1F5D

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Досрочная волна 2015

$S_{бок.пов.\,мал} = ah + вh + ch = 37$

$S_{бок.пов.\,бол.} = 2ah + 2в\cdot h + 2c\cdot h = 2 \cdot 37 = 74$

Ответ: 74

3

Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 70 выступлений — по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 28 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

e5D1Ae

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2018
Пробный ЕГЭ 2015

$$\left.\begin{array}{l} ①\ 28 \\ ②\ 21 \\ ③\ 21 \end{array}\right\} 70$$

$$P = \frac{21}{70} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Ответ: 0,3

4

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Биолог» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Биолог» начнёт игру с мячом все три раза.

A203F4

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2019
Досрочная волна 2017

$\boxed{\text{В В В}}$	П П П
В В П	П П В
В П В	П В П
В П П	П В В

$$P = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Ответ: 0,125

5 Найдите корень уравнения $\log_2(7-x)=5$.

5CD57D

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2021
Демо 2020
Досрочная волна 2016
Основная волна 2013

$32 = 7 - x$

$x = 7 - 32$

$x = -25$

Ответ: -25

6 Найдите
$\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

Источники:
Демо 2021
Демо 2020
Демо 2019
Демо 2018
Демо 2017
Демо 2016
Демо 2015

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

① $\sin^2\alpha + 0{,}36 = 1$

$\sin^2\alpha = 0{,}64$

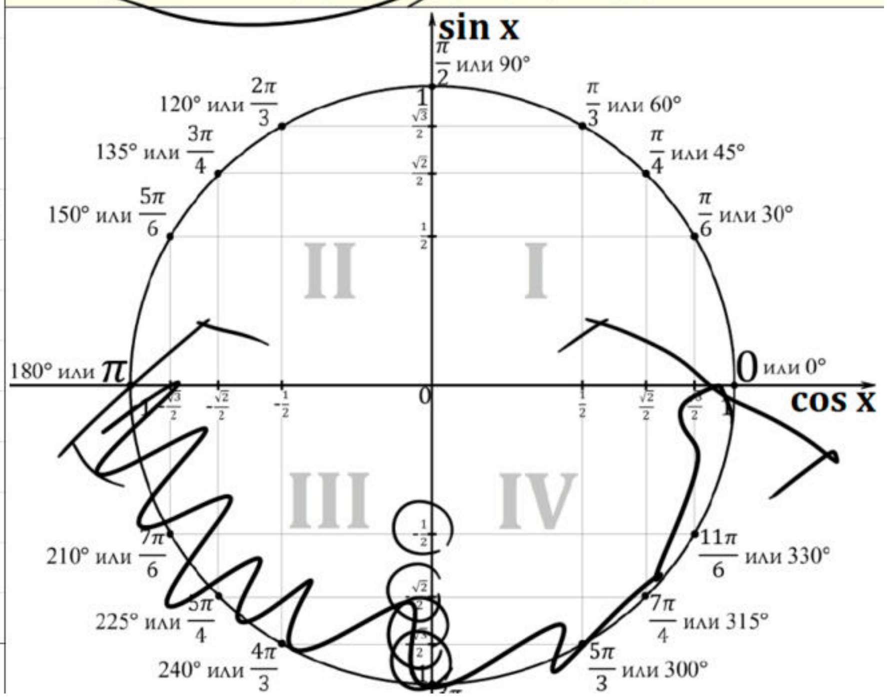
$\sin\alpha = 0{,}8$

$\sin\alpha = -0{,}8$

② $\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$= 2\cdot(-0{,}8)\cdot 0{,}6 = -0{,}96$

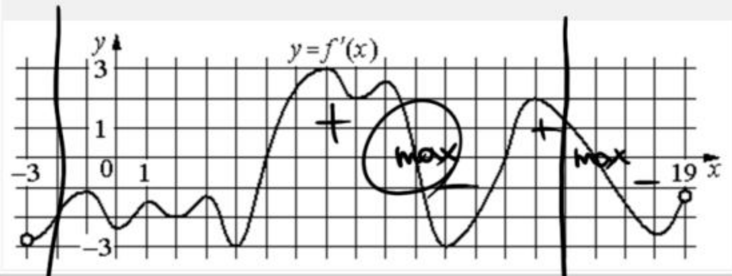
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ



Ответ: $-0{,}96$

7

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3\,;\,19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2\,;\,15]$.



25CE62

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2021
Основная волна 2018
Основная волна 2017

Ответ: 1

8

Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1300$ К, $a = -\frac{14}{3}$ К/мин^2, $b = 98$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1720 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

F88F7B

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

$T \le 1720$

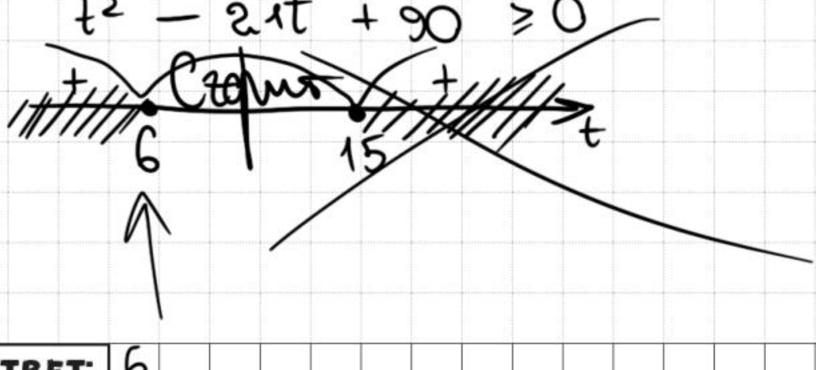
$T_0 + bt + at^2 \le 1720$

$1300 + 98t - \frac{14}{3}t^2 - 1720 \le 0$

$-\frac{14}{3}t^2 + 98t - 420 \le 0 \quad | \cdot (-3)$

$14t^2 - 294t + 420 \cdot 3 \ge 0 \quad | : 14$

$t^2 - 21t + 90 \ge 0$



Ответ: 6

9 Два велосипедиста одновременно отправились в 140-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Источники:
FIPI (новый банк)
Основная волна 2019
Основная волна 2018

$\overrightarrow{I}$ $\vartheta = x$, $t = \frac{140}{x}$, $S = 140$

A — B

$\overrightarrow{II}$ $\vartheta = x - 4$, $t = \frac{140}{x-4}$, $S = 140$

$t_{медл} - t_{быстр} = 4$

$\frac{140}{x-4} - \frac{140}{x} = 4$

$\frac{\cancel{140x} - \cancel{140x} + 140 \cdot \cancel{4}}{x^2 - 4x} = \cancel{4}\ 1$

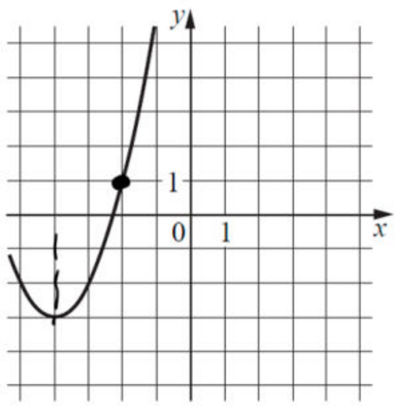
$x^2 - 4x - 140 = 0$

$x = 14 \qquad x = -10$

Ответ: 14

10 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение $f(-12)$.

Источники:
Демо 2022



① $a = 1$

② $x_0 = \frac{-b}{2a}$ $\qquad -4 = \frac{-b}{2 \cdot 1}$ $\qquad b = 8$

$y = 1 \cdot x^2 + 8x + c$

③ $(-2; 1)$

$1 = 1 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + c$

$c = 13$

$y = 1 \cdot x^2 + 8x + 13$

④ $f(-12) = 144 - 96 + 13 = 61$

Ответ: 61

11

Найдите наибольшее значение функции

$$y = 10\sin x - \frac{36x}{\pi} + 7$$

на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6};\, 0\right]$.

79CEAC

① $y' = 10\cos x - \frac{36}{\pi} = 0$

$\cos x = \frac{36}{10\pi} \approx \frac{36}{31{,}4} > 1$ $\varnothing$

② $y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 10 \cdot \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{36}{\pi} \cdot \left(-\frac{5\pi}{6}\right) + 7$ $= -5 + 30 + 7 = 32$

$y(0) = 7$

Ответ: 32

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2017
Пробный ЕГЭ 2015

ПРОИЗВОДНЫЕ

$C' = 0$
$x' = 1$
$(Cx)' = C$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

12

а) Решите уравнение

$$(49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2}\cos x}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\, 4\pi\right]$.

а) $\left(\left(7^2\right)^{\cos x}\right)^{\sin x} = 7^{\sqrt{2}\cos x}$

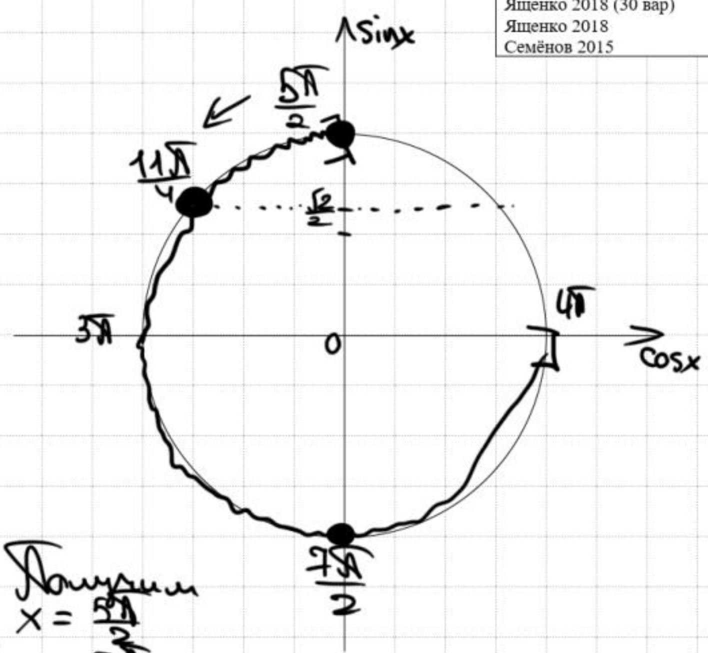
$7^{2\cos x \cdot \sin x} = 7^{\sqrt{2}\cos x}$

$2\cos x \cdot \sin x - \sqrt{2}\cos x = 0$
$\cos x \cdot (2\sin x - \sqrt{2}) = 0$

$\cos x = 0$
$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$2\sin x - \sqrt{2} = 0$
$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$
$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

б) Отберём корни с помощью окр.



Получим
$x = \frac{5\pi}{2}$
$x = \frac{7\pi}{2}$
$x = 3\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
б) $\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{11\pi}{4}$

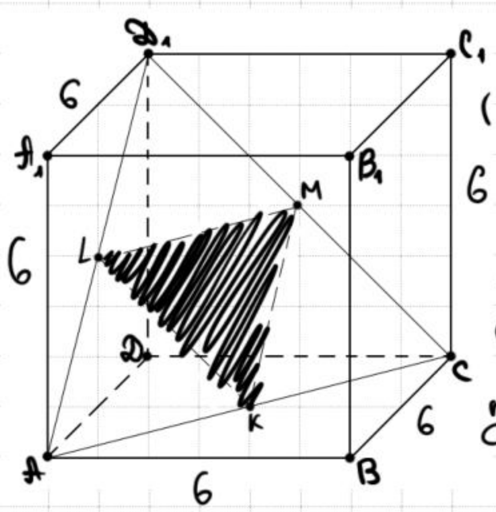
Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2013
Ященко 2022 (50 вар)
Ященко 2021 (10 вар)
Ященко 2020 (10 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2019 (14 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018
Семёнов 2015

13 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Точки K, L и M − центры граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D соответственно.

Источники: Основная волна 2017

а) Докажите, что B_1KLM − правильная пирамида.
б) Найдите объём B_1KLM.



а) ① $\triangle ACD_1$ − равносторонний ($AD_1 = CD_1 = AC$ как диагонали равных квадратов)

$\triangle LKM$ − равност. (т.к. LM, LK и KM − ср. линии, равные половинам сторон $\triangle ACD_1$)

② Рассмотрим B_1ACD_1 − правильная пирамида

$B_1L = B_1M = B_1K$ − апофемы в равных треугольниках

$\Rightarrow B_1KLM$ − правильная пирамида

б) ① $V_{куба} = 6^3 = 216$

② $V_{D_1ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot 6 = 36$

$V_{B_1ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot 6 = 36$

$V_{B_1CC_1D_1} = 36$

$V_{D_1AA_1B_1} = 36$

③ $V_{B_1ACD_1} = 216 - 4 \cdot 36 = 72$

④ $V_{B_1KLM} = \frac{1}{4} V_{B_1ACD_1} = \frac{1}{4} \cdot 72 = 18$

(т.к. $S_{KLM} = \frac{1}{4} S_{ACD_1}$)

Ответ: 18

14 Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_3 x + 4} + \frac{2}{\log_3(3x)} \cdot \left(\frac{2}{\log_3 x + 4} - 1\right) \le 0.$$

Источники: Досрочная волна 2021

$$\frac{1}{\log_3 x + 4} + \frac{2}{\log_3 3 + \log_3 x} \cdot \left(\frac{2}{\log_3 x + 4} - 1\right) \le 0$$

Пусть $\log_3 x = t$

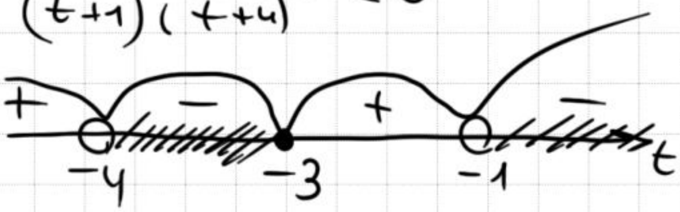
$$\frac{1}{t+4} + \frac{2}{t+1} \cdot \left(\frac{2}{t+4} - 1^{(t+4}\right) \le 0$$

$$\frac{1}{t+4} + \frac{2}{t+1} \cdot \frac{2 - t - 4}{t+4} \le 0$$

$$\frac{1^{(t+1}}{t+4} + \frac{-2t-4}{(t+1)(t+4)} \le 0$$

$$\frac{t+1-2t-4}{(t+1)(t+4)} \le 0$$

$$\frac{-t-3}{(t+1)(t+4)} \le 0$$



$$\left[\begin{array}{l} -4 < t \le -3 \\ t > -1 \end{array}\right.$$

$\log_3 \frac{1}{81} < \log_3 x \le \log_3 \frac{1}{27}$ $\qquad$ $\log_3 x > \log_3 \frac{1}{3}$

$\frac{1}{81} < x \le \frac{1}{27}$ $\qquad$ $x > \frac{1}{3}$

Ответ: $\left(\frac{1}{81}; \frac{1}{27}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

15

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2019
Основная волна 2017
Материалы для экспертов ЕГЭ

Пусть n – срок кредита
март – месяц платежа

Дата	Сумма долга
и	28
1 я	$28 \cdot 1{,}25 = 35$ млн
м	$\Rightarrow$ б.в. $7 + \frac{28}{n}$
и	$28 - \frac{28}{n}$
2 я	$35 - \frac{35}{n}$
м	$\Rightarrow$ б.в. $7 + \frac{21}{n}$
и	$28 - 2 \cdot \frac{28}{n}$
3 я	$35 - \frac{70}{n}$
м	$\Rightarrow$ б.в. $7 + \frac{14}{n}$
и	$28 - 3 \cdot \frac{28}{n}$
…	
Ответ:	80,5 млн

n-й год:
и: $\frac{28}{n}$
я: $\frac{35}{n}$
м: $\Rightarrow$ б.в. $\frac{35}{n}$
и: 0

Выплаты обр. убыв. арифм. прогрессию

$7 + \frac{28}{n}$ – наиб. платёж

$$7 + \frac{28}{n} = 9$$

$$n = 14$$

$$\text{О.С.В.} = \frac{7 + \frac{28}{n} + \frac{35}{n}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{14}^{\,7}$$

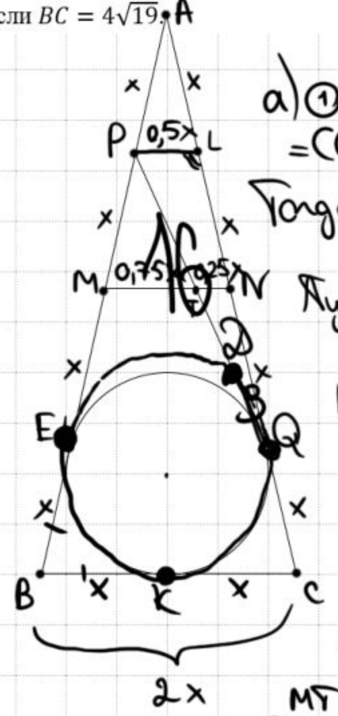
$$49 + \frac{63}{\cancel{14}} \cdot \frac{\cancel{7}}{2} = 80{,}5 \text{ млн}$$

16

Боковые стороны AB и AC равнобедренного треугольника ABC вдвое больше основания BC. На боковых сторонах AB и AC отложены отрезки AP и CQ соответственно, равные четверти этих сторон.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная его основанию, делится прямой PQ в отношении 1:3.

б) Найдите длину отрезка прямой PQ, заключенного внутри вписанной окружности треугольника ABC, если $BC = 4\sqrt{19}$.



а) ① Пусть $AP = PM = CQ = NQ$

Тогда $AB = 4x$

$BC = 2x$

Пусть MN – ср. линия

$MN = x$

PL – ср. линия $\triangle AMN$

$PL = \frac{1}{2} MN = 0{,}5x$

TN – ср. линия $\triangle PLQ$

$TN = \frac{1}{2} PL = 0{,}25x$

$\Rightarrow MT = x - 0{,}25x = 0{,}75x$

$\frac{MT}{TN} = \frac{3}{1}$ ■

Ответ: 3

$DQ = 19 - 16$

б) DQ – ?

① $BC = 2x = 4\sqrt{19}$

$x = 2\sqrt{19}$

② Вписанная окр-ть касается BC $\triangle ABC$ в середине, т.е. в точке K

$CQ = KC = x$

$BK = BE = x$

E и Q – точки касания

③ по т. о кас. и сек.

$\boxed{PE^2 = PD \cdot PQ}$ $(4\sqrt{19})^2 = PD \cdot 19$

$PD = 16$

④ $\cos\angle ALP = \frac{0{,}25x}{x} = \frac{1}{4}$

$\cos\angle PLQ = -\frac{1}{4}$

⑤ по т. cos в $\triangle PLQ$:

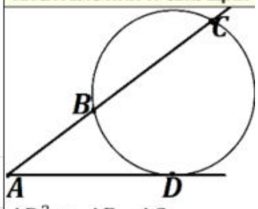
$PQ = \sqrt{0{,}25x^2 + (2x)^2 + 2 \cdot 0{,}5x \cdot 2x \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{4{,}75}\,x$

$\sqrt{\frac{19}{2}} \cdot 2\sqrt{19} = 19$

Источники:

Основная волна 2018

КАСАТЕЛЬНАЯ И СЕКУЩАЯ



$AD^2 = AB \cdot AC$

17 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(x+\frac{1}{x-a}\right)^2-(a+9)\left(x+\frac{1}{x-a}\right)+2a(9-a)=0$$

имеет ровно 4 решения.

Источники: Основная волна (Резерв) 2014

Пусть $\left(x+\frac{1}{x-a}\right)=t$

$t^2-(a+9)\cdot t+2a\cdot(9-a)=0$

$\begin{cases} t_1+t_2=a+9=2a+9-a \\ t_1\cdot t_2=2a\cdot(9-a) \end{cases}$

$t_1=2a \qquad t_2=9-a$

$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{1}^{\backslash x-a}+\frac{1}{x-a}=\frac{2a}{1}^{\backslash x-a} \\ \frac{x}{1}^{\backslash x-a}+\frac{1}{x-a}=\frac{9-a}{1}^{\backslash x-a} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2-3ax+2a^2+1}{x-a}=0 \\ \frac{x^2-9x-a^2+9a+1}{x-a}=0 \end{array}\right.$

$\boxed{1\ \text{случай}}$ когда два уравнения сводятся к одному

$2a=9-a$

$3a=9$

$a=3$

При $a=3$ $\quad \frac{x^2-9x+19}{x-3}=0$

Это ур-е имеет два корня

$\Rightarrow a\neq 3$

$\boxed{2\ \text{случай}}$ у нас два разных ур-я

$\begin{cases} ① \ D_1>0 \\ ② \ D_2>0 \\ \cancel{a^2}-\cancel{3a^2}+\cancel{2a^2}+1\neq 0 \\ \cancel{a^2}-\cancel{9a}-\cancel{a^2}+\cancel{9a}+1\neq 0 \end{cases}$

ОТВЕТ: $(-\infty;-2)\cup(2;3)\cup(3;3,5)\cup(5,5;+\infty)$.

① $D_1>0$

$(-3a)^2-4\cdot 1\cdot(2a^2+1)>0$

$a^2-4>0$

$+\quad -2 \quad - \quad 2 \quad +$ $\;a$

② $D_2>0$

$81-4\cdot(-a^2+9a+1)>0$

$4a^2-36a+77>0$

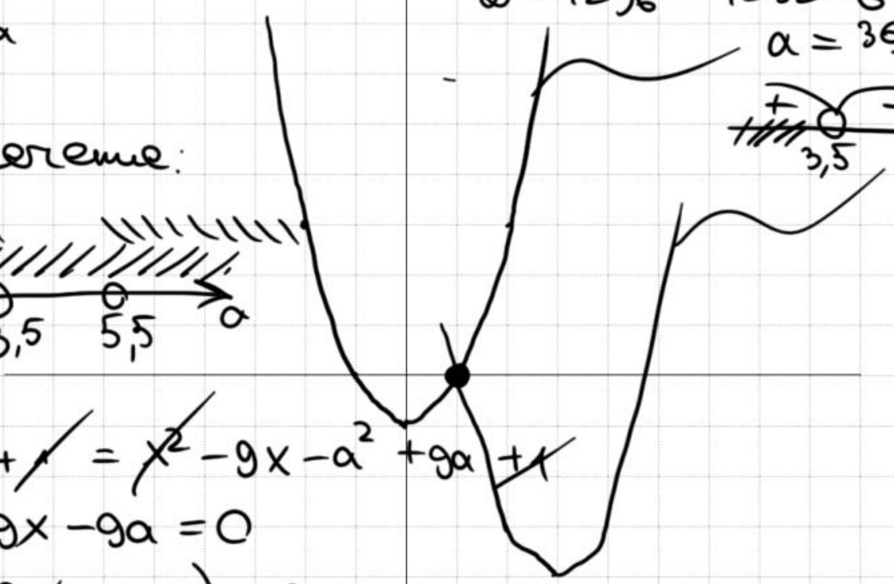
$D=1296-1232=64$

$a=\frac{36\pm 8}{8}$

$+\quad 3,5 \quad - \quad 5,5 \quad +$ $\;a$

Найдём пересечение:

$-2 \quad 2 \quad 3 \quad 3,5 \quad 5,5$ $\;a$



$\cancel{x^2}-3ax+2a^2+\cancel{1}=\cancel{x^2}-9x-a^2+9a+\cancel{1}$

$3a^2-3ax+9x-9a=0$

$a\cdot(a-x)-3\cdot(a-x)=0$

$(a-3)(a-x)=0$

$a=3$

$a=x$

18 На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.
б) Можно ли сделать 10 ходов?
в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ 6 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~ 13 14 15 16 ~~17~~ ~~18~~ ~~19~~ ~~20~~ ~~21~~ 22 23 24 25 26 27 28 29 30

а)

34	1	12	21
33	2	11	20
32	3	10	19
31	4	9	18
30	5	8	17

б) За 10 ходов будет стёрто все, т.е. $\frac{1+30}{2}\cdot 30 = 465$

За 10 ходов стёртые тройки могут быть $\underbrace{34 \quad 33 \quad 32 \quad 31 \quad \ldots \quad 25}_{\text{max возможные тройки}}$

$\frac{34+25}{2}\cdot 10 = 295$

$\Rightarrow$ Стёрли 295 (или меньше), а должны были стереть 465, получаем противоречие.

в) Сделаем 6 ход 6 7 13

Можно ли сделать 7 ходов?

① $\underbrace{34 \quad 33 \quad 32 \quad 31 \quad 30 \quad 29 \quad 28}_{\text{max возможные тройки за 7 ходов}}$

$\frac{34+28}{2}\cdot 7 = 217$

$\Rightarrow$ Стёртые 7 троек ≤ 217

② Стёрто 21 число

$\underbrace{1 \; 2 \; 3 \; 4 \; 5 \; 6 \; 7 \; 8 \; 9 \; 10 \; 11 \; 12 \; 13 \; 14 \; 15 \; 16 \; 17 \; 18 \; 19 \; 20 \; 21}_{\text{min возможные стёртые числа}}$

$\frac{1+21}{2}\cdot 21 = 231$

$\Rightarrow$ Стёртые 7 троек ≥ 231

Получаем
$231 \leq$ стёртые 7 троек ≤ 217
что невозможно, т.е. 7 и более ходов быть не может

Ответ:
а) Привели
б) нет
в) 6