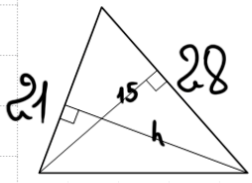
1

Две стороны треугольника равны 21 и 28. Высота, опущенная на большую из этих сторон, равна 15. Найдите высоту, опущенную на меньшую из этих сторон треугольника.



① $S_\Delta = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 28 \cdot 15 = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 21 \cdot h$

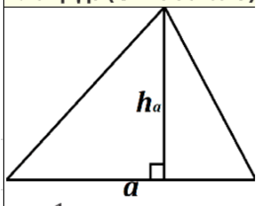
$h = \frac{\cancel{28}^{4} \cdot \cancel{15}^{5}}{\cancel{21}_{3}} = 20$

Ответ: 20

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017
Досрочная волна 2016

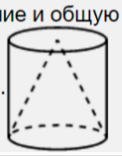
ПЛОЩАДЬ (ЧЕРЕЗ ВЫСОТУ)



$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

2

Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 57.



267D7F

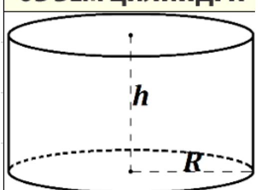
$57 \cdot 3 = 171$

Ответ: 171

Источники:

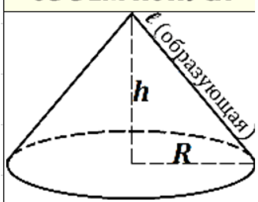
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2021
Основная волна 2019
Основная волна 2017
Основная волна (Резерв) 2013

ОБЪЁМ ЦИЛИНДРА



$V = \pi R^2 h$

ОБЪЁМ КОНУСА



$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

3

На конференцию приехали 2 учёных из Дании, 7 из Польши и 3 из Венгрии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвёртым окажется доклад учёного из Венгрии.

60E929

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2022
Основная волна 2018
Основная волна 2017

$$P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Ответ: 0,25

4

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

346547

Источники:
FIPI (старый банк)

I автомат	II автомат	
ост	ост	?
ост	зак	0,07
зак	ост	0,07
зак	зак	0,03

$\left.\begin{matrix}0{,}07\\0{,}03\end{matrix}\right\} 0{,}10$ $\quad$ $\left.\right\} 1$

$$1 - 0{,}03 - 0{,}07 - 0{,}07 = 0{,}83$$

Ответ: 0,83

5 Найдите корень уравнения $\log_7(1-x)=\log_7 5$.

586EF2

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2020
Досрочная волна 2017

$1-x=5$

$1-5=x$

Ответ: -4

6 Найдите значение выражения
$5\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{8}\cdot\cos\frac{7\pi}{8}$.

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2021
Пробный ЕГЭ 2018
Основная волна 2014

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$2{,}5\sqrt{2}\cdot\boxed{2\sin\frac{7\pi}{8}\cdot\cos\frac{7\pi}{8}}$

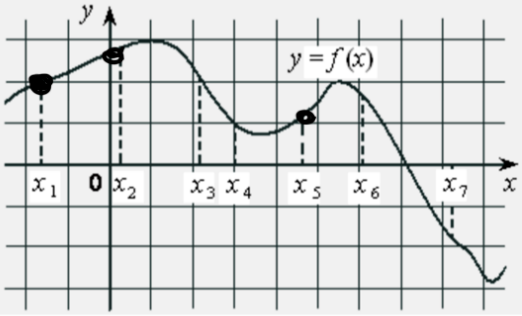
$2{,}5\sqrt{2}\cdot\sin\frac{7\pi}{4}$

$2{,}5\cancel{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\right)=-2{,}5$

Ответ: $-2{,}5$

7

На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



DFA6D7

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

Ответ: 3

8

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды, $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды, а T — температура. Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{625} \cdot 10^{21}$ м^2, а мощность её излучения равна $5{,}7 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в градусах Кельвина.

047BBF

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2019
Досрочная волна 2014

$$T^4 = \frac{P}{\sigma \cdot S} = \frac{\cancel{5{,}7} \cdot 10^{25}}{\cancel{5{,}7} \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{625} \cdot 10^{21}}$$

$$= \frac{625 \cdot 10^{25}}{10^{13}} = 625 \cdot 10^{12}$$

$$T^4 = 5^4 \cdot 10^{12} \quad \Big| \ ^{\frac{1}{4}}$$

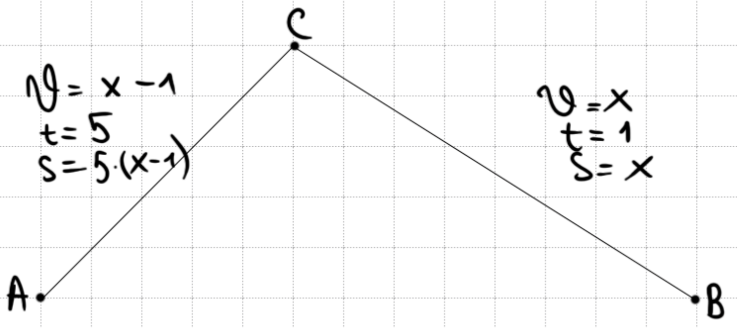
$$T = 5 \cdot 10^3 = 5000$$

Ответ: 5000

9

Дорога между пунктами А и В состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 25 км. Путь из А в В занял у туриста 6 часов, из которых 1 час ушёл на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Источники:
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2014
Пробный ЕГЭ 2014



$S_{AC} + S_{CB} = 25$

$5\cdot(x-1) + x\cdot 1 = 25$

$5x - 5 + x = 25$

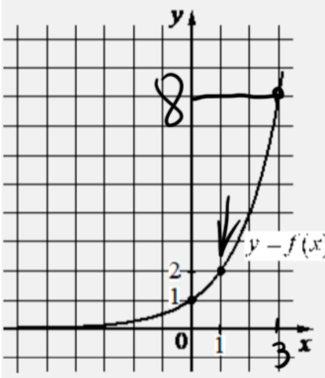
$6x = 30$

$x = 5$

Ответ: 5

10

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(3)$.



EC397F

① $(1; 2)$

$2 = a^1$

$a = 2$

$y = 2^x$

② $f(3) = 2^3 = 8$

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна 2022

Ответ: 8

11 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 5e^{x} - 2$ на отрезке $[-2;\, 1]$.

4B49EA

Источники:
FIPI (старый банк)
Пробный ЕГЭ 2018
Досрочная волна 2013

ПРОИЗВОДНЫЕ

$C' = 0$
$x' = 1$
$(Cx)' = C$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
V $(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

① $y' = 2 \cdot e^{2x} - 5 \cdot e^{x} = 0$
$e^x \cdot (2e^x - 5) = 0$
$e^x = 0$ $\quad\varnothing$
$e^x = 2{,}5$
$e^x = e^{\log_e 2{,}5}$
$x = \log_e 2{,}5 = \ln 2{,}5$

② $y(\ln 2{,}5) = e^{2\ln 2{,}5} - 5 \cdot e^{\ln 2{,}5} - 2 = 6{,}25 - 5 \cdot 2{,}5 - 2 = -8{,}25$
$y(-2) = \ldots$
$y(1) = \ldots$

Ответ: $-8{,}25$

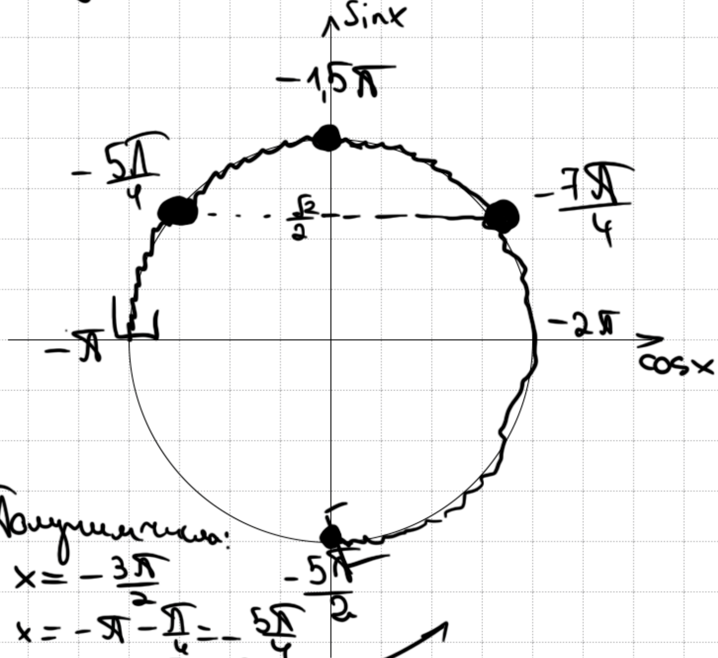
12 а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^3 x - \sqrt{2}\sin x + \cos^2 x = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\, -\pi\right]$.

2B5A99

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2018
Ященко 2018 (30 вар)
Основная волна (Резерв) 2012

а) $\sqrt{2}\sin^3 x - \sqrt{2} \cdot \sin x + 1 - \sin^2 x = 0$
$-\sqrt{2} \cdot \sin x \cdot (1 - \sin^2 x) + (1 - \sin^2 x) = 0$
$(1 - \sin^2 x) \cdot (1 - \sqrt{2} \cdot \sin x) = 0$
$\sin^2 x = 1$
$\sin x = \pm 1$
$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$
$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$
$n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности:



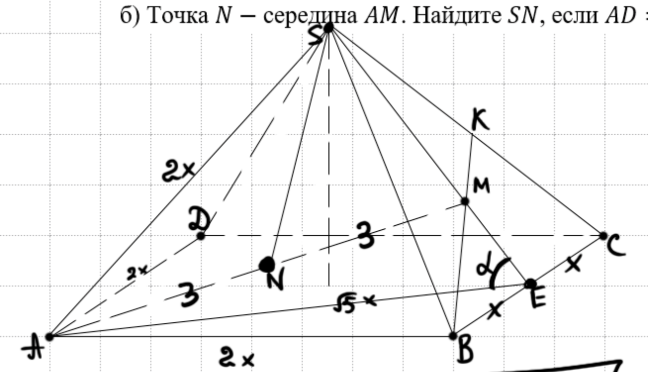
Получилось:
$x = -\frac{3\pi}{2}$
$x = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$
$x = -2\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$
$x = -\frac{5\pi}{2}$

Ответ:
а) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ n \in Z$
б) $-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{4};\ -\frac{7\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{2}$

13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA. Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M.

а) Докажите, что $AM = AD$.

б) Точка N — середина AM. Найдите SN, если $AD = 6$.



а) ① Найдём:

$AE = \sqrt{(2x)^2 + x^2} = \sqrt{5}x$

$SE = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x$

$ME = \frac{1}{3} SE = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

② $\triangle ASE$: по т. cos:

$\cos\alpha = \frac{3x^2 + 5x^2 - 4x^2}{2 \cdot \sqrt{3}x \cdot \sqrt{5}x} = \frac{2}{\sqrt{15}}$

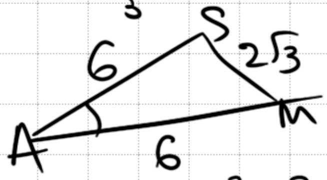
③ $\triangle AME$:

$AM = \sqrt{5x^2 + \frac{1}{3}x^2 - 2 \cdot \sqrt{5}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}x \cdot \frac{2}{\sqrt{15}}} = 2x = AD$

б) ① Найдём $\cos\angle SAN$:

$\triangle SAM$:

$SM = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = 2\sqrt{3}$



$\cos\angle SAN = \frac{6^2 + 6^2 - 12}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{6}$

② $\triangle SAN$

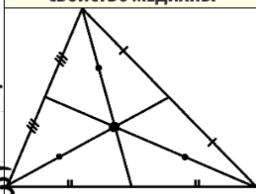
$SN = \sqrt{6^2 + 3^2 - 2 \cdot \cancel{6} \cdot 3 \cdot \frac{5}{\cancel{6}}} = \sqrt{15}$

Ответ: $\sqrt{15}$

Источники:

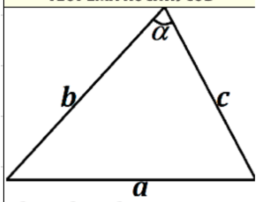
Основная волна 2017

СВОЙСТВО МЕДИАНЫ



Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2:1 считая от вершины

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

14 Решите неравенство

$\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} 4 \geq \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} (5 - 2^x)$.

Сравним

$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{13}}{5}$ и 1 $\quad | \cdot 5$

$\sqrt{2} + \sqrt{13}$ $\quad 5$ $\quad |^{2}$

$(\sqrt{2} + \sqrt{13})^2$ $\quad 5^2$

$15 + 2\sqrt{26} > 25$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2} + \sqrt{13}}{5} > 1$

$$\begin{cases} ① \; 4 \geq 5 - 2^x \\ ② \; 5 - 2^x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x \geq 2^0 \\ 2^x < 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x < \log_2 5 \end{cases}$$

Ответ: $[0; \log_2 5)$.

Источники:

Семёнов 2018

Досрочная волна 2016

СтатГрад 13.03.2019

15 15-го марта в банке был взят кредит на некоторую сумму на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– 15-го числа 30-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
– к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какая сумма была взята в кредит, если общая сумма выплат после его погашения составила 555 тысяч рублей?

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Основная волна (Резерв) 2021

Пусть S – сумма кредита
7 число – день платежа
x – сумма, на которую уменьшается долг первые 30 мес.

Дата	Сумма долга
15 марта	S
1 мес, 1 а	$1{,}02S$
1 мес, 7 а	$\Rightarrow$ Была выплата $1{,}02S - S + x = 0{,}02S + x$
1 мес, 15 а	$S - x$
2 мес, 1 м	$1{,}02S - 1{,}02x$
2 мес, 7 м	$\Rightarrow$ б.в. $= 0{,}02S + 0{,}98x$
2 мес, 15 м	$S - 2x$
Ответ:	400 тыс.

3 мес:
1 ч $\quad 1{,}02S - 2{,}04x$
7 ч $\quad \Rightarrow$ б.в. $0{,}02S + 0{,}96x$
15 ч $\quad S - 3x$

...

29 мес:
15 г $\quad S - 29x$

30 мес:
1 г $\quad 1{,}02S - 29{,}58x$
7 г $\quad \Rightarrow$ б.в. $0{,}02S + 0{,}42x$
15 г $\quad \boxed{S - 30x = 100}$

31 мес:
1 г $\quad 102$
7 г $\quad \Rightarrow$ б.в. 102
15 г $\quad 0$

Первые 30 выплат образуют арифм. прогрессию. Воспользуемся ф-лой

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{О.С.В.} = 555$$

первые 30 выплат + 31-я выплата = 555

$$\frac{0{,}02S + x + 0{,}02S + 0{,}42x}{2} \cdot 30 + 102 = 555$$

$$(0{,}02S + 0{,}71x) \cdot 30 = 453$$

$$(0{,}2S + 7{,}1x) \cdot 3 = 453$$

$$0{,}2S + 7{,}1x = 151 \quad | \cdot 5$$

$$S = 755 - 35{,}5x$$

$$100 + 30x = 755 - 35{,}5x$$

$$65{,}5x = 655$$

$$x = 10$$

$$S = 100 + 30x = 100 + 30 \cdot 10 = 400 \text{ тыс}$$

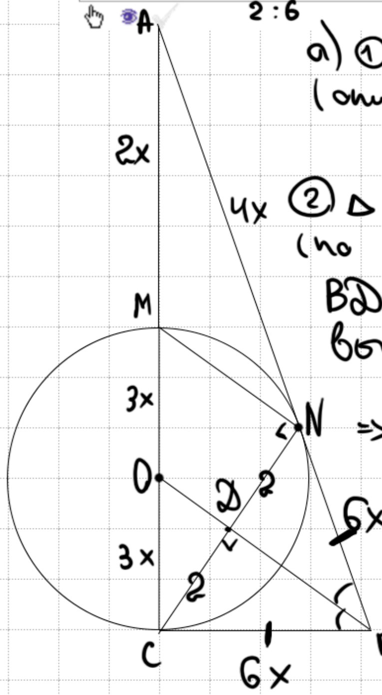
16

Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N.

а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 4$ и $AM : MC = 1 : 3$.

76AFB6



а) ① $\angle CNM = 90°$ (опир. на диаметр)

② $\triangle CBN$ – равнобед (по св-ву кас.)

BD – биссектриса и высота, т.к. $\triangle CBN$-р/б

$MN \perp CN$, $BO \perp CN$ $\Rightarrow MN \parallel BO$ ■

б) ① Пусть $AM = 2x$, $CM = 6x$, $CO = 3x$, $MO = 3x$

② по т. о бис BO

$$\frac{BC}{AB} = \frac{OC}{AO} = \frac{3}{5}$$

$BC = 3y$

$AB = 5y$

Тогда $AC = 4y = 8x$

$y = 2x$

③ $\cos\angle B = \frac{6x}{10x} = \frac{3}{5}$

④ $\triangle CBN$: по т. кос.

$4^2 = 36x^2 + 36x^2 - 2\cdot 36x^2\cdot\frac{3}{5}$

$16 = 0{,}8\cdot 36x^2$

$x^2 = \frac{16\cdot 5}{36\cdot 4} = \frac{4\cdot 5}{36} = \frac{5}{9}$

$x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

⑤ $\triangle BOC$:

$OB = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 5$

⑥ $\triangle CMN$:

$MN = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4^2} = 2$

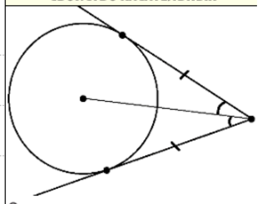
⑦ $S = \frac{2+5}{2}\cdot 2 = 7$

Ответ: 7

Источники:

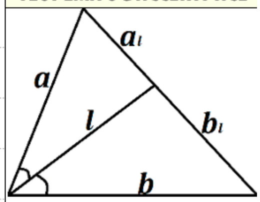
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ



Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

ТЕОРЕМА О БИССЕКТРИСЕ



$$\frac{a_l}{b_l} = \frac{a}{b}$$

17

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(5x-2)\cdot\ln(x+a)=(5x-2)\cdot\ln(2x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке [0; 1].

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017

$(5x-2)\cdot\ln(x+a)-(5x-2)\cdot\ln(2x-a)=0$

$(5x-2)\cdot(\ln(x+a)-\ln(2x-a))=0$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}5x-2=0\\ \cancel{\ln(x+a)=\ln(2x-a)}\end{array}\right.\\ x+a>0\\ 2x-a>0\\ 0\le x\le 1\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cancel{x}=0{,}4\\ \cancel{x}=2a\end{array}\right.\\ x+a>0\\ 2x-a>0\\ 0\le x\le 1\end{cases}$$

$X_1=0{,}4$ явл. корнем ур. при a, удовл.

$$\begin{cases}x+a>0\\ 2x-a>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a>-0{,}4\\ a<0{,}8\end{cases}\Rightarrow \text{при } a\in(-0{,}4;0{,}8)\ x_1 \text{ явл. корнем ур.-я.}$$

$X_2=2a$ явл. корнем ур. при a, удовл.

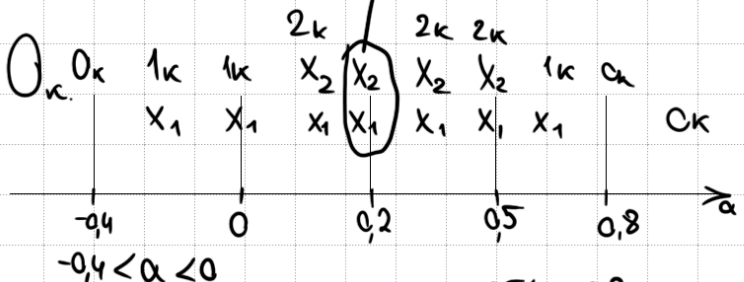
$$\begin{cases}x+a>0\\ 2x-a>0\\ 0\le x\le 1\end{cases}\qquad \begin{cases}3a>0\\ 3a>0\\ 0\le 2a\le 1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ при $a\in\left(0;\ \frac{1}{2}\right]$ X_2 будет корнем ур.-я

X_1 совпадает с X_2 если

$2a=0{,}4$

$a=0{,}2$ — 1 совп. корень



$-0{,}4<a<0$ $\quad a=0$ $\quad a=0{,}2$ $\quad 0{,}5<a<0{,}8$

Ответ: $(-0{,}4;0]\cup\{0{,}2\}\cup(0{,}5;0{,}8)$

18

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$(5x-2)\cdot\ln(x+a)=(5x-2)\cdot\ln(2x-a)$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

9437D5

Ис
FIPI
osfipi
Ященк
Ященк
Ященк
Основ

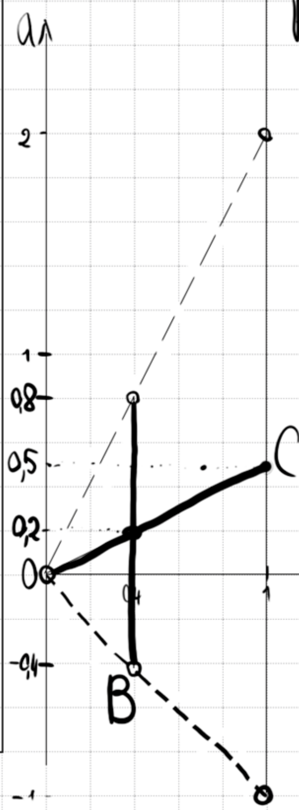
$(5x-2)\cdot\ln(x+a)-(5x-2)\cdot\ln(2x-a)=0$

$(5x-2)\cdot(\ln(x+a)-\ln(2x-a))=0$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}5x-2=0\\ \ln(x+a)-\ln(2x-a)=0\end{array}\right.\\ x+a>0\\ 2x-a>0\\ 0\le x\le 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0{,}4\\ x+a=2x-a\end{array}\right.\\ x+a>0\\ 2x-a>0\\ 0\le x\le 1\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0{,}4\\ a=\frac{1}{2}x\end{array}\right.\\ a>-x\\ a<2x\\ 0\le x\le 1\end{cases}$$

Решим графически:



при $a<-0{,}4$

$a=-0{,}4$

$-0{,}4<a<0$

$a=0$

$0<a<0{,}2$

$a=0{,}2$

$0{,}2<a<0{,}5$

$a=0{,}5$

$0{,}5<a<0{,}8$

$a=0{,}8$

$a>0{,}8$

Ответ: $(-0{,}4;\ 0]\cup\{0{,}2\}\cup(0{,}5;0$

18 На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причём любые два из них отличаются не более чем в три раза.

Источники: Досрочная волна (Резерв) 2017

а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?
б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?
в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

а) 5 6 9 12 15

б) Если самое маленькое число 1 или 2 или 3 или 4, то условие (отличие в 3 раза) не выполнится

5 — самое маленькое первое число

5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 — минимальный ряд 10-ти чисел

Даже его сумма $=95$, т.е. больше 94

Все остальные комбинации дадут сумму ещё больше.

Ответ:	а) 7 8 9 10 13
	б) нет
	в) 2 или 3

в) Проверим 2 числа ✓

64 125
80 100

Проверим 3 числа ✓

25 $5\cdot4$ 16

Проверим 4 числа

25 $5\cdot2$ $2\cdot2\cdot2\cdot2$ 2

Если одно из чисел кратно 25, то подбор не возможен

$5\cdot$ $5\cdot2$ $5\cdot2\cdot2\cdot$

Если числа кратного 25 нет, то подбор не возможен

Аналогично, не может быть 5 и более чисел.

8000	2
4000	2
2000	2
1000	2
500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

$8000=2^6\cdot5^3$