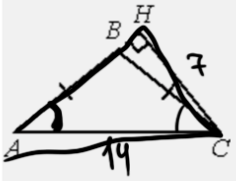
**1**

В треугольнике $ABC$ $AB = BC$, $AC = 14$, высота $CH$ равна 7.




Найдите синус угла $ACB$.

387739

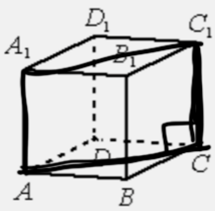
**Источники:**
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

$$\sin ACB = \frac{7}{14} = 0{,}5$$

**Ответ:** 0 , 5

**2**

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми $AC$ и $BB_1$.




Ответ дайте в градусах.

09E9B4

**Источники:**
FIPI (старый банк)

**Ответ:** 9 0

**3**

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 4 прыгуна из Италии и 6 прыгунов из Мексики. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двадцать четвёртым будет выступать прыгун из Италии.

266249

**Источники:**
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2022
Досрочная волна 2022
Основная волна 2017
Основная волна 2013

$$P = \frac{4^{\cdot 4}}{25_{\cdot 4}} = \frac{16}{100} = 0{,}16$$

**Ответ:** 0,16

**4**

Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б.
с вероятностью 0,32. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём
во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

B5BD2F

**Источники:**
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2015

$$0{,}5 \cdot 0{,}32 = 0{,}16$$

**Ответ:** 0,16

**5** Найдите корень уравнения $\log_{27} 3^{5x+5} = 2$.

C62378

**Источники:**
FIPI (старый банк)
Пробный ЕГЭ 2018
Пробный ЕГЭ 2013
Основная волна (Резерв) 2013

$27^2 = 3^{5x+5}$

$(3^3)^2 = 3^{5x+5}$

$3^6 = 3^{5x+5}$

$6 = 5x+5$

$1 = 5x$

$x = 0,2$

**Ответ:** 0 , 2

**6** Найдите значение выражения
$\frac{81^{2,6}}{9^{3,7}}$.

**Источники:**
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018

$\frac{(9^2)^{2,6}}{9^{3,7}} = \frac{9^{5,2}}{9^{3,7}} = 9^{1,5}$ $= (3^2)^{1,5} = 3^3 = 27$

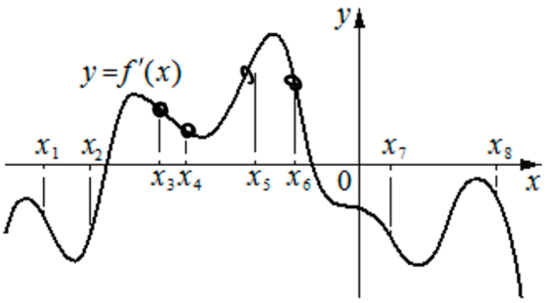
$= 9^1 \cdot 9^{0,5} = 9 \cdot 3 = 27$

$= 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = \sqrt{729} = 27$

**Ответ:** 2 7

**7** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено восемь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?

**Источники:**
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017
Досрочная волна 2016
Основная волна 2014




**Ответ:** 4

**8** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора получена экспериментально: $T = T_0 + bt + at^2$, где $t$ — время в минутах, $T_0 = 1450$ К, $a = -30$ К/мин $^2$, $b = 180$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Через сколько минут после начала работы нужно отключить прибор?

DF5D95

**Источники:**
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

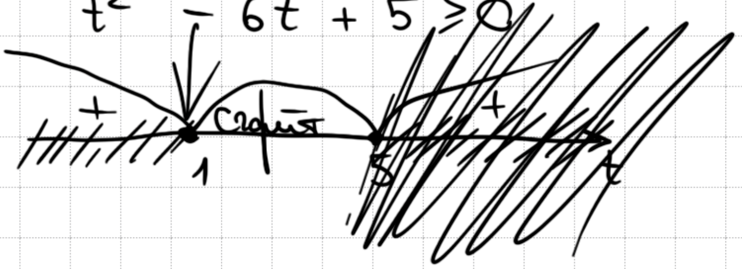
$T \le 1600$

$T_0 + bt + at^2 \le 1600$

$1450 + 180t - 30t^2 - 1600 \le 0$

$-30t^2 + 180t - 150 \le 0 \quad |:(-30)$

$t^2 - 6t + 5 \ge 0$




**Ответ:** 1

**9**

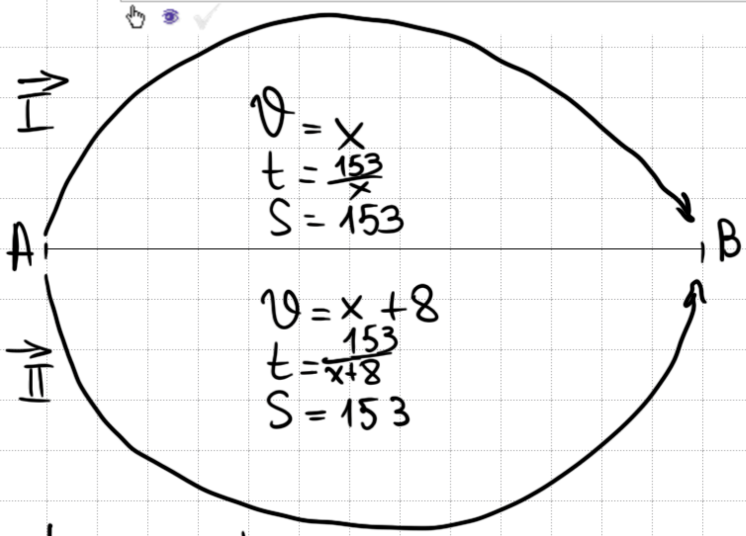
От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 153 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 8 часов после этого следом за ним со скоростью на 8 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

E5DDDD

**Источники:**

FIPI (старый банк)

FIPI (новый банк)




$t_{медл} - t_{быстр} = 8$

$\frac{153^{(x+8}}{x} - \frac{153^{(x}}{x+8} = 8$

$\frac{\cancel{153x} + 153 \cdot \cancel{8} - \cancel{153x}}{x^2 + 8x} = \cancel{8}\ 1$

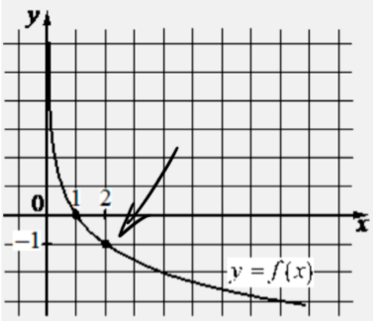
$x^2 + 8x - 153 = 0$

$x = -17$ $\quad x = 9$

**Ответ:** 9

**10**

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(8)$.




DA4F4F

**Источники:**

FIPI (старый банк)

Основная волна 2022

① $(2; -1)$

$-1 = \log_a 2$

$a^{-1} = 2$

$\frac{1}{a} = 2$

$a = \frac{1}{2}$

$y = \log_{0,5} x$

② $f(8) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

**Ответ:** −3

**11**

**Введите ответ в поле ввода**

Найдите наименьшее значение функции

$$y = 12x - \ln(12x) + 4$$

на отрезке $\left[\frac{1}{24}; \frac{5}{24}\right]$.

Введите ответ

i **Номер: 5136** Статус задания: НЕ РЕШЕНО ОТВЕТИТЬ

① $y' = 12 - \frac{1\cdot\cancel{12}}{\cancel{12}x} = 0$

$12 = \frac{1}{x}$

$x = \frac{1}{12}$

② $y\left(\frac{1}{24}\right) = ..$

$y\left(\frac{1}{12}\right) = 1 + 4 = 5$

$y\left(\frac{5}{24}\right) = ...$

**Ответ:** 5

## Источники:

FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Пробный ЕГЭ 2016

**ПРОИЗВОДНЫЕ**

- $C' = 0$
- $x' = 1$
- $(Cx)' = C$
- $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(U\cdot V)' = U'V + UV'$
- $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
- $\big(U(V)\big)' = \big(U(V)\big)'\cdot V'$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a b)' = \frac{1}{b\cdot\ln a}$

**12** а) Решите уравнение

$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

а) $2\sin^2 x + \sqrt{2}\cdot\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) - \cos x = 0$

$2\sin^2 x + \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) - \cos x = 0$

$2\sin^2 x + \sin x + \cancel{\cos x} - \cancel{\cos x} = 0$

$\sin x\cdot(2\sin x + 1) = 0$

$\sin x = 0$

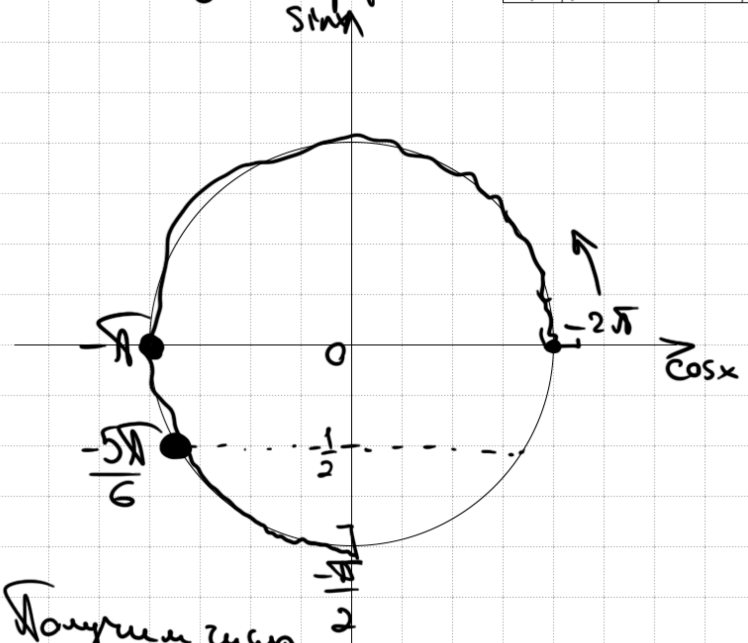
$x = \pi n, n\in Z$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

б) Отберём корни с помощью окружности




Получим числа

$x = -2\pi$

$x = -\pi$

$x = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$

**Ответ:** а) $\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n\in Z$

б) $-2\pi; -\pi; -\frac{5\pi}{6}$.

## Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Основная волна (Резерв) 2018
Ященко 2019 (36 вар)

**ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ**

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

## 13

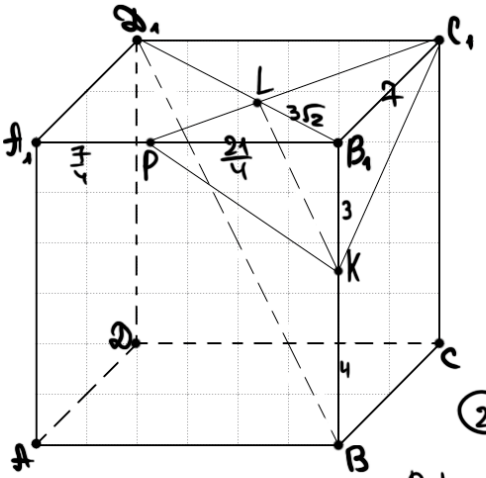
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре $BB_1$ отмечена точка $K$ так, что $KB = 4$. Через точки $K$ и $C_1$ проведена плоскость $\alpha$, параллельная прямой $BD_1$.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 3$, где $P$ — точка пересечения плоскости $\alpha$ с ребром $A_1B_1$.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью $\alpha$.

AC96DF

**Источники:**
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2015




а) ① Построение сечения:
- Построим LK такую, что LK ∥ $BD_1$
- Построим $C_1L$
$C_1L \cap A_1B_1 = P$
- Построим PK
- Построим $C_1K$
$\Rightarrow C_1KP$ – сечение

② $\triangle B_1LK \sim \triangle BB_1D_1$ по 2 углам

$$\frac{B_1K}{BB_1} = \frac{B_1L}{B_1D_1}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{B_1L}{7\sqrt{2}}$$

$B_1L = 3\sqrt{2}$

$D_1L = 4\sqrt{2}$

③ $\triangle C_1D_1L \sim \triangle B_1PL$

$$\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{B_1P}{7}$$

$B_1P = \frac{21}{4}$

$A_1P = \frac{7}{1} - \frac{21}{4} = \frac{7}{4}$

$\Rightarrow \frac{A_1P}{PB_1} = \frac{1}{3}$ ■

б) $V_{куба} = 7^3 = 343$

$$V_{B_1C_1KP} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\frac{21}{4} \cdot 7}{2} \cdot \cancel{3} = \frac{147}{8}$$

$$V_{иск. части} = \frac{343}{1} - \frac{147}{8} = \frac{2597}{8}$$

**Ответ:** $\frac{2597}{8}$

## 14

Решите неравенство

$$\frac{3\lg^2 x - 8}{\lg^2 x - 4} \geq 2.$$

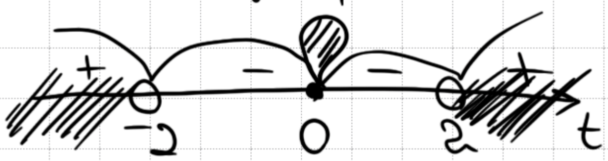
**Источники:**
Основная волна 2017
Досрочная волна (Резерв) 2015

$x > 0$

Пусть $\lg x = t$

$$\frac{3t^2 - 8}{t^2 - 4} - \frac{2}{1}^{(t^2-4} \geq 0$$

$$\frac{t^2}{t^2 - 4} \geq 0$$




$$\left[\begin{array}{l} t < -2 \\ t = 0 \\ t > 2 \end{array}\right.$$

$\lg x < \log_{10} \frac{1}{100}$ $\quad$ $\lg x = \lg 1$ $\quad$ $\lg x > \lg 100$

$0 < x < \frac{1}{100}$ $\quad$ $x = 1$ $\quad$ $x > 100$

**Ответ:** $(0; 0{,}01) \cup \{1\} \cup (100; +\infty)$

**15**

Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

**Источники:**
Ященко 2018 (36 вар)
Досрочная волна 2016
Основная волна (Резерв) 2016

Пусть X – сумма пополнения вкладов

Янв21 – месяц открытия вклада

Дек21 – месяц начисл. %

| Дата | Сумма вклада |
|---|---|
| 1 год Я21 | 10 млн |
| Д21 | $10 \cdot 1,1$ |
| 2 год Я22 | ничего не происходит |
| Д22 | $10 \cdot 1,1^2$ |
| 3 год Я23 | $10 \cdot 1,1^2 + x$ |
| Д23 | $10 \cdot 1,1^3 + 1,1x$ |
| 4 год Я24 | $10 \cdot 1,1^3 + 1,1x + x$ |
| Д24 | $10 \cdot 1,1^4 + 1,1^2 x + 1,1x \geq 30$ |

$14,641 + 2,31x \geq 30$

$2,31x \geq 15,359$

$x \geq 6\frac{1499}{2310}$

$X_{min} = 7$

$15359 : 2310 = 6$ (ост. 1499); $15359 - 13860 = 1499$

**ОТВЕТ:** 7 млн

**16**

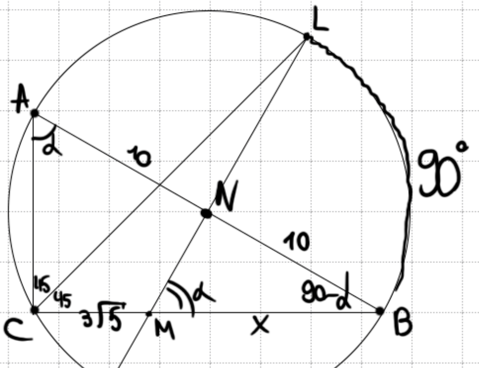
Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника $ABC$ вторично пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке $L$. Прямая, проходящая через точку $L$ и середину $N$ гипотенузы $AB$, пересекает катет $BC$ в точке $M$.

**Источники:**
Основная волна (резерв) 2020

а) Докажите, что $\angle BML = \angle BAC$.

б) Найдите площадь треугольника $ABC$, если $AB = 20$ и $CM = 3\sqrt{5}$.

а)




а) ① AB – диаметр и N – центр окр-ти (т.к. $\triangle ABC$ – прямоуг. и вписан в окр.)

② Найдём углы:

Пусть $\angle BAC = \alpha$

Тогда $\angle ABC = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$

$\angle BCL = \frac{1}{2} \cdot 90 = 45^\circ$ (т.к. CL – бис. прямого угла)

$\smile BL = 90^\circ$ (по т. о впис. угле)

$\angle BNL$ – центральный

$\Rightarrow \angle BNL = 90^\circ$

$\angle BNM = 90^\circ$

$\angle BMN = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha = \angle BAC$ ■

б) ① Пусть $BM = x$

② $\triangle BMN \sim \triangle ABC$ по 2 углам

$\frac{20}{x} = \frac{3\sqrt{5} + x}{10}$

$200 = x^2 + 3\sqrt{5}x$

$x^2 + 3\sqrt{5}x - 200 = 0$

$x = 5\sqrt{5} = BM$

$BC = 8\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{20^2 - (8\sqrt{5})^2} = 4\sqrt{5}$

③ $S_{ABC} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 8\sqrt{5}}{2} = 80$

**ОТВЕТ:** 80

**17** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$|x^2 - 2ax + 7| = |6a - x^2 - 2x - 1|$

имеет более двух различных корней.

78A5D4

**Источники:**
FIPI (старый банк)
Основная волна 2014

$\sqrt{(x^2-2ax+7)^2} = \sqrt{(6a-x^2-2x-1)^2} \quad |^{\wedge 2}$

$(x^2-2ax+7)^2 = (6a-x^2-2x-1)^2$

$(x^2-2ax+7)^2 - (6a-x^2-2x-1)^2 = 0$

$(x^2-2ax+7-6a+x^2+2x+1)(\cancel{x^2}-2ax+7+6a-\cancel{x^2}-2x-1)=0$

$(2x^2-2ax+2x+8-6a)(-2ax-2x+6+6a)=0$

$(x^2-\underbrace{ax+x}_{x\cdot(1-a)}+4-3a)\cdot(-ax-x+3+3a)=0$

$(x^2-ax+x+4-3a)\cdot(a+1)(3-x)=0$

$X_1 = 3$

Если $a=-1$, то $X$ – любое

Если $a \neq -1$, то у данного уравнения может быть максимум 3 корня (если квадратное уравнение $x^2-ax+x+4-3a$ имеет 2 разл. корня и оба они не 3)

**Ответ:** $(-\infty; -2\sqrt{10}-5) \cup \{-1\} \cup (2\sqrt{10}-5; \frac{8}{3}) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$

① $D>0$
② $3^2 - a\cdot 3 + 3 + 4 - 3a \neq 0$

① $D>0$

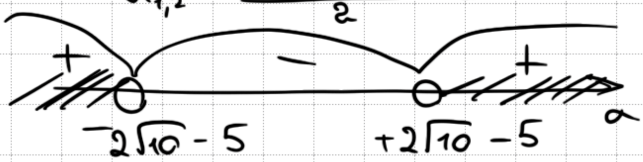
$(1-a)^2 - 4\cdot 1\cdot(4-3a) > 0$

$a^2 - 2a + 1 - 16 + 12a > 0$

$a^2 + 10a - 15 > 0$

$D = 100 + 60 = (4\sqrt{10})^2$

$a_{1,2} = \frac{-10 \pm 4\sqrt{10}}{2} = \pm 2\sqrt{10} - 5$

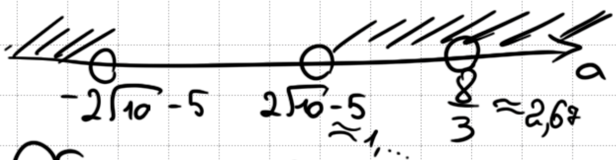



② $9 - 3a + 7 - 3a \neq 0$

$6a \neq 16$

$a \neq \frac{8}{3}$

Найдём пересечение ① и ②




Объединив с $a=-1$, получаем

**18**

а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?

б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.

в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

6762E0

**Источники:**

FIPI (старый банк)

Основная волна 2014

**АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ**

$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$

$\boxed{1 \text{ способ}}$

а) $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$

$a_1 + a_5 = 99$

$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = 99 \cdot \frac{5}{2} = 247,5$

⇒ Не существует, т.к. все слагаемые натуральные и сумма пяти натур. чисел должна быть натуральной

$\boxed{2 \text{ способ}}$

$a_1 \quad a_1 + d \quad a_1 + 2d \quad a_1 + 3d \quad a_1 + 4d$

$2a_1 + 4d = 99$

нет реш. в целых числах

б) $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6$

$a_1 + \underset{a_1 + 5d}{a_6} = 9$

$2a_1 + 5d = 9$

Если $a_1 = 2$

$d = 1$, то 2 3 4 5 6 7

в) $\text{Ср. ар.} = \frac{\text{Сумма}}{\text{кол-во}} = 6,5$

$\frac{\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot \cancel{k}}{\cancel{k}} = 6,5$

$a_1 + a_n = 13 \Rightarrow n \leq 12$

$a_{1\,min} = 1$

$d_{min} = 1$

Получаем

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

| | |
|---|---|
| **Ответ:** | а) нет |
| | б) 2 3 4 5 6 7 или наоборот |
| | в) 12 шт. |