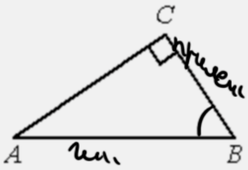
1

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $BC = 12$, $\cos B = \frac{3}{5}$. Найдите AB.



D74EE5

Источники:
FIPI (старый банк)

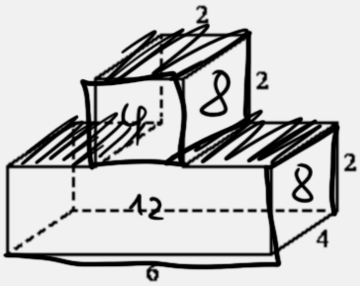
$$\cos B = \frac{3}{5} = \frac{12}{AB}$$

$$AB = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20$$

Ответ: 20

2

Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы – прямые).



0CD226

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

$$S_{пов} = \underset{пол}{24} + \underset{потолок}{24} + \underset{правая}{16} + 16\ левая + \underset{ближн}{16} + \underset{даль}{16} = 112$$

Ответ: 112

3

В среднем из 900 садовых насосов, поступивших в продажу, 27 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

FE2ADA

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2021
Основная волна 2019
Основная волна 2017
Основная волна 2014
Досрочная волна 2013

$$P = \frac{873}{900} = \frac{97}{100} = 0{,}97$$

Ответ: 0,97

4

Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 8».

97B50F

Источники:

FIPI (старый банк)

11	21	31	41	51	~~61~~
12	22	32	42	52	~~62~~
13	23	33	43	53	~~63~~
14	24	34	44	54	~~64~~
15	25	35	45	55	~~65~~
~~16~~	~~26~~	~~36~~	~~46~~	~~56~~	~~66~~

$$P = \frac{3^{\cdot 4}}{25_{\cdot 4}} = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

Ответ: 0,12

5

Найдите корень уравнения $36^{x-5} = \frac{1}{6}$.

40B30A

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2015
Пробный ЕГЭ 2015

$$(6^2)^{x-5} = 6^{-1}$$

$$6^{2x-10} = 6^{-1}$$

$$2x-10=-1$$

$$2x=9$$

$$x=4{,}5$$

Ответ: 4,5

6

Найдите значение выражения
$0{,}75^{\frac{1}{8}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 12^{\frac{7}{8}}$.

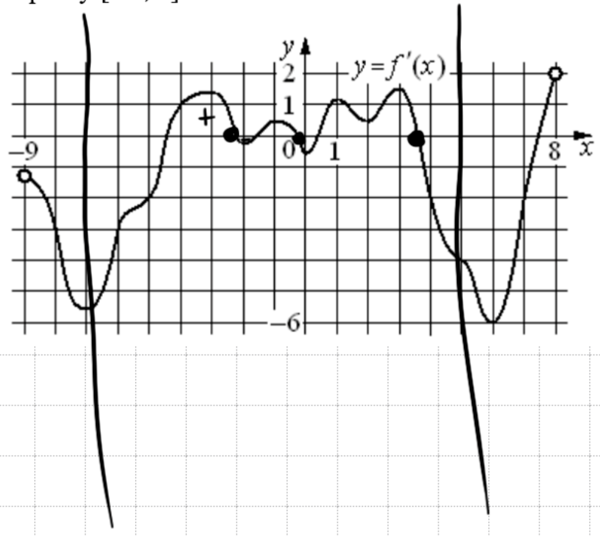
Источники:
Досрочная волна 2016

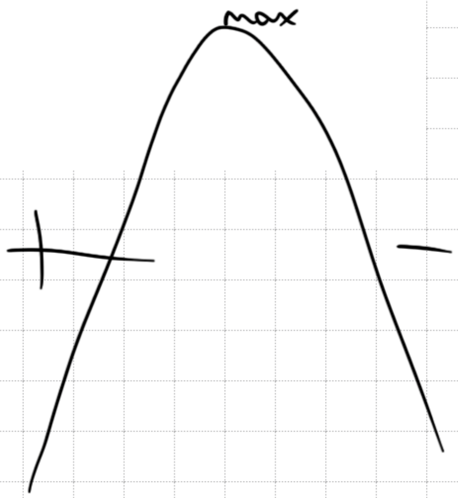
$$\frac{3^{\frac{1}{8}}}{4^{\frac{1}{8}}} \cdot 4^{\frac{2}{8}} \cdot 3^{\frac{7}{8}} \cdot 4^{\frac{7}{8}} = 3^{\frac{8}{8}} \cdot 4^{\frac{8}{8}} = 12$$

Ответ: 12

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-7; 5]$.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2021
Основная волна 2018
Основная волна 2017





Ответ: 3

8 Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 3,2 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 16$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

0592CA

Источники:
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2013

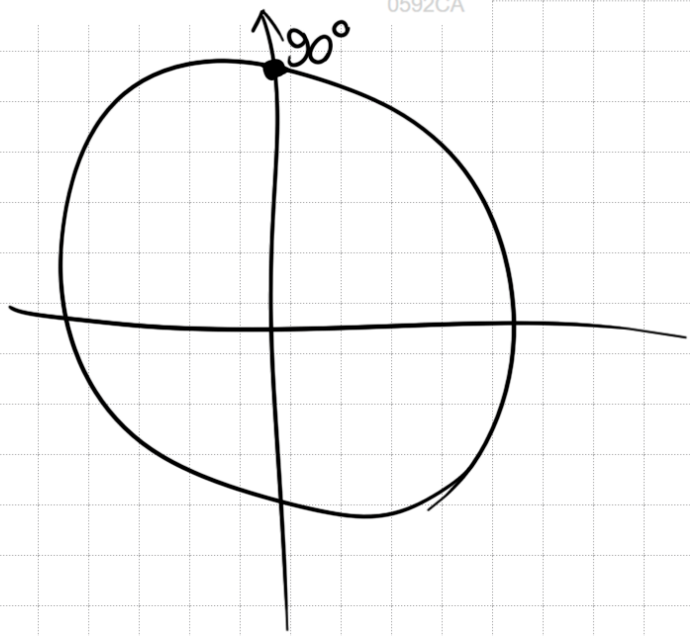
$t \geq 3{,}2$

$\frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \geq 3{,}2$

$\frac{\cancel{2 \cdot 16}}{\cancel{10}} \cdot \sin\alpha \geq \cancel{3{,}2}$ 1

$\sin\alpha \geq 1$

$\alpha = 90°$

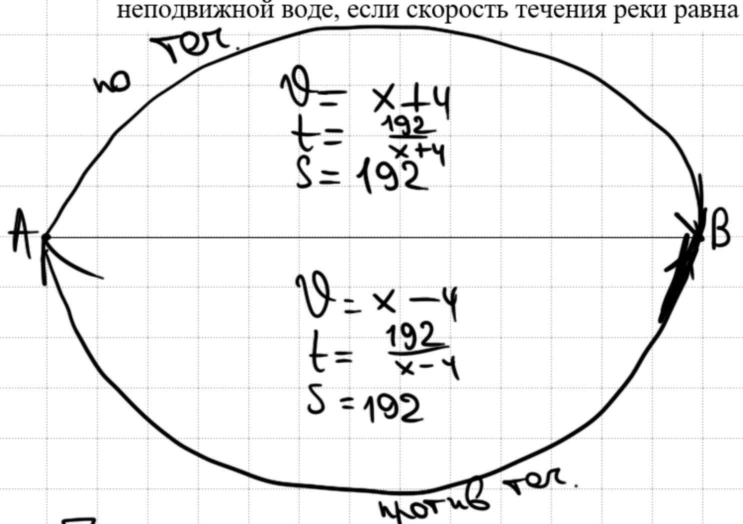


Ответ: 90

9

Расстояние между пристанями A и B равно 192 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через 3 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот проплыл 92 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2021
Основная волна 2020
Основная волна 2017



① Плот плавал: $92 : 4 = 23$ часа

② Яхта плавала: $23 - 3 = 20$ часов

③ $t_{\rightarrow} + t_{\leftarrow} = 20$

$$\frac{192^{(x-4}}{x+4} + \frac{192^{(x+4}}{x-4} = 20$$

$$\frac{192x - \cancel{192\cdot 4} + 192\cdot x + \cancel{192\cdot 4}}{x^2-16} = 20$$

$$\frac{\overset{96x}{\cancel{2\cdot 192x}}}{x^2-16} = \cancel{20}\ \cancel{10}\ 5$$

$100^2 = 10000$

$110^2 = 12100$

$5x^2 - 80 = 96x$

$5x^2 - 96x - 80 = 0$

$D = 9216 + 1600 = 10816$

104^2 $\cancel{106^2}$

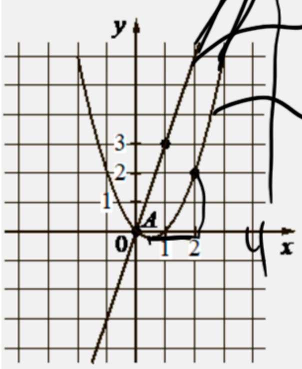
$$x = \frac{96 \pm 104}{10} = 20$$

Ответ: 20

10

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.

Источники:
FIPI (старый банк)



$y = 3x$

$y = 1x^2 - x + 0$

3D9010

① $a = 1$

$c = 0$

$x_b = \frac{1}{2} = \frac{-b}{2a}$ $\frac{1}{2} = \frac{-b}{2}$ $b = -1$

② $x^2 - x = 3x$

$x^2 - 4x = 0$

$x\cdot(x-4) = 0$

$x = 0$ $x = 4$

Ответ: 4

11 Найдите точку минимума функции $y = \left(x^2 - 11x + 11\right) \cdot e^{x+13}$.

D03887

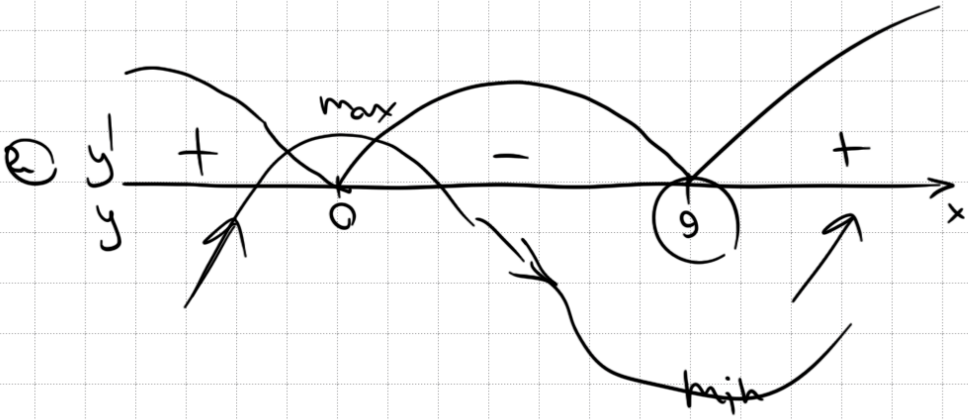
① $y' = (2x - 11) \cdot e^{x+13} + (x^2 - 11x + 11) \cdot e^{x+13} = 0$

$e^{x+13} \cdot \left(2x - 11 + x^2 - 11x + 11\right) = 0$

$e^{x+13} = 0$ $\qquad$ $x^2 - 9x = 0$

$\varnothing$ $\qquad$ $x \cdot (x - 9) = 0$

$x = 0$ $\qquad$ $x = 9$

②


Ответ: 9

Источники:

FIPI (старый банк)

ПРОИЗВОДНЫЕ

$C' = 0$

$x' = 1$

$(Cx)' = C$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(U \cdot V)' = U'V + UV'$ v

$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$

$\big(U(V)\big)' = \big(U(V)\big)' \cdot V'$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\log_a b)' = \dfrac{1}{b \cdot \ln a}$

12 а) Решите уравнение

$$2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Источники: Основная волна 2019

а) $2\cos^2x + 2\cdot 2\sin x\cdot\cos x - 3\cdot(\sin^2x+\cos^2x) = 0$

$-\cos^2x + 4\sin x\cos x - 3\sin^2x = 0 \quad |:\cos^2x$

$-1 + 4\operatorname{tg}x - 3\operatorname{tg}^2x = 0$

Пусть $\operatorname{tg}x = t$

$-3t^2 + 4t - 1 = 0$

$D = 4$

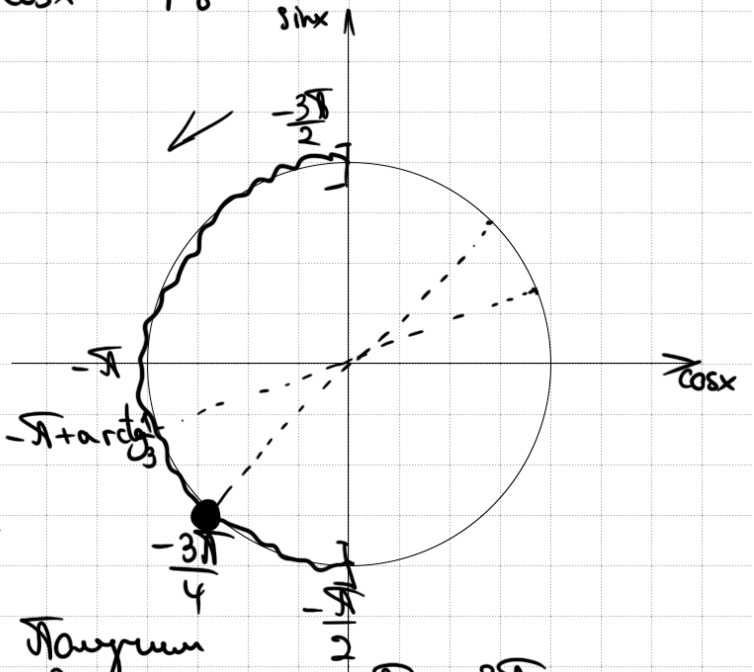
$t = \frac{-4\pm 2}{-6}$

$t = 1$ $\qquad t = \frac{1}{3}$

$\operatorname{tg}x = 1$ $\qquad \operatorname{tg}x = \frac{1}{3}$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\in Z$ $\qquad x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n, n\in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности.



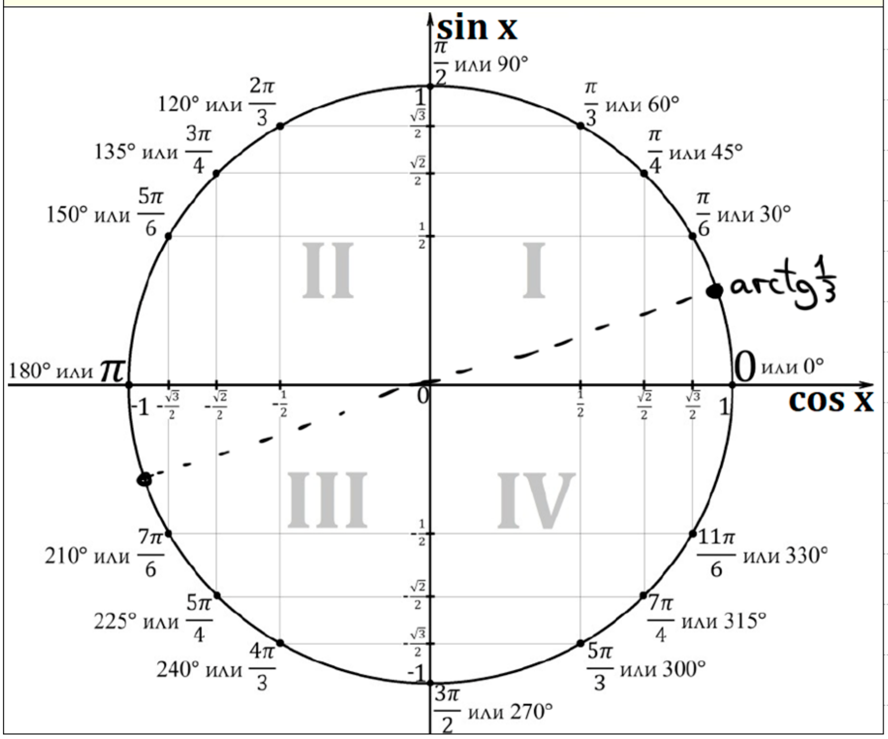
Получим числа $x = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

$x = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi n, \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n; n\in Z$

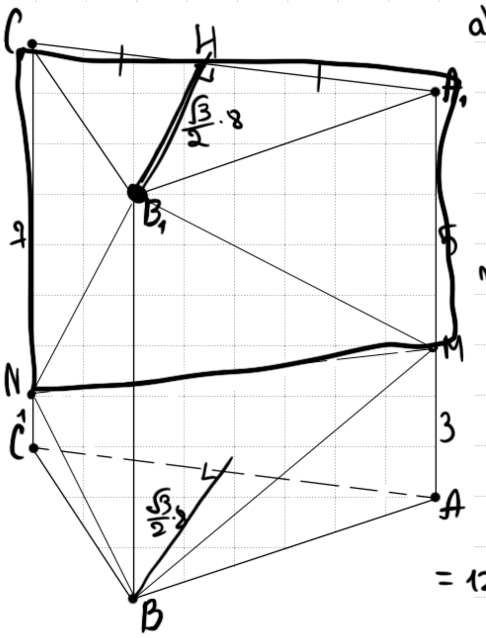
б) $-\frac{3\pi}{4}; -\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ



13 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 8. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 3$, $CN = 1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.
б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.



а) $V_{\text{верхней пир}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5+7}{2}\cdot 8\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot 8 = 64\sqrt3$

$V_{\text{всей призмы}} = \frac{\sqrt3\cdot 8^2}{4}\cdot 8 = 128\sqrt3$

$\Rightarrow V_{\text{нижней пирамиды}} = 128\sqrt3 - 64\sqrt3 = 64\sqrt3$ ■

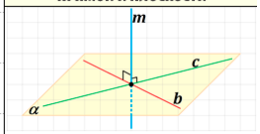
б) $V_{BACNM} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3+1}{2}\cdot 8\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot 8 = \frac{64\sqrt3}{3}$

$V_{\text{иск}} = 64\sqrt3 - \frac{64}{3}\sqrt3 = \frac{128}{3}\sqrt3$

Ответ: $\frac{128\sqrt3}{3}$.

Источники:
Досрочная волна 2016

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

14 Решите неравенство
$27\cdot 45^x - 27^{x+1} - 12\cdot 15^x + 12\cdot 9^x + 5^x - 3^x \le 0.$

$27\cdot 9^x\cdot(5^x-3^x) - 12\cdot 3^x\cdot(5^x-3^x) + (5^x-3^x)\le 0$

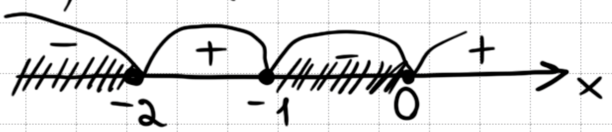
$(5^x-3^x)\cdot(27\cdot 9^x - 12\cdot 3^x + 1)\le 0$

$(5^x-3^x)\cdot 9\cdot 3\cdot\left(3^x-\frac19\right)\cdot\left(3^x-\frac13\right)\le 0$

$(5^x-3^x)\cdot(9\cdot 3^x-1)(3\cdot 3^x-1)\le 0 \quad |:3^x$

$\left(\left(\frac53\right)^x-\left(\frac53\right)^0\right)\left(3^{x+2}-3^0\right)\left(3^{x+1}-3^0\right)\le 0$

$\left(\cancel{\frac53-1}\right)\cdot x\cdot\left(\cancel{3-1}\right)\cdot(x+2)\cdot\left(\cancel{3-1}\right)(x+1)\le 0 \quad \Big| :\frac23 \; :2 \; :2$



Ответ: $(-\infty;-2]\cup[-1;0]$

$27t^2-12t+1=0$
$D=144-108=36$
$t=\frac{12\pm6}{54}$
$t=\frac19 \qquad t=\frac13$

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2020

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f}-\sqrt{g}$	$(f-g)$

15

Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.
В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят
$2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят
$5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему
500 рублей.

Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

D84C39

Источники:

FIPI (старый банк)
Ященко 2018
Досрочная волна 2015

	часы	единица товара
I	x^2	$2x$
II	y^2	$5y$

① $2x+5y=580$

Выразим $y=\frac{580-2x}{5}$

$y=116-0{,}4x$

$\begin{cases}116-0{,}4x\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases}x\geq 0\\ x\leq 290\end{cases}$

Ответ: 5 800 000р.

② Сумма Владимира $=500\cdot(x^2+y^2)$

наименьшее знач.

Найдём наименьшее значение выражения:

$f(x)=500x^2+500y^2$

$=500x^2+500\cdot(116-0{,}4x)^2$

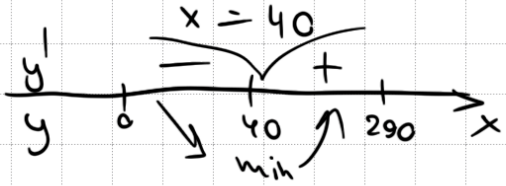
$=500x^2+500\cdot\left(116^2-2\cdot 116\cdot\frac{2}{5}x+\frac{4}{25}x^2\right)$

$=500x^2+500\cdot 116^2-1000\cdot 116\cdot\frac{2}{5}x+80x^2$

$f'(x)=1000x-46400+160x=0$

$1160x=46400$

$x=40$



$40-x_{min}$

$f(\text{наим})=f(40)=500\cdot 1600+500\cdot(116-16)^2=$

$=800000+5000000$

$=5\ 800\ 000$

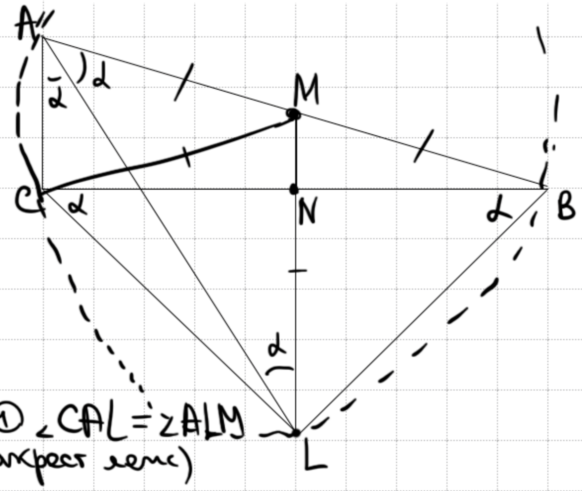
16

Источники: Основная волна 2016

В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N — середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L.

а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.

б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos\angle BAC = \frac{7}{25}$.



а) ① $\angle CAL = \angle ALM$ (накрест лежс)

② $AM = BM = CM = ML$

$\Rightarrow$ можно описать окружность около $\triangle ABC$ с центром M

③ $\angle BCL = \angle BAL = \alpha$ (опираются на одну дугу)

$\angle CBL = \angle CAL = \alpha$

$\Rightarrow \triangle AML \sim \triangle BLC$ по 2 углам (α и α) ■

б) ① $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$

$1 - 2\sin^2\alpha = \frac{7}{25}$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$

② Найдём k – коэф. подобия

$$k = \frac{AL}{BC} = \frac{AM}{CL} = \frac{ML}{BL} = \frac{2{,}5x}{3x} = \frac{5}{6}$$

③ $\triangle ABL$ – прямоуг., т.к. AB – диаметр и $\triangle ABL$ вписан в окр.

$\sin\alpha = \frac{BL}{AB} = \frac{3}{5}$

$BL = 3x$

$AB = 5x$

Тогда $ML = 2{,}5x$

④ $$\frac{S_{AML}}{S_{BLC}} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

Ответ: $\frac{25}{36}$

17

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3+x^2-9a^2x-2x+a}{x^3-9a^2x}=1$$

имеет ровно один корень.

7F0FA8

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016

$$\frac{\cancel{x^3}+x^2-\cancel{9a^2x}-2x+a-\cancel{x^3}+\cancel{9a^2x}}{x^3-9a^2x}=0$$

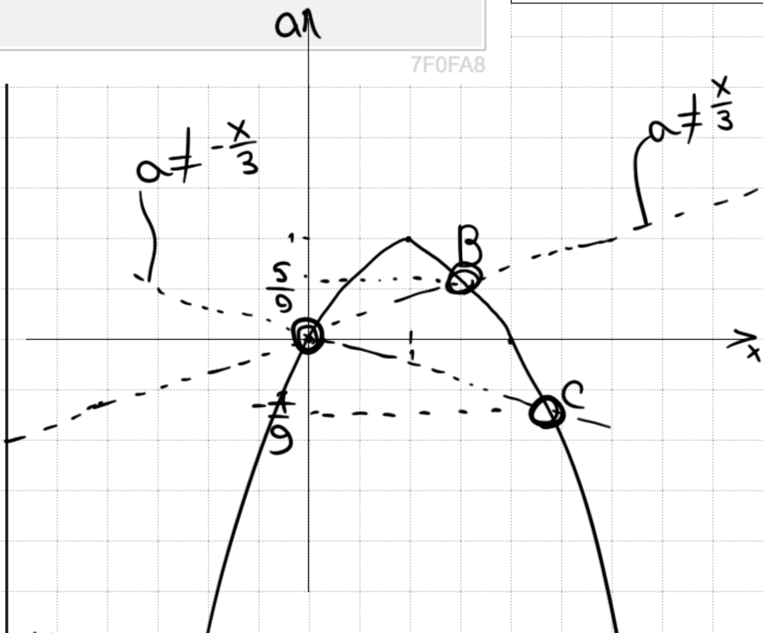
$$\frac{x^2-2x+a}{x\cdot(x^2-9a^2)}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+a=0 \\ x\neq 0 \\ x\neq 3a \\ x\neq -3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-x^2+2x \\ x\neq 0 \\ a\neq \frac{x}{3} \\ a\neq -\frac{x}{3} \end{cases}$$

$x_B=\frac{-2}{-2}=1$

$a_B=1$



Найдём ординату точки B

$-x^2+2x=\frac{x}{3}$

$x^2-\frac{5}{3}x=0$

$3x^2-5x=0$

$x\cdot(3x-5)=0$

$x=0 \qquad x=\frac{5}{3}$

$a_B=\frac{\frac{5}{3}}{3}=\frac{5}{9}$

Ответ: $\left\{-\frac{7}{9};\ 0;\ \frac{5}{9};\ 1\right\}$

Найдём ординату точки C

$-x^2+2x=-\frac{x}{3}$

$x^2-\frac{7}{3}x=0$

$x=0 \qquad x=\frac{7}{3}$

$a_C=-\frac{7}{9}$

18

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 800?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 111.

B61260

Источники:

FIPI (старый банк)
Пробный ЕГЭ 2015
Досрочная волна 2013

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$

а) Да, 3 6 9

б) $S < 800$

$\frac{a_1+a_n}{2} \cdot n < 800 \quad | \cdot 2$

$(a_1+a_n) \cdot n < 1600$

$(2a_1 + d \cdot (n-1)) \cdot n < 1600$

Для нахождения наибольшего n возьмём

$d = 1$ и $a_1 = 1$

$(2 + (n-1)) \cdot n - 1600 < 0$

$n^2 + n - 1600 < 0$

$D = 1 + 6400 = 6401$

$+ \quad \frac{-1-\sqrt{6401}}{2} \quad - \quad \frac{-1+\sqrt{6401}}{2} \quad + \quad n$

$\frac{-1+\sqrt{6401}}{2} \approx 39{,}6$

$\Rightarrow n_{наиб} = 39$

$\underline{1}\ \underline{2}\ \underline{3}\ \dots\ \underline{38}\ \underline{39}$

$S_n = \frac{1+39}{2} \cdot 39 = 780$

в) $S_n = 111$

$\frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = 111 \quad | \cdot 2$

$(a_1+a_n) \cdot n = 222$

$(a_1 + a_1 + d \cdot (n-1)) \cdot n = 222$

$(2a_1 + d \cdot (n-1)) \cdot n = 222$

Если $n = 3$, то $2a_1 + 2d = 74$

$a_1 + d = 37$

Пусть $a_1 = 1$ $d = 36$

$\underline{1}\ \ \underline{37}\ \ \underline{73}$

Если $n = 6$, то $2a_1 + 5d = 37$

$a_1 = 1$ $d = 7$

$\underline{1}\ \ \underline{8}\ \ \underline{15}\ \ \underline{22}\ \ \underline{29}\ \ \underline{36}$

Если $n = 37$, то $2a_1 + 36d = 6$

$a_1 + 18d = 3$

Если $a_1 = 21$
$d = -1$

$\varnothing$

$\underbrace{21\ \ 20\ \ 19\ \ 18\ \dots\dots\ -\ -\ -}_{37\ штук}$

Если $n = 74$ $\varnothing$
$n = 111$ $\varnothing$
$n = 222$ $\varnothing$

$$\begin{array}{r|l} 222 & 2 \\ 111 & 3 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array}$$

Ответ:	
	а) да
	б) 39
	в) 3 ; 6