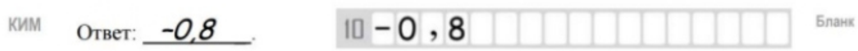
Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.



При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

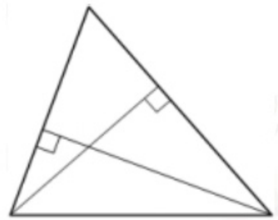
Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

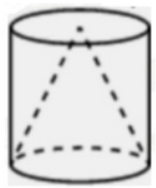
Часть 1

1 Две стороны треугольника равны 21 и 28. Высота, опущенная на большую из этих сторон, равна 15. Найдите высоту, опущенную на меньшую из этих сторон треугольника.



Ответ: ____________________________.

2 Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 57.



Ответ: ____________________________.

3 На конференцию приехали 2 учёных из Дании, 7 из Польши и 3 из Венгрии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвёртым окажется доклад учёного из Венгрии.

Ответ: ___________________________.

4 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения

$\log_7(1-x)=\log_7 5.$

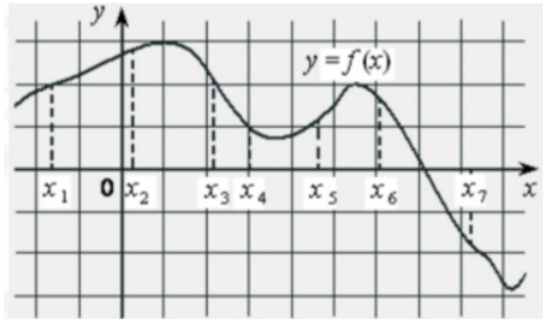
Ответ: ___________________________.

6 Найдите значение выражения

$5\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{8}\cdot\cos\frac{7\pi}{8}.$

Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y=f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Ответ: ___________________________.

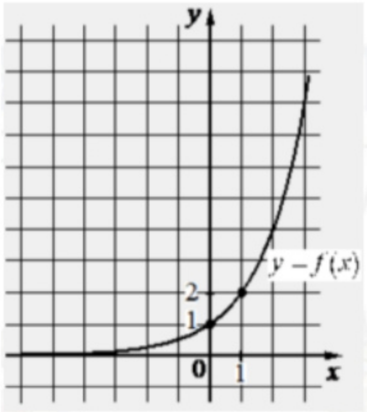
8 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана- Больцмана, согласно которому $P=\sigma ST^4$, где P – мощность излучения звезды, $\sigma=5{,}7\cdot10^{-8}\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}$ – постоянная, S – площадь поверхности звезды, а T – температура. Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{625}\cdot10^{21}$ м^2, а мощность её излучения равна $5{,}7\cdot10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в градусах Кельвина.

Ответ: ___________________________.

9 Дорога между пунктами А и В состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 25 км. Путь из А в В занял у туриста 6 часов, из которых 1 час ушёл на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

10 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(3)$.



Ответ: ___________________________.

11 Найдите наименьшее значение функции

$y = e^{2x} - 5e^x - 2$ на отрезке $[-2; 1]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin^3 x - \sqrt{2}\sin x + \cos^2 x = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA. Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M.

а) Докажите, что $AM = AD$.
б) Точка N — середина AM. Найдите SN, если $AD = 6$.

14 Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} 4 \geq \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}}(5 - 2^x).$$

15 15-го марта в банке был взят кредит на некоторую сумму на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– 15-го числа 30-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
– к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какая сумма была взята в кредит, если общая сумма выплат после его погашения составила 555 тысяч рублей?

16 Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N.

а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.
б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 4$ и $AM : MC = 1 : 3$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(5x - 2) \cdot \ln(x + a) = (5x - 2) \cdot \ln(2x - a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

18 На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причём любые два из них отличаются не более чем в три раза.

а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?
б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?
в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	**Правильный ответ**
1	20
2	171
3	0,25
4	0,83
5	-4
6	-2,5
7	3
8	5000
9	5
10	8
11	-8,25
12	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{4}+2\pi n, \frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ n \in Z$ б) $-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{4};\ -\frac{7\pi}{4}$
13	$\sqrt{15}$
14	$[0; \log_2 5)$
15	400 тыс.
16	7
17	$(-0{,}4; 0] \cup \{0{,}2\} \cup (0{,}5; 0{,}8)$
18	а) да, например 7 8 9 10 13 б) нет в) 2; 3

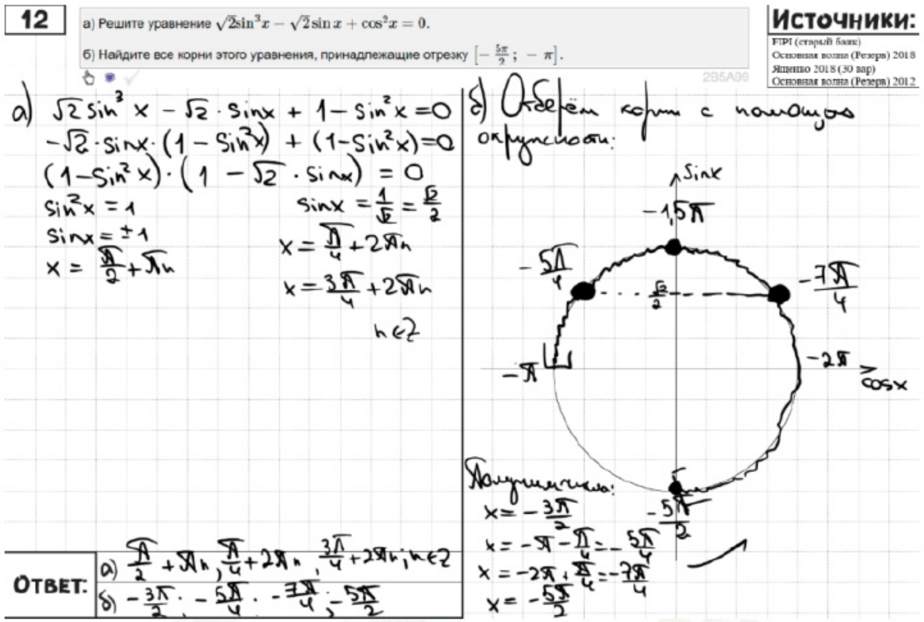
Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

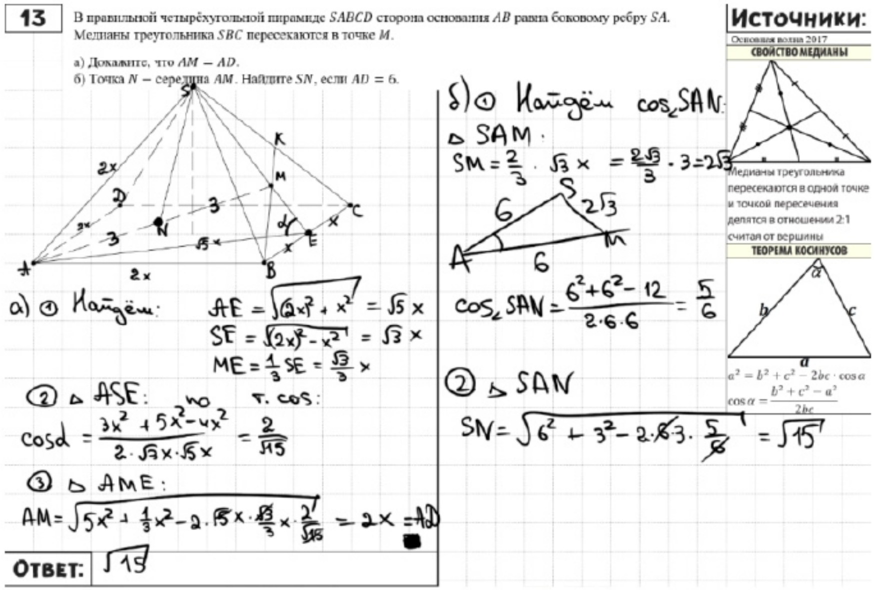
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

14 Решите неравенство
$\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} 4 \geq \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}}(5-2^x)$.

Источники:
Семёнов 2013
Досрочная волна 2016
СтатГрад 13.03.2019

Сравним

$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}$ и $1 \quad |\cdot 5$

$\sqrt{2}+\sqrt{13} \qquad 5 \quad |^2$

$(\sqrt{2}+\sqrt{13})^2 \qquad 5^2$

$15 + 2\sqrt{26} \quad > \quad 25$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{5} > 1$

$$\begin{cases} ① \; 4 \geq 5-2^x \\ ② \; 5-2^x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x \geq 2^0 \\ 2^x < 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x < \log_2 5 \end{cases}$$

Ответ: $[0; \log_2 5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 15-го марта в банке был взят кредит на некоторую сумму на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– 15-го числа 30-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
– к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какая сумма была взята в кредит, если общая сумма выплат после его погашения составила 555 тысяч рублей?

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Основная волна (Резерв) 2021

Пусть S – сумма кредита
7 число – день платежа
x – сумма, на которую уменьшается долг первые 30 мес.

Дата	Сумма долга
15 марта	S
1 мес: 1 ч	$1{,}02S$
7 ч	$\Rightarrow$ Была выплата $1{,}02S - S + x = 0{,}02S + x$
15 ч	$S - x$
2 мес: 1 ч	$1{,}02S - 1{,}02x$
7 ч	$\Rightarrow$ б.в. $= 0{,}02S + 0{,}98x$
15 ч	$S - 2x$
Ответ:	400 тыс.

3 мес: 1 ч $\quad 1{,}02S - 2{,}04x$
7 ч $\quad \Rightarrow$ б.в. $0{,}02S + 0{,}96x$
15 ч $\quad S - 3x$

…

29 мес: 15 ч $\quad S - 29x$

30 мес: 1 ч $\quad 1{,}02S - 29{,}58x$
7 ч $\quad \Rightarrow$ б.в. $0{,}02S + 0{,}42x$
15 ч $\quad \boxed{S - 30x = 100}$

31 мес: 1 ч $\quad 102$
7 ч $\quad \Rightarrow$ б.в. 102
15 ч $\quad 0$

Первые 30 выплат образуют арифм. прогрессию. Воспользуемся ф-лой
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

О.С.В. $= 555$

первые 30 выплат $+$ 31-я выплата $= 555$

$$\frac{0{,}02S + x + 0{,}02S + 0{,}42x}{2} \cdot 30 + 102 = 555$$

$$(0{,}02S + 0{,}71x) \cdot 30 = 453$$

$$(0{,}2S + 7{,}1x) \cdot 3 = 453$$

$$0{,}2S + 7{,}1x = 151 \quad |\cdot 5$$

$$S = 755 - 35{,}5x$$

$$100 + 30x = 755 - 35{,}5x$$

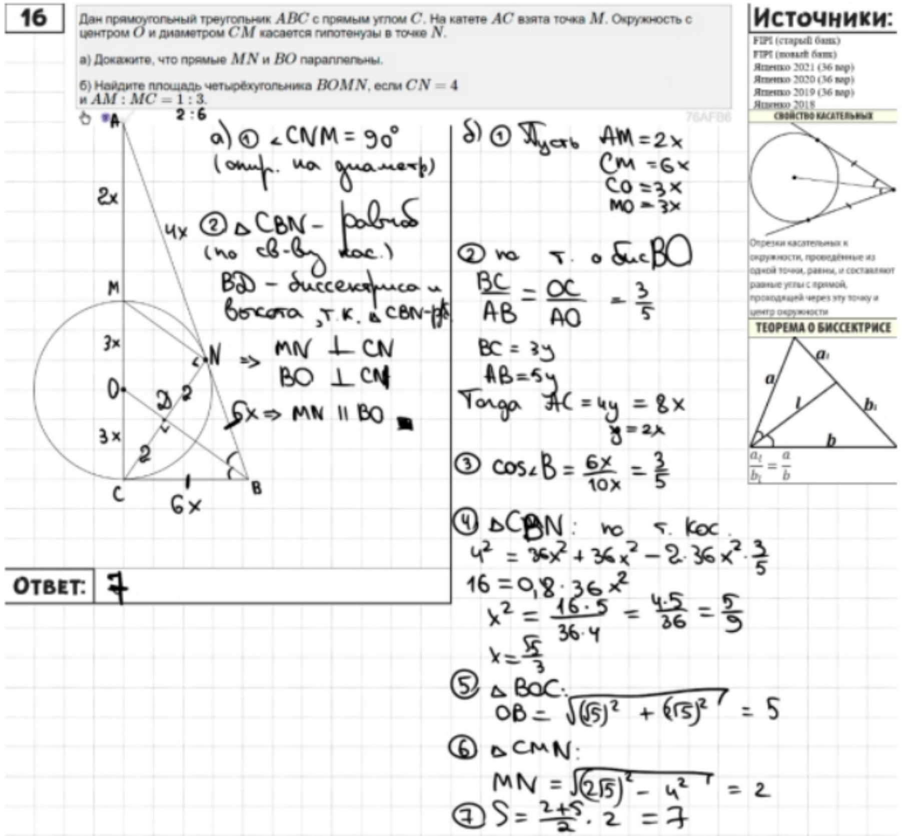
$$65{,}5x = 655$$

$$x = 10$$

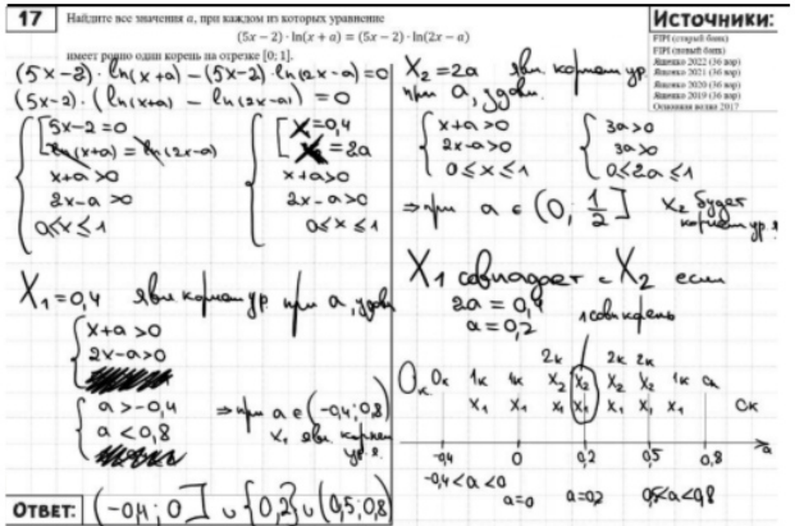
$$S = 100 + 30x = 100 + 30 \cdot 10 = 400 \text{ тыс}$$

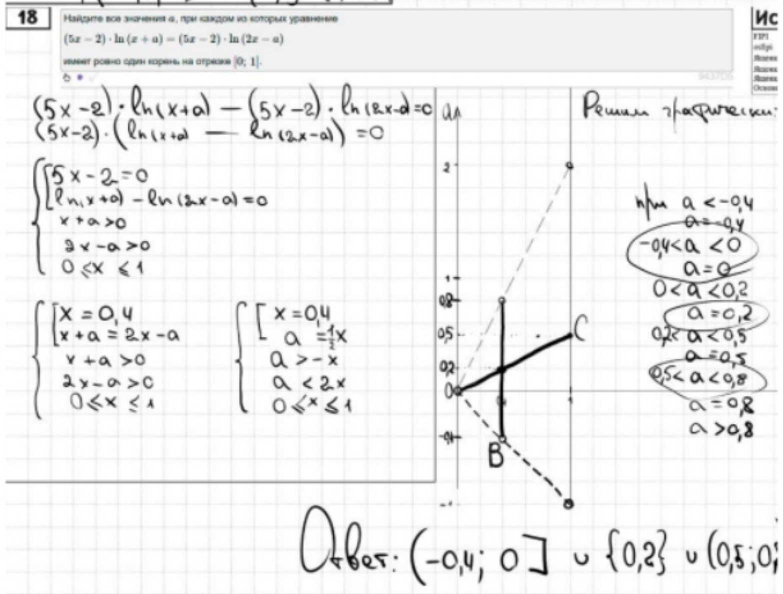
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 220912

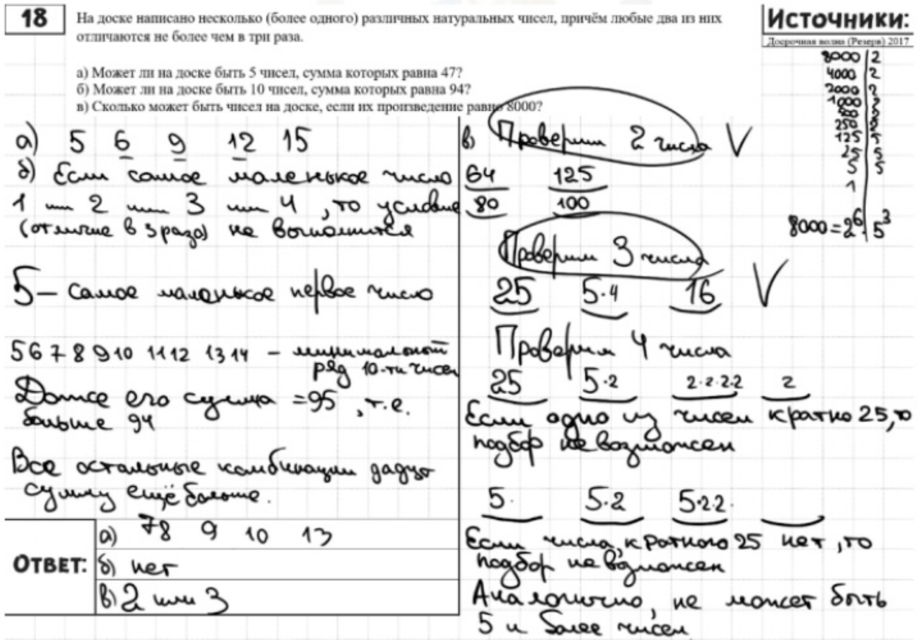


Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3





Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



18 На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причём любые два из них отличаются не более чем в три раза.

а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?
б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?
в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

Источники:
Досрочная волна (Резерв) 2017

а) 5 6 9 12 15
б) Если самое маленькое число 1 или 2 или 3 или 4, то условие (отличие в 3 раза) не выполнится

5 — самое маленькое первое число

5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 — минимальный ряд 10-ти чисел
Тогда его сумма =95, т.е. больше 94

Все остальные комбинации дадут сумму ещё больше.

в) Проверим 2 числа V
64 125
80 100
Проверим 3 числа
25 5·4 16 V
Проверим 4 числа
25 5·2 2·2·2·2 2
Если одно из чисел кратно 25, то подбор не возможен
5· 5·2 5·2·2·
Если числа, кратного 25 нет, то подбор не возможен
Аналогично, не может быть 5 и более чисел

8000 | 2
4000 | 2
2000 | 2
1000 | 2
500 | 2
250 | 2
125 | 5
25 | 5
5 | 5
1
$8000=2^6\cdot 5^3$

Ответ:
а) 7 8 9 10 13
б) нет
в) 2 или 3

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <…> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 12–18, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 12–18 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.