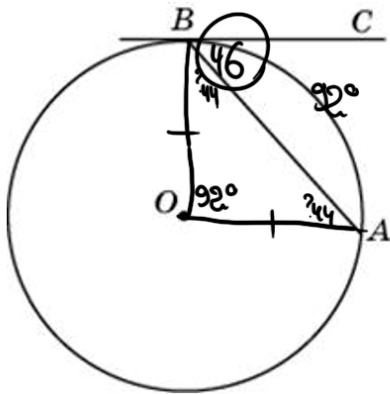
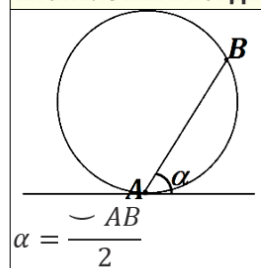


1

Хорда AB стягивает дугу окружности в 92° . Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B . Ответ дайте в градусах.

**Источники:**

Основная волна 2018

КАСАТЕЛЬНАЯ И ХОРДА

ОТВЕТ: 46

2

Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 50.



Найдите объем цилиндра.

FCCBC9

$$\textcircled{1} V_{\text{ш}} = 50 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

$$\pi R^3 = \frac{50 \cdot 3}{4} = \frac{150}{4}$$

$$\textcircled{2} V_{\text{ц}} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = 2 \cdot \frac{150}{4} = 75$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)

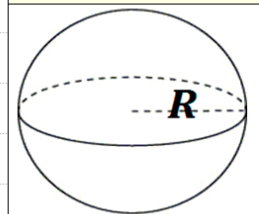
ФИПИ (новый банк)

Основная волна 2021

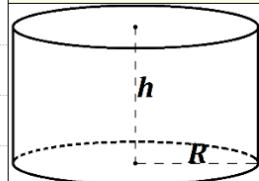
Основная волна 2017

Досрочная волна 2016

Пробный ЕГЭ 2015

ОБЪЁМ ШАРА

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

ОБЪЁМ ЦИЛИНДРА

$$V = \pi R^2 h$$

ОТВЕТ: 75

3

В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос про Александра Второго. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не** достанется вопрос про Александра Второго.



89584F

$$P = \frac{37 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{74}{100} = 0,74$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2022
 Основная волна 2021
 Основная волна 2019
 Основная волна 2013

ОТВЕТ: 0,74

4

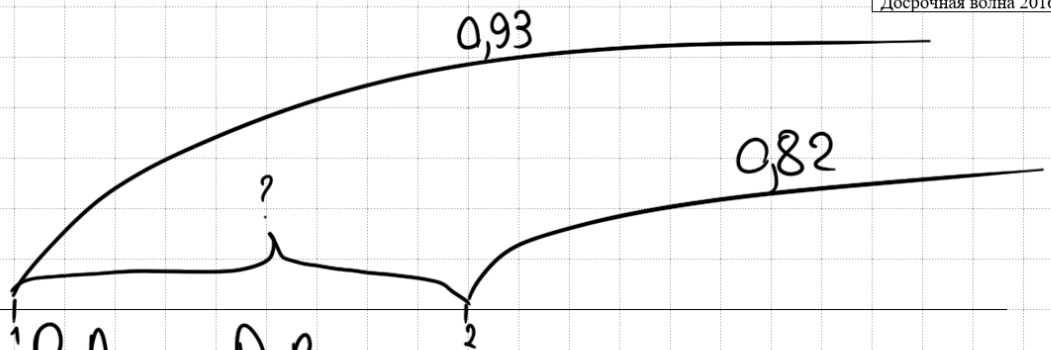
Вероятность того, что новый тостер прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,82. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.



CA9F71

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Демо 2022
 Демо 2021
 Досрочная волна 2016



$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

$$P(\text{прослужит больше 1 года}) = P(\text{прослужит больше 2 лет}) + P(\text{прослужит от 1 года})$$

0,93
0,82
X

ОТВЕТ: 0,11

5

Найдите корень уравнения $\frac{1}{3x-1} = \frac{5}{4}$

29F491

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна 2013

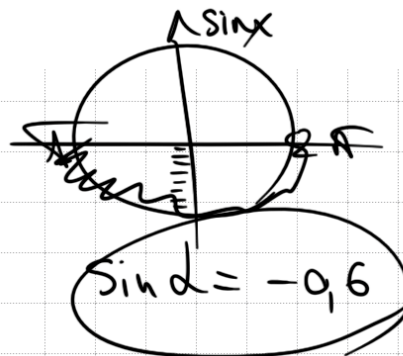
$$\begin{aligned}
 1 \cdot 4 &= 5 \cdot (3x - 1) \\
 4 &= 15x - 5 \\
 4 + 5 &= 15x \\
 9 &= 15 \cdot x \\
 x &= \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6
 \end{aligned}$$

ОТВЕТ: 0,6

6

Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,8$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\
 \sin^2 \alpha + 0,64 &= 1 \\
 \sin^2 \alpha &= 0,36 \\
 \sin \alpha &= 0,6
 \end{aligned}$$



$$\textcircled{2} \quad \sin 2\alpha = 2 \cdot (-0,6) \cdot 0,8 = -0,96$$

ОТВЕТ: -0,96

Источники:

Демо 2021
 Демо 2020
 Демо 2019
 Демо 2018
 Демо 2017
 Демо 2016
 Демо 2015

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

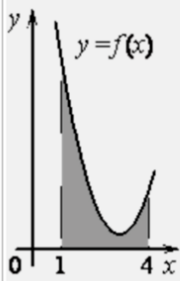
$$\begin{aligned}
 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\
 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\
 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \\
 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1
 \end{aligned}$$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

$$\begin{aligned}
 \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\
 \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
 \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1 \\
 \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha
 \end{aligned}$$

7

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 14x - 10$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8F3609

$$S = F(4) - F(1)$$

$$F(4) = \frac{1}{2} \cdot 64 - \frac{9}{2} \cdot 16 + 14 \cdot 4 - 10$$

$$F(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{9}{2} \cdot 1 + 14 \cdot 1 - 10$$

$$= 63 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot \frac{9}{2} + 3 \cdot 14 = 31,5 - 67,5 + 42 = 6$$

ОТВЕТ: 6

8

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 316,8 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

$$V_2 = ?$$

$$1 \cdot 316,8^{1,4} = 128 \cdot V_2^{1,4}$$

$$V_2^{1,4} = \frac{316,8^{1,4}}{128}$$

$$V_2^7 = \frac{316,8^7}{2^{35}}$$

$$V_2 = \frac{316,8}{2^5} = \frac{316,8}{32} = 9,9$$

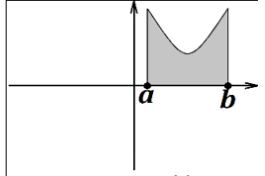
ОТВЕТ: 9,9

Источники:

ФИПИ (старый банк)

Основная волна 2013

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА



$$S_{\text{фигуры под графиком}} = F(b) - F(a)$$
Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Досрочная волна 2019

9

Первая труба наполняет резервуар на 13 минут дольше, чем вторая. Обе трубы, работая одновременно, наполняют этот же резервуар за 42 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Демо 2021
 Основная волна 2017
 Досрочная волна 2016

	Пр-ть	Время	Кол-во рез-б.
I	$\frac{1}{x+13}$	$x+13$	1
II	$\frac{1}{x}$	x	1
Вместе	$\frac{1}{42}$	42	1

$$\frac{1}{x+13} + \frac{1}{x} = \frac{1}{42}$$

$$\frac{x + x + 13}{x^2 + 13x} = \frac{1}{42}$$

$$x^2 + 13x = 84x + 42 \cdot 13$$

$$x^2 - 71x - 42 \cdot 13 = 0$$

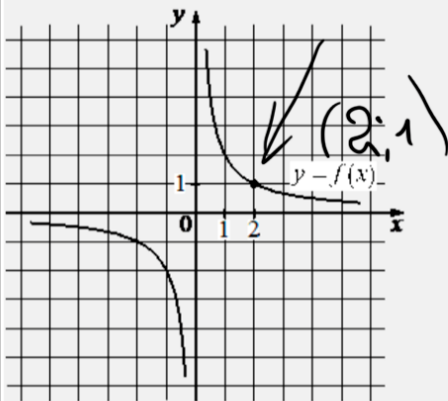
$$D = 5041 + 2184 = 7225$$

$$x = \frac{71 + 85}{2} = 78$$

ОТВЕТ: 78

10

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



$$1 = \frac{k}{2}$$

$$k = 2$$

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$f(10) = \frac{2}{10} = 0,2$$

ОТВЕТ: 0,2**Источники:**

ФИПИ (старый банк)
 Основная волна 2022

11

Найдите наименьшее значение функции

$$y = 32 \sin x - 35x + 30$$

на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

67AAE2

$$\textcircled{1} y' = 32 \cos x - 35 = 0$$

$$\cos x = \frac{35}{32}$$

$$\textcircled{2} y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \dots$$

$$y(0) = 30$$

ОТВЕТ: 30

12

а) Решите уравнение

$$2 \cos 2x + 4\sqrt{3} \cos x - 7 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

$$\text{a) } 2 \cdot (2\cos^2 x - 1) + 4\sqrt{3} \cdot \cos x - 7 = 0$$

$$4\cos^2 x + 4\sqrt{3} \cos x - 9 = 0$$

Пусть $\cos x = t$

$$4t^2 + 4\sqrt{3}t - 9 = 0$$

$$D = 48 + 144 = 192 = 64 \cdot 3 = (8\sqrt{3})^2$$

$$t_1 = \frac{-4\sqrt{3} + 8\sqrt{3}}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t_2 = \frac{-4\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}{8} = -1,5\sqrt{3}$$

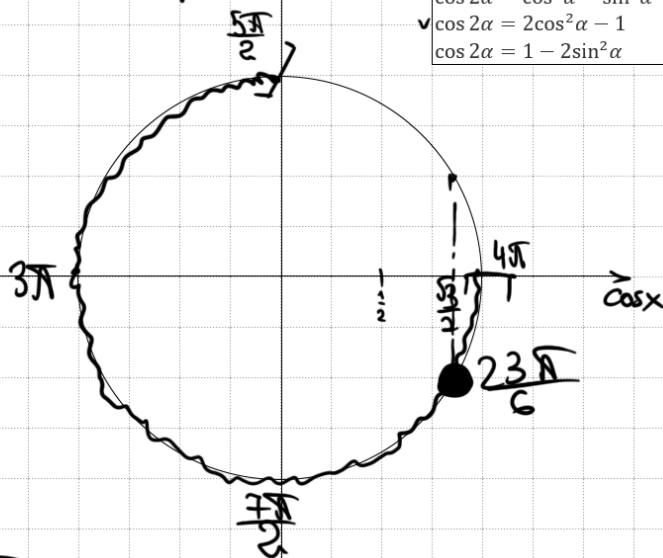
$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1,5\sqrt{3}$$

Нет решений

б) Отберём корни с помощью окружности:



Получим $x = \frac{4\sqrt{3}}{1} - \frac{\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}$

ОТВЕТ:

а) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
 б) $\frac{23\pi}{6}$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Пробный ЕГЭ 2016
 Досрочная волна 2015
 Основная волна 2013

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 Основная волна 2019
 Ященко 2022 (50 вар)
 Ященко 2020 (36 вар)
 Ященко 2020 (50 вар)
 Ященко 2019 (36 вар)
 Основная волна 2015

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

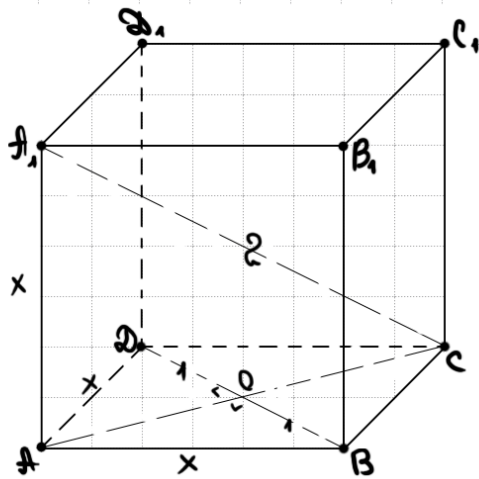
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

13 Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

- а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.
 б) Найдите объём призмы, если $A_1C = BD = 2$.



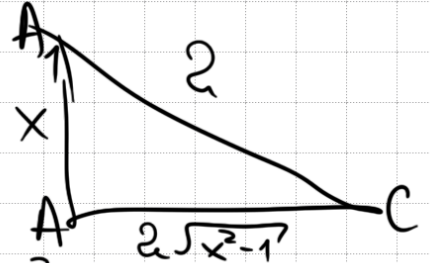
а) $AC \perp BD$ (по св-ву ромба)
 AC — проекция A_1C на н. осн.
 $\Rightarrow A_1C \perp BD$
 по ТТТ

ОТВЕТ: $0,8\sqrt{6}$

1) Пусть $AB = AA_1 = x = AO$
 $AC \cap BD = O$
 $BO = 1$

2) $AO = \sqrt{x^2 - 1}$
 $AC = 2\sqrt{x^2 - 1}$

3) $\triangle A_1AC$:



$2^2 = x^2 + 4 \cdot (x^2 - 1)$

$5x^2 = 8$
 $x^2 = \frac{8}{5}$

$x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$V_{пр} = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot AA_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 0,8\sqrt{6}$

Источники:

Горлин #14 2019
 Основная волна (Резерв) 2017
ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ



Прямая, проведённая в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной

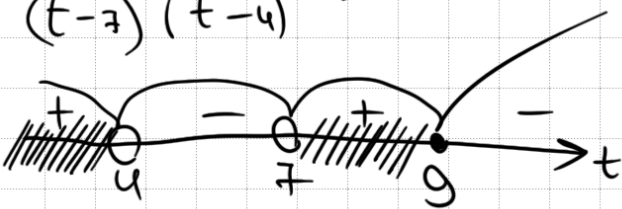
14 Решите неравенство $\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}$.

Пусть $7^x = t$

$\frac{2^{t-4}}{t-7} - \frac{5^{t-7}}{t-4} \geq 0$

$\frac{2t - 8 - 5t + 35}{(t-7)(t-4)} \geq 0$

$\frac{-3t + 27}{(t-7)(t-4)} \geq 0$



$t < 4$
 $7 < t \leq 9$

ОТВЕТ: $(-\infty, \log_7 4) \cup (1, \log_7 9]$

$7^x < 4$
 $7^x < 7^{\log_7 4}$
 $x < \log_7 4$

$7^1 < 7^x \leq 7^9$
 $1 < x \leq \log_7 9$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Ященко 2020 (36 вар)
 Ященко 2019 (36 вар)
 Материалы для экспертов ЕГЭ
 Основная волна 2022
 Основная волна 2021
 Основная волна 2015

ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФИЧЕСКОЕ
 $a^{\log_a b} = b$

15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,3 млн рублей?

Пусть S - сумма кредита
 n число - день платежа

Дата	Сумма долга
15 янв	S
1 фев	$1,04 S$
7 фев	$S - \frac{1}{14} S = \frac{13}{14} S$
15 фев	$1,04 \cdot \frac{13}{14} S$
1 м	$\frac{12}{14} S$
7 м	$1,04 \cdot \frac{12}{14} S$
15 м	$\frac{11}{14} S$
1 ян	
7 ян	
15 ян	

$\frac{1}{14} S$
 $1,04 \cdot \frac{1}{14} S$
 $\Rightarrow 1,04 \cdot \frac{1}{14} S = \frac{1,04 S}{14}$
 \Rightarrow Сумма выплаты $\frac{1,04 S}{14} - \frac{13}{14} S = \frac{1,56 S}{14}$
 \Rightarrow С.В. $\frac{1,04 S \cdot 13}{14} - \frac{12}{14} S = \frac{1,52 S}{14}$
 \Rightarrow С.В. $\frac{1,04 S \cdot 12}{14} - \frac{11}{14} S = \frac{1,48 S}{14}$

Возврата оф. арифм. прогр.
 Воспользуемся Ф-лой
 $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
 $O.C.B. = 1,3 \text{ млн}$
 $\left(\frac{1,56}{14} S + \frac{1,04}{14} S \right) \cdot 14 = 1,3 \cdot 10^6$
 $2,6 S = 2,6$
 $S = 1$

ОТВЕТ: 1 млн

Источники:

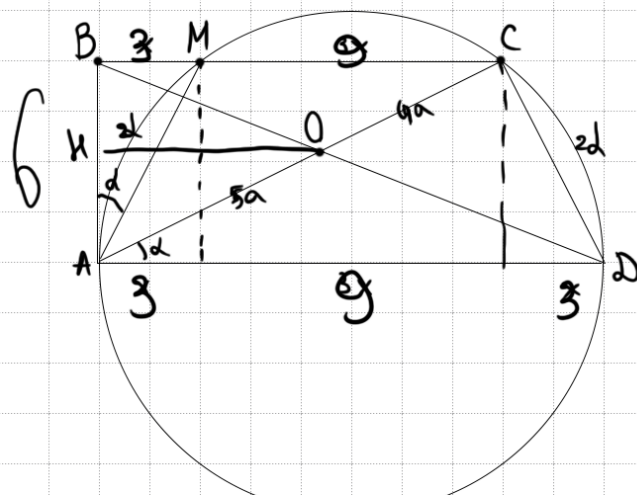
ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2019
 СтатГрад 25.09.2019
 СтатГрад 21.09.2017
 Ященко 2022 (36 вар)
 Ященко 2021 (36 вар)
 Ященко 2020 (36 вар)

В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M .

- Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.
- Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = 6$, а $BC = 4BM$.

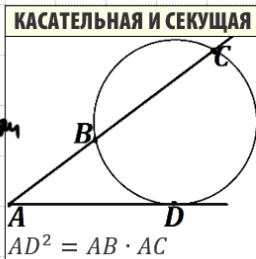
Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2017



$\angle CAD = \alpha = \frac{1}{2} \angle C D$ (по т. о впис. угле)
 $\Rightarrow \angle BAM = \alpha = \angle CAD$

д) ① т.к. AB - касат. и BC - секущая, то $AB^2 = BM \cdot BC$
 $6^2 = x \cdot 4x$
 $36 = 4x^2$
 $x^2 = 9$
 $x = 3$
 $AD = 15$
 $BC = 12$



а) ① Пусть $\angle BAM = \alpha$
 Тогда $AM = 2d$ (углы между кас. и хордой)
 ② $AM = CD = 2d$ (т.к. $AMCD$ - паралл. трап.)

② $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ $k = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$
 Пусть $OC = 4a$
 $AO = 5a$
 Тогда $OH = \frac{5}{9} \cdot BC = \frac{5}{9} \cdot 12 = \frac{20}{3}$
 ③ $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{20}{3} = 20$

ОТВЕТ: 20

$$x^3 + 2x^2 - x \log_2(b-1) + 4 = 0$$

имеет единственное решение на отрезке $[-1; 2]$.

Пусть $\log_2(b-1) = a$

$$x^3 + 2x^2 - x \cdot a + 4 = 0 \quad | :x$$

Заметим, что $x=0$ не экв. рен. ур.е

$$x^2 + 2x - a + \frac{4}{x} = 0$$

$$x^2 + 2x + \frac{4}{x} = a$$

Пусть $f(x) = x^2 + 2x + \frac{4}{x}$
Исследуем функцию на монотонность

$$f'(x) = 2x + 2 - 4 \cdot x^{-2}$$

$$2x + 2 - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\frac{2x^3 + 2x^2 - 4}{x^2} = 0 \quad | :2$$

$$\frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2} = 0$$

Заметим, что при $x=1$ ввр. обр. в кон.

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 2 \\ -x^3 + x^2 - 2 \\ \hline -2x^2 - 2 \\ -2x^2 - 2x \\ \hline 2x^2 - 2x \\ \hline 2x - 2 \\ \hline 2x - 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x-1 \\ x^2+2x+2 \end{array} \right.$$

ОТВЕТ:

- ① $\log_2(b-1) \leq -5$
- ② $\log_2(b-1) = 7$
- ③ $\log_2(b-1) > 10$

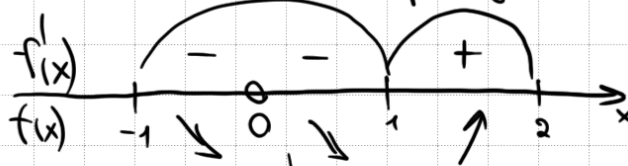
$$\textcircled{1} \begin{cases} b-1 \leq \frac{1}{32} \\ b-1 > 0 \end{cases} \quad \textcircled{2} b = 129 \quad \textcircled{3} b > 1025$$

$$1 < b \leq \frac{33}{32}$$

Ответ: $(1; \frac{33}{32}] \cup \{129\} \cup (1025; +\infty)$

$$(x-1)(x^2+2x+1+1) = 0 \quad \frac{4}{x} = 4 \cdot x^{-1}$$

$x=1$ - точка экстремума



x	-1	-0,5	0,5	1	1,5	2
---	----	------	-----	---	-----	---

y	-5	-8,75	9,25	7	7,...	10
---	----	-------	------	---	-------	----

Поскольку экстр. $f(x)$

1 решение
будет при

$$\begin{cases} a > 10 \\ a = 7 \\ a \leq -5 \end{cases}$$

а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Ященко 2020 (36 вар)
 Ященко 2019 (36 вар)
 Ященко 2018
 Задания для школы экспертов ЕГЭ

а) $a \cdot b \cdot c \cdot d = 10 \cdot (a + b + c + d)$ б) $a \cdot b \cdot c \cdot d = 175 \cdot (a + b + c + d)$

① Среди цифр нет нуля

② Среди цифр есть 5 и четная цифра (не 0)

Если $a=5$ $b=2$, то
 $5 \cdot 2 \cdot c \cdot d = 10 \cdot (7 + c + d)$

$$cd = 7 + c + d$$

$$cd - c = 7 + d$$

$$c \cdot (d - 1) = 7 + d$$

$$c = \frac{7+d}{d-1}$$

Если $d=2$ $c=9$ ✓

5292

а) 5292

ОТВЕТ: б) нет

в) 5568

5586

6558

6585

6855

8655

8565

8556

5685

5658

5865

5856

12 шт.

① Среди цифр есть 7; 5; 5

Если $a=7$ $b=5$ $c=5$

$$175 \cdot d = 175 \cdot (17 + d)$$

$$d - d = 17$$

∅ ⇒ не существует

б) $a \cdot b \cdot c \cdot d = 50 \cdot (a + b + c + d)$

① Среди цифр есть 5; 5 и четное число (не 0)

Если $a=5$ $b=5$ $c=2$, то

$$d = 12 + d$$

Если $a=5$ $b=5$ $c=4$, то

$$100d = 50(14 + d)$$

$$d = 14$$

Если $a=5$ $b=5$ $c=6$, то

$$150d = 50(16 + d)$$

$$2d = 16$$

$$d = 8$$

5568 все комбинации