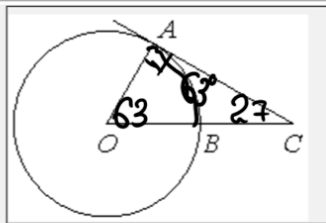


1

Угол ACO равен 27° , где O — центр окружности. Его сторона CA касается окружности. Сторона CO пересекает окружность в точке B (см. рис.). Найдите величину меньшей дуги AB окружности. Ответ дайте в градусах.



A6532B

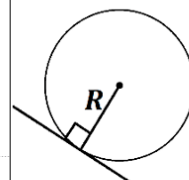
Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Основная волна 2018

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНОЙ

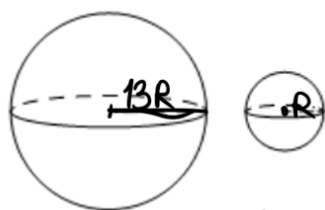


Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

ОТВЕТ: 63

2

Дано два шара. Радиус первого шара в 13 раз больше радиуса второго. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?

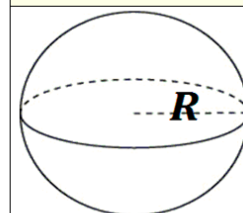


$$\begin{aligned} \textcircled{1} V_{\text{больш}} &= \frac{4}{3} \pi \cdot (13R)^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot 13^3 \\ \textcircled{2} V_{\text{мал}} &= \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

Источники:

ФИПИ (новый банк)

ОБЪЁМ ШАРА



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

ОТВЕТ: 2197

3

В соревнованиях по толканию ядра участвуют 3 спортсмена из Дании, 6 из Швеции, 4 из Норвегии и 7 из Финляндии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Норвегии.



F805D7

Источники:

ФИР (старый банк)
 ФИР (новый банк)
 Основная волна 2021
 Основная волна 2019
 Основная волна 2018
 Основная волна 2017
 Основная волна 2013

$$P = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = 0,2$$

ОТВЕТ: 0, 2

4

В городе 48% взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Источники:

Демо 2022

$$\left. \begin{array}{l} 480 \text{ чел} - \text{Мужчины} \\ 520 \text{ чел} - \text{Женщины} \end{array} \right\} 1000 \text{ чел}$$

$$12,6 - \text{Пенсионеры}$$

$$0,15 \cdot 520 = \frac{15}{100} \cdot \frac{520}{1} = 78 - \text{Женщины - Пенсионеры}$$

$$12,6 - 7,8 = 4,8 - \text{Мужчины - Пенс.}$$

$$P = \frac{4,8}{480} = 0,01$$

ОТВЕТ: 0, 01

5

Найдите корень уравнения $\frac{2}{9}x = -3\frac{7}{9}$.

AC087E

$$\frac{2}{9} \cdot x = -\frac{34}{9}$$

$$x = -17$$

ОТВЕТ: - 1 7

6

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$ и $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$.

034B40

$$\textcircled{1} \sin^2 \alpha + \frac{25 \cdot 29}{29^2} = 1$$

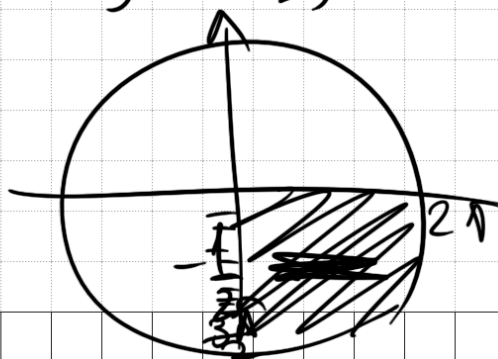
$$\frac{1}{1} - \frac{25}{29} = \frac{4}{29}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{4}{29}$$

~~$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$$~~

$$\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\textcircled{2} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{29}} : \frac{5\sqrt{29}}{29} = -\frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \frac{29}{5\sqrt{29}} = -0,4$$



ОТВЕТ: - 0 , 4

Источники:

ФИПИ (старый банк)

Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Основная волна 2017

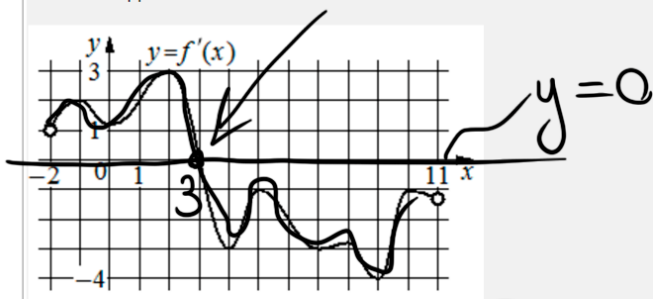
Основная волна 2013

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$

7

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 11)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



① К у прямой $y=0$ = 0

② К касательной = 0

$$f'(x_0) = 0$$

Решим графически

7C42F8

Источники:

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2016

$$y = k \cdot x + b$$

ВЗАИМНОЕ РАСП. ДВУХ ПРЯМЫХ

$$y = k_1x + b_1$$

$$y = k_2x + b_2$$

Если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, то прямые совпадают

ПРИМЕР:

$$y = 2x + 7 \text{ и } y = 2x + 7$$

Если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые параллельны

ПРИМЕР:

$$y = 2x + 7 \text{ и } y = 2x - 5$$

Если $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются

ПРИМЕР:

$$y = 2x + 7 \text{ и } y = 3x + 7$$

ГЕОМ. СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

ОТВЕТ: 3

8

Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,4 + 14t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 11 метров?

7AAS01

Источники:

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Пробный ЕГЭ 2015

$$h \geq 11$$

$$1,4 + 14t - 5t^2 \geq 11$$

$$5t^2 - 14t + 9,6 \leq 0$$

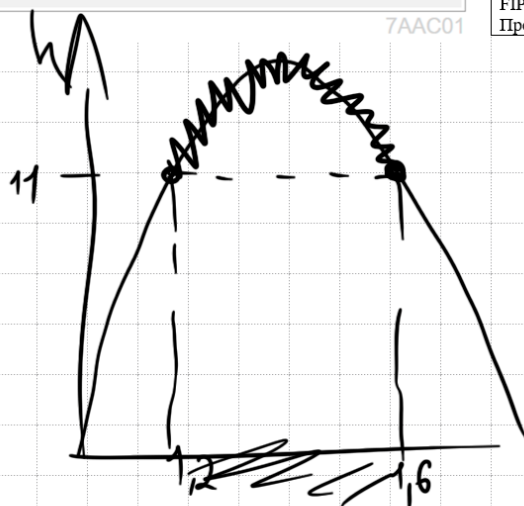
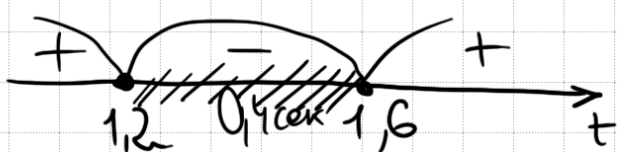
$$25t^2 - 70t + 48 \leq 0$$

$$D = 4900 - 4800 = 100$$

$$t = \frac{70 \pm 10}{50}$$

$$t = 1,2$$

$$t = 1,6$$



ОТВЕТ: 0,4

9

Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 112 литров она заполняет на 6 минут быстрее, чем первая труба?

Источники:ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2018

	Произв.	Время	Кол-во литров
I	$x-6$	$\frac{112}{x-6}$	112
II	x	$\frac{112}{x}$	112

$$t_{\text{медл}} - t_{\text{быстр}} = 6$$

$$\frac{112}{x-6} - \frac{112}{x} = 6$$

$$\frac{112x - 112(x-6)}{x^2 - 6x} = 6$$

$$\frac{x^2 - 6x - 112}{x^2 - 6x} = 0$$

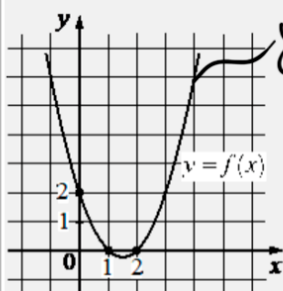
$$x = 14$$

$$x = -8$$

ОТВЕТ: 14

10

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-2)$.



$$y = x^2 - 3x + 2$$

BC2802

1 способ

$$① a = 1$$

$$c = 2$$

$$② x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$1,5 = \frac{-b}{2} \quad b = -3$$

$$y = x^2 - 3x + 2$$

$$③ f(-2) = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 2 = 12$$

ОТВЕТ: 12

Источники:

ФИПИ (старый банк)

11

Найдите наибольшее значение функции

$$y = 6 + 12x - 4x\sqrt{x}$$

на отрезке $[2; 11]$.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

D8A61C

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad y &= 6 + 12x - 4x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} \\ y &= 6 + 12x - 4 \cdot x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad y' &= 12 - 4 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 0 \\ 12 &= 6\sqrt{x} \\ \sqrt{x} &= 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad y(4) &= 6 + 12 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 22 \\ y(2) &= \dots \\ y(11) &= \dots \end{aligned}$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

ПРОИЗВОДНЫЕ

✓	$C' = 0$
✓	$x' = 1$
✓	$(Cx)' = C$
✓	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
	$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
	$(\sin x)' = \cos x$
	$(\cos x)' = -\sin x$
	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
	$(e^x)' = e^x$
	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
	$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

ОТВЕТ: 22

12

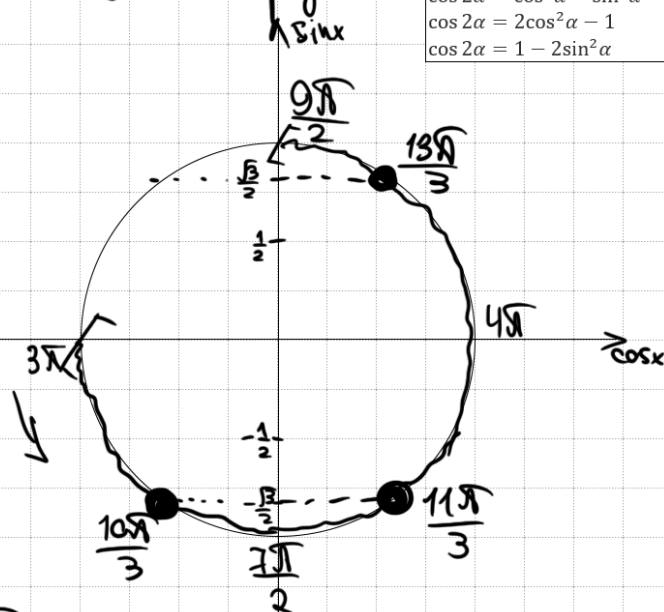
а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \sin^2 x = 0,25.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} \text{а) } 1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x &= 0,25 \\ \frac{3}{4} &= \sin^2 x \\ \sin x &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x &= \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

б) Выберем корни с помощью окружности.



Поиским корни:

$$\begin{aligned} x &= 3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} \\ x &= 4\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3} \\ x &= 4\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{3} \end{aligned}$$

ОТВЕТ:

$$\begin{aligned} \text{а) } &\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \text{б) } &\frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}; \frac{13\pi}{3} \end{aligned}$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Основная волна 2019

Ященко 2020 (36 вар)

Ященко 2019 (36 вар)

Основная волна 2012

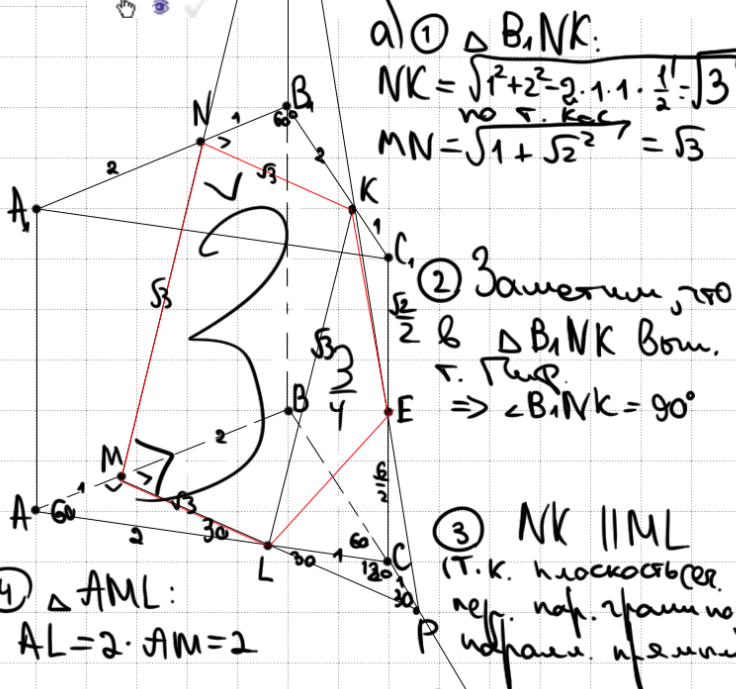
ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

13

В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах $AB, A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = B_1 N = C_1 K = 1$.

- а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
- б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .



а) ① $\Delta B_1 N K$:
 $NK = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
 $MN = \sqrt{1 + 5^2} = \sqrt{3}$
 ② Заметим, что $\frac{1}{2} \in \Delta B_1 N K$ вст. т. Пиф. $\Rightarrow \angle B_1 N K = 90^\circ$
 ③ $NK \parallel ML$ (т.к. плоскость сеч. пер. пар. грани по направлению прямой)

т.е. $MNKL$ — ромб с равными сторонами и углом 90° , т.е. квадрат

б) $S_{сеч} = S_{MNKL} + S_{\Delta KLE}$
 ① $\Delta CEP = \Delta C_1 EK$ по УСУ $\Rightarrow E$ — середина CC_1
 ② ΔLCE с катетами $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$
 ③ ΔKLE с катетами $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{KLE} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$

④ ΔAML :
 $AL = 2 \cdot AM = 2$

⑤ $KL = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$

⑥ $NK \perp A_1 B_1$
 $NK \perp AA_1 \Rightarrow NK \perp (A_1 B_1 A)$
 $\Rightarrow NK \perp NM$

ОТВЕТ: 3,75

Аналогично $\angle NML = 90^\circ$

④ $S_{сеч} = 3 + 0,75 = 3,75$

14

Решите неравенство $\frac{4x^2 + x - 4 - 0,52x^2 - 2x - 1}{0,2 \cdot 5^x - 1} \leq 0$.

$\frac{(2^2)^{x^2+x-4} - (2^{-1})^{2x^2-2x-1}}{5^{-1} \cdot 5^x - 5^0} \leq 0$

$\frac{2^{2x^2+2x-8} - 2^{-2x^2+2x+1}}{5^{x-1} - 5^0} \leq 0$

$\frac{(2-1)(2x^2+2x-8+2x^2-2x-1)}{(5-1)(x-1-0)} \leq 0$
 $\frac{4x^2-9}{x-1} \leq 0$

ОТВЕТ: $(-\infty; -1,5] \cup (1; 1,5]$

$\frac{(2x-3)(2x+3)}{x-1} \leq 0$



Источники:

Досрочная волна (Резерв) 2019	
МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ	
БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$ f - g $	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна 2016
 Гордлин #14 2019

15 В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть по 300 тыс. рублей;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Пусть S - сумма долга

Какую сумму планируется взять в кредит, если известно, что платёж в 2029 году равен 860,6 тыс. рублей?

Дата	Сумма долга
и 26	S
я 27	$1,3 \cdot S$
ф 27	платёж 300
и 27	$1,3S - 300$
я 28	$1,3^2 S - 300 \cdot 1,3$
ф 28	платёж 300
и 28	$1,3^2 S - 300 \cdot 1,3 - 300$
я 29	$1,3^3 S - 300 \cdot 1,3^2 - 300 \cdot 1,3$
ф 29	платёж = $1,3^3 S - 300 \cdot 1,3^2 - 300 \cdot 1,3 = 860,6$
и 29	0

$$1,3^3 \cdot S = 860,6 + 300 \cdot 1,69 + 300 \cdot 1,3$$

$$S \cdot 2,197 = 860,6 + 2,99 \cdot 300$$

$$S \cdot 2,197 = 860,6 + 897$$

$$S \cdot 2,197 = 1757,6$$

$$S = 800 \text{ тыс}$$

$$\begin{array}{r} 1757600 \\ 17576 \\ \hline 800 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2197 \\ \hline 800 \end{array}$$

ОТВЕТ: 800 тыс

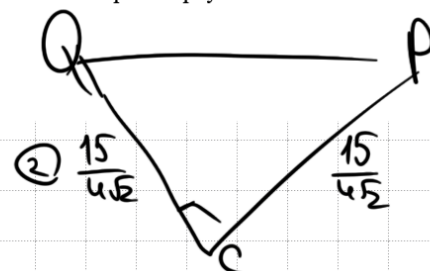
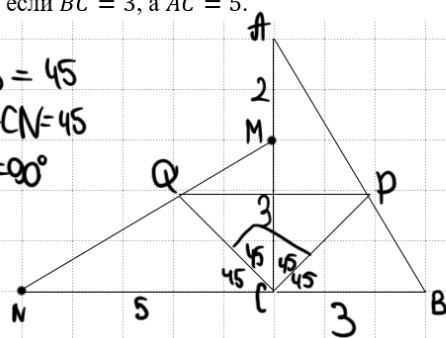
Источники:

Основная волна 2022

16 В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC , а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C , причём $CM = BC$ и $CN = AC$. Отрезки CP и CQ - биссектрисы треугольников ACB и NCM соответственно.

- Докажите, что CP и CQ перпендикулярны.
- Найдите PQ , если $BC = 3$, а $AC = 5$.

a) $\angle ACP = \frac{1}{2} \angle ACB = 45$
 $\angle ACQ = \frac{1}{2} \angle ACN = 45$
 $\angle QCP = 45 + 45 = 90^\circ$
 $\Rightarrow PC \perp CQ$



$$QP = \sqrt{\frac{225}{32} + \frac{225}{32}} = \sqrt{\frac{450}{32}} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}$$

b) ① $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$
 $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot PC \cdot \sin 45 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot PC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4} PC$
 $S_{BPC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot PC \cdot \sin 45 = \frac{3\sqrt{2}}{4} PC$
 $\frac{15}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} PC$
 $PC = \frac{15}{\sqrt{2}} = QC$ (т.к. $\triangle NMC = \triangle ABC$)

ОТВЕТ: 3,75

Источники:

Основная волна 2019

$$\frac{9x^2 - a^2}{3x - 9 - 2a} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - a^2 = 0 \\ 3x - 9 - 2a \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x - a)(3x + a) = 0 \\ 3x \neq 9 + 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{a}{3} \\ x = -\frac{a}{3} \\ x \neq 3 + \frac{2}{3}a \end{cases}$$

 x_1 и x_2 должны быть разными

$$\frac{a}{3} \neq -\frac{a}{3}$$

$$\frac{2a}{3} \neq 0$$

$$a \neq 0$$

x_1 не должен быть равен $3 + \frac{2}{3}a$

$$\frac{a}{3} \neq 3 + \frac{2}{3}a$$

$$\frac{a}{3} \neq -3$$

$$a \neq -9$$

x_2 не должен быть равен $3 + \frac{2}{3}a$

$$-\frac{a}{3} \neq 3 + \frac{2}{3}a$$

$$a \neq -3$$

ОТВЕТ:

$$(-\infty; -9) \cup (-9; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; +\infty)$$

18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{3x - 9 - 2a} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - a^2 = 0 \\ 3x - 9 - 2a \neq 0 \end{cases}$$

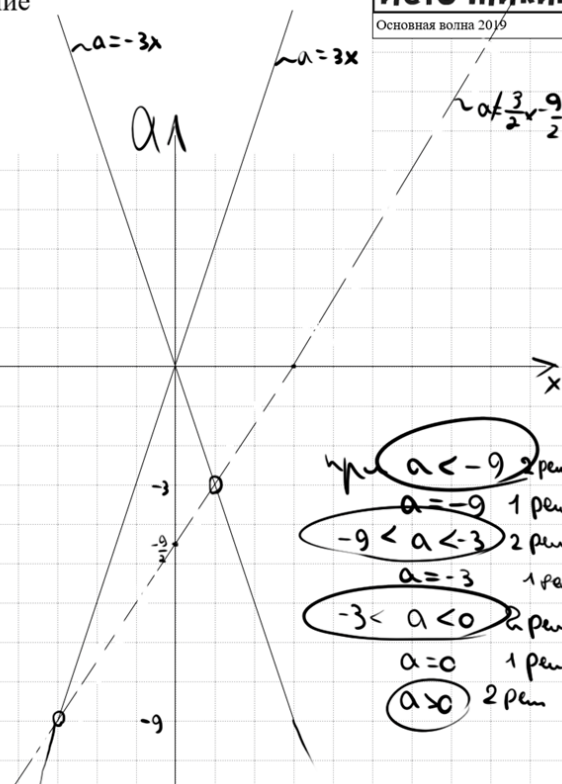
$$\begin{cases} (3x - a)(3x + a) = 0 \\ 2a \neq 3x - 9 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3x \\ a = -3x \\ a \neq \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -9) \cup (-9; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; +\infty)$$

Источники:

Основная волна 2019

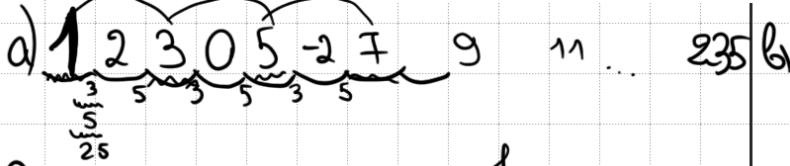


В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1, a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

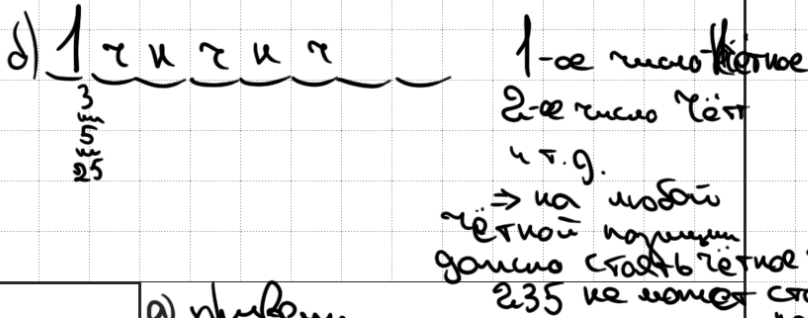
- а) Приведите пример такой последовательности.
- б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
- в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Яценко 2018



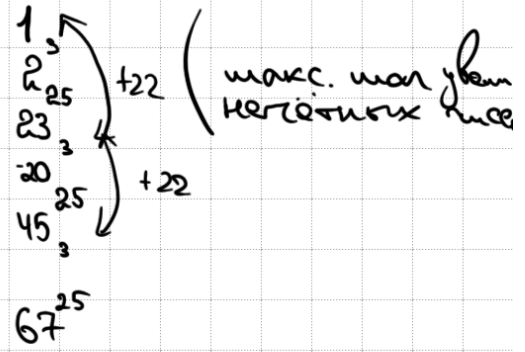
Если сумму соседних брать 3, 5, 3, 5 и т.д. числа на нечётных позициях увеличивать на 2 и так мы дойдём до 235.



ОТВЕТ:

- а) привели
- б) нет
- в) 23

Если $n = 23$



89

111

133

155

177

199
 - 196₂₅

221
 - 218₃
 243₂₅

$n \geq 23$, т.е. при самом большом росте $n=21$ не хватает
 $n=22$ не может быть из-за чётности

